MATHEMATISCH-ASTRONOMISCHE BLÄTTER
NEUE FOLGE

Band 21

Herausgegeben von der Mathematisch-Astronomischen Sektion
der Freien Hochschule für Geisteswissenschaft
am Goetheanum, Dornach (Schweiz)

Begründet von Louis Locher und Georg Unger

Redaktion: *Renatus Ziegler*

RENATUS ZIEGLER

Morphologie von Kristallformen und symmetrischen Polyedern

Kristall- und Polyedergeometrie im Lichte von Symmetrielehre
und projektiver Geometrie

Kop. 5 - f

VERLAG AM GOETHEANUM

Themen und Schlagworte

Polyeder, Platonische Körper, Archimedische Körper, Dualarchimedische Körper
Symmetrie, Symmetriegruppen, kristallographische Punktgruppen
Kristallgeometrie, Kristallmorphologie, Kristallsymmetrie, Quasikristalle
Projektive Geometrie, Diskrete Geometrie, Konfigurationen

American Mathematical Society Subject Classification

52-02 (research exposition, survey)
52B10 (three-dimensional polytopes, polyhedra)
52B15 (symmetry properties)

20H15 (crystallographic groups)
51A05 (linear incidence geometry: general theory and projective geometry)
51F15 (reflection groups)
51N05 (descriptive geometry)
51N30 (geometry of classical groups)
82D25 (crystals)

Einbandgestaltung: Martin Diethelm, Renatus Ziegler

© Copyright 1998 Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum
CH-4143 Dornach

Alle Rechte vorbehalten

Satz und Layout: Renatus Ziegler

Herstellung: Freiburger Graphische Betriebe

ISBN 3-7235-1003-5

INHALT

Vorwort VIII

1. *Einführung*

1.1 Kristallformen und Polyeder 1

Kristalle 1
Polyeder 1

1.2 Morphologie von Kristallformen und symmetrischen Polyedern 2

1.3 Kristallographische Gesichtspunkte 2

Morphologie und Strukturtheorie 2
Deutungen des Kristallographischen Grundgesetzes 2
Kristallmorphologische Hypothese und projektive Geometrie 3
Warum projektive Geometrie? 3
Kristallformengesetz 4

1.4 Inhaltsübersicht 5

2. *Projektive Geometrie des dreidimensionalen Raumes*

2.1 Erweiterung des euklidischen Raumes durch Fernelemente 6

Grundgebilde der projektiven Geometrie 6
Parallelität und Fernelemente 6
Axiome und Urphänomene 7
Einige Konsequenzen 7

2.2 Duale Gestaltung des Raumes und harmonische Grundfigur 8

Dualität 8
Der Satz von Desargues 8
Ebene harmonische Grundfigur 9
Zentrische und ebene harmonische Grundfigur 9
Möbiusnetze und Möbiusblüten 10

2.3 Polyeder 11

Kern und Hülle 11
Konvexe Punktpolyeder und konkave Ebenenpolyeder 12

2.4 Projektive Transformationen 13

2.5 Affine Geometrie und affine Transformationen 14

2.6 Einbettung euklidischer Bewegungen in projektive Transformationen 15

2.7 Projektive Koordinaten 16

Einführung projektiver Koordinaten ohne Zugrundelegung einer Metrik 16
Vektorgeometrische Deutung homogener projektiver Bündelkoordinaten 16

Literaturhinweise 17

3. *Kristallgeometrie: Kristallgesetze und Kristalldarstellungen*

3.1 Idealkristall und Realkristall 18

3.2 Kristallographische Grundgesetze 19

Gesetz der Winkelkonstanz 19
Flächenindizes 20
Zonen und Zonenindizes 21
Zonenverbandsgesetz 22
Vektorgeometrische Darstellung der Flächen- und Zonenindizes 24
Mathematische Abhängigkeiten der kristallographischen Grundgesetze 24

3.3 Kristallographische Symmetriegesetze 25

Tangentialpolyeder und Idealgestalt 25
Ableitung der kristallographischen Einschränkung 26
Zonenverband und Symmetriegerüst 28
Unabhängigkeit des Kristallographischen Grundgesetzes vom Kristallsymmetriegesetz 28
Das Kristallformengesetz 28

3.4 Kristallographische Symmetrieachsenrichtungen und Flächenlagetypen ... 29

Kristallographische Symmetrieachsenrichtungen: Die sieben Kristallsysteme 29
Kanonisches Koordinatensystem des trigonalen Systems 32
Gesetz der Zonen und Indizes: Metrische Fassung 33
Indizesklassen und Flächenlagetypen 33
Flächenlagen und Indizesklassen der kubischen Kristallfamilie 34
Flächenlagen und Indizesklassen der hexagonalen Kristallfamilie 36

3.5 Zweidimensionale Darstellungen von Kristallen und Polyedern 38

Einfache Darstellungen von Kristallen und Polyedern 38
Mehrfache Darstellungen von Kristallen und Polyedern 41
Abwicklungsdarstellung von Kristallen und Polyedern 45

Literaturhinweise 45

4. *Kristall- und Polyedersymmetrien*

4.1 Symmetrieoperationen und Symmetrieelemente 46

4.2 Gruppen von Symmetrieoperationen 48

Der Gruppenbegriff 48
Bestimmung von Gruppen 49
Symmetriegruppen als Modelle von abstrakten Gruppen 49
Spezielle Eigenschaften von Gruppen 49
Verschiedene Ableitungen der 32 kristallographischen Punktgruppen 50

4.3 Punktgruppen als Gruppen von Deckoperationen der Sphäre 51

A) Kontinuierliche Gruppen 51
Zylinder- oder Kegelgruppen 51
Kugelgruppen 52
B) Diskrete Gruppen 52
Endliche Gruppen gleichsinniger Deckoperationen der Sphäre 53
Endliche Gruppen ungleichsinniger Deckoperationen der Sphäre 54
Direkte Produkte 54
Gemischte Gruppen 55

4.4 Kristallklassen, Kristallsysteme und Kristallfamilien 60

Kristallographische Punktgruppen 60
Symmetrieoperationen und Symbolik der kristallographischen Punktgruppen 60
Untergruppenbeziehungen der kristallographischen Punktgruppen 60
Kristallographische Blickrichtungen: Symmetrieachsenrichtungen und Kristallsysteme 63
Hermann-Mauguin-Symbole oder Internationale Symbole 66
Kristallfamilien 67

4.5 Kristallographische Symmetriegerüste und Fundamentalbereiche 68

Kristallographische Symmetriegerüste und deren Darstellungen 68
Punktgruppen, Transformationsgruppen, Fundamentalbereiche 72

4.6 Punktgruppen und Fundamentalbereiche 74

Diskrete Gruppen aus Spiegelungen 74
Elementardreiecke sind Fundamentaldreiecke 77
Verschiedene Modelle einer abstrakten Gruppe 78

Literaturhinweise 80

5. *Morphologie für symmetrische Polyeder*

5.1 Fundamentaldreieck und Lagetypendreieck 81

Fundamentaldreiecke 81
Symmetrielage 82
Lagetypendreieck 83
Flächen- und Punktlagetypen 84

5.2 Symmetrische Polyeder 85

Konvexe Polyeder 85
Punktbahnen und Ebenenbahnen bezüglich einer Sphäre 85
Symmetrische Polyeder 85
Punktgruppenpolyeder, Flächenformen und Punktformen 86
Duale Polyeder und Formen 87
Flächenkombinationspolyeder 88

5.3 Kristallographische Flächenformen 89

Das Kristallformengesetz 89
Die 47 Klassen von kristallographischen Flächen- und Punktformen und die
56 Klassen von Flächen- und Punktformen der 32 kristallographischen Punktgruppen 94
Erläuterungen zu den Tabellen 5.3, 5.4 und 5.5ab 95
Flächenkombinationsformen und Kombinationsarten 96
Vollformen oder Holoeder 96
Hemieder und Tetartoeder 97

5.4 Symmetrische Polyeder der Ikosaedergruppe 106

Die Symmetriegruppen des Ikosaeders 106
Symmetrieachsenrichtungen, Lagetypen, Flächen- und Punktformen des
Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems 109

5.5 Punktgruppenformen der Diedersysteme 116

Die Gruppen der Diedersysteme 116
Fundamentaldreieck und Lagetypendreieck 118
Flächen- und Punktformen der Diedersysteme 121

5.6 Kontinuierlicher Zusammenhang von Punktgruppenpolyedern 127

Rückblick und Ausgangspunkt 127
Zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich des Lagetypendreiecks 127
Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyeder des Ikosaedersystems 128
Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyeder des kubischen Systems 131
Zusammenfassung: Die Polyedermannigfaltigkeit des kubischen Systems und des
Ikosaedersystems 138
Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyeder der Diedersysteme 140
Oktagonales System 140
4N-gonales System 145
(4N+2)-gonales System 146
(2N+1)-gonales System 146

5.7 Flächen- und Eckenkombinationen von Polyedern 147

Flächenkombinationen von Polyedern 147
Eckenkombinationen von Polyedern 147
Kombinationen von Polyedern mit variablen und invariablen Lagetypen 148
Flächenkombinationsreihendreieck 148
Eckenkombinationsreihendreieck 154
Kombinationsreihendreieck 154
Dualformendreieck 155
Struktur von Kombinationsreihendreieck und Dualformendreieck 155

5.8 Klassifizierung von symmetrischen Polyedern 156

Isoedrische und isogonale konvexe Polyeder und deren Teilklassen 156
Kombinationspolyeder 160
Nicht-konvexe symmetrische Polyeder 161
Nicht-konvexe reguläre Polyeder: reguläre Sternpolyeder 162

5.9 Symmetrische Polyederverbände 164

5.10 Topologisch, projektiv und affin reguläre konvexe Polyeder 165

Topologisch reguläre konvexe Polyeder 165
Topologisch halbreguläre konvexe Polyeder 165
Projektiv oder affin reguläre konvexe Polyeder 166
Projektiv oder affin isoedrische und isogonale konvexe Polyeder 167
Elliptisch oder hyperbolisch reguläre, isoedrische und isogonale konvexe Polyeder 167

Literaturhinweise 168

6. *Projektive Darstellungen von Symmetrien und Polyedern*

6.1 Projektive Darstellung von Symmetrien der Sphäre 169

Linearprojektionen von Symmetriegerüsten und Polyedern 169
Rationale Konstruktionen 170
Ableitung der kristallographischen Einschränkung 173

6.2 Projektive Darstellung von kristallographischen Symmetrien und Polyedern 174

Projektive Darstellungen von Symmetriegerüsten 174
Beispiele projektiver Darstellungen von kristallographischen Flächenformen 175

6.3 Konstruktion kristallographischer Flächen- und Punktlagen in Linearprojektion 180
Linearprojektionen von kubischen und hexagonalen Flächen- und Punktlagen 180
Linearprojektionen von Symmetriegerüsten sowie Flächen- und Punktlagen 183

6.4 Projektive Charakterisierung der Kristallformungsgesetze 185
Projektive Klassifikation der Kristallsysteme 185
Symmetrien der Linearprojektion von Kristallpolyedern 186
Verschiedene Einteilungen der Kristallsysteme 187

6.5 Projektive Darstellungen nichtkristallographischer Symmetrien 188
Projektive Darstellungen des Symmetriegerüstes der Ikosaedergruppe 188
Projektive Darstellungen von Flächenformen der Ikosaedergruppe 190
Linearprojektionen von Flächen- und Punktlagen 195
Projektive Darstellungen der Diedersymmetrien 197

6.6 Projektive Konfigurationen 199
Ebene und bündelige projektive Konfigurationen 199
Räumliche projektive Konfigurationen 199
Die Konfigurationen der platonischen Körper 199
Die Reye-Konfiguration 200
Die Hess-Konfiguration 201

Literaturhinweise 202

7. ***Ergebnis und Konsequenzen für die Kristallographie: Zum komplementären Verhältnis von Morphologie und Strukturtheorie***

7.1 Geometrische Kristallmorphologie: Eine Zusammenfassung 204
Geometrische Kristallmorphologie 204
Kristallographische Gesetze 206
Kristallformengesetz und Kristallmorphologische Hypothese 206
Rationale Konstruktionen und ganzzahlige Indizes 206
Symmetrien der Beugungsbilder 207

7.2 Projektive und affine Geometrie der Gitter 208
Projektive Geometrie der Gitter: Möbiusnetze und Möbiusgitter 208
Affine Geometrie der Netze und Gitter 211
Netzebenen und kleine ganzzahlige Indizes 212
Gitter und Translationsgruppen 212

7.3 Metrische Geometrie der Netze und Gitter als Grundlage der Kristallstrukturtheorie 213
Die fünf metrischen Netztypen 213
Metrische Gittertypen: Die 14 Bravais-Gitter-Typen 214
Punktdichte und Netzebenenabstände 214
Gittergruppen, Punktgruppen und Raumgruppen 216
Einfache und mehrfache Gitter 216
Kristallographische Strukturmorphologie 218
Reguläre Punktsysteme 218

7.4 Kristallstrukturtheorie 219
Gitterstrukturhypothese 219
Vom Gitter zur polyedrischen Gestalt 219

7.5 Zum Zusammenhang von Kristallformengesetz, Kristallmorphologischer Hypothese und Gitterstrukturhypothese 221

7.6 Synthese von Kristallmorphologie und Kristallstrukturtheorie 223
Integration der Gitterstrukturhypothese in die Kristallmorphologische Hypothese 223
Formsynthese 224
Ein Kristallformungsprinzip 224

7.7 Kristallgenese 226
Strukturgenese von Kristallen 226
Morphogenese von Kristallen 227
Genetische Synthese 227

7.8 Aperiodische regelmäßige Strukturen: Quasikristalle 228

Literaturhinweise 229

Anhang

Literaturverzeichnis 230
A: Mathematik (Polyedergeometrie, Symmetrietheorie, Projektive Geometrie) 230
B: Kristallographie (theoretisch, physikalisch, historisch) 232

Nachweis der Abbildungsvorlagen 234

Symbolverzeichnis 234

Verzeichnis der Tabellen 235

Index der Polyedernamen in Deutsch und Englisch 236

Sachregister 238

VORWORT

In diesem Buch wird der Versuch unternommen, zwei Intentionen miteinander zu verbinden, die sich meiner Auffassung nach gegenseitig befruchten. Einerseits wird gezeigt, in welchem Sinne der Lehre von den Kristallformen (Kristallmorphologie) eine eigenständige mathematische Grundlage zukommt. Andererseits wird das Gebiet der symmetrischen konvexen Polyeder in möglichst anschaulicher und doch strenger Form gründlich behandelt. Und dies mit vielen sorgfältig ausgewählten und gestalteten Figuren und Tabellen.

Mit der dabei entwickelten Art der Morphologie wird eine Brückenbildung zwischen den detaillierten und konkreten Gestaltuntersuchungen der Kristallographen und den zur Verallgemeinerung hindrängenden Symmetrielehren der Mathematiker angestrebt. Dabei gewinnen einerseits die durch die geometrische Kristallmorphologie erarbeiteten Details eine strenge Ordnung und offenbaren sich als Spezialfälle allgemeinerer und umfassenderer Formmöglichkeiten. Andererseits erfahren die mathematischen Symmetrielehren durch kristallographisch motivierte Begriffe konkrete Anschaulichkeit und Vielfalt. Daraus ergibt sich eine umfassende Morphologie für symmetrische konvexe Polyeder.

Vom mathematischen Gesichtspunkt aus finden sich in diesem Buch keine grundlegend neuen Ergebnisse oder Methoden. Eine umfassende und zugleich gründliche Darstellung der Morphologie symmetrischer konvexer Polyeder gibt es meines Wissens bisher jedoch nicht, wenn man von der Darstellung verschiedenster Einzelheiten in nicht immer leicht zugänglichen und vor allem in englischer Sprache abgefaßten Spezialaufsätzen oder -monographien absieht. Meistens stehen bei der lehrbuchmäßigen Behandlung der konvexen, in irgendeinem Sinne regelmäßigen oder halbregelmäßigen Polyeder nicht deren symmetrische Eigenschaften und damit auch nicht der gruppentheoretische Aspekt im Vordergrund, sondern topologische, kombinatorische oder elementargeometrische Aspekte. Demzufolge werden oft nur die archimedischen und dualarchimedischen bzw. catalanischen Polyeder behandelt, und nicht deren symmetrische Verallgemeinerungen (isogonale oder gleicheckige und isoedrische oder gleichflächige Polyeder).

In diesem Buch steht nun die Symmetrie ganz im Zentrum und es werden von ihr ausgehend die meisten der heute bekannten Klassen von konvexen symmetrischen Polyedern behandelt.

Im weiteren wird in diesem Buch großen Wert auf verschiedenste Verwandlungs- und Metamorphosereihen solcher Polyeder gelegt, welche andernorts, falls überhaupt, nur in ausgewählten Einzelfällen dargestellt werden.

Was die Darstellung der Morphologie von Kristallen in kristallographischen Monographien oder Lehrbüchern betrifft, so wird dieser entweder sehr wenig Raum gegeben oder sie ist vom mathematischen Gesichtspunkt aus unbefriedigend und/oder unvollständig. Zudem wird meist von der Gitterstruktur ausgegangen, und damit kommt der eigenständige Charakter der Morphologie nicht zur Geltung.

Die Morphologie hat nicht nur ihren ästhetischen, praktischen und/oder mathematischen Reiz, sondern ist auch ein notwendiger Bestandteil einer umfassenden wissenschaftlichen Erkenntnis der Kristallwelt. In naturphilosophischem Sinne bedeutet dies, daß Kristallmorphologie und Kristallstrukturtheorie (Gittertheorie), auch in ihrer genetischen Deutung, komplementären Charakter haben, also das eine Gebiet das andere ergänzt und keines der beiden Gebiete das andere ersetzen kann.

Für das Zustandekommen dieses Buches waren Anregungen verschiedenster Art notwendig. Die erste intensive Auseinandersetzung mit der Kristallographie geht auf meine Diplomarbeit [1981a] im Rahmen des Studiums der Mathematik und Physik an der ETH in Zürich sowie einige sich daran anschließende Seminare im Rahmen der Herbststudienwochen an der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum zurück. Die erneute Beschäftigung wurde durch eine Ende 1995 an mich herangetretene Anfrage von Joseph Arnoth zur Mitarbeit an der Sonderausstellung *Kristallform – Kristallgestaltung* des Naturhistorischen Museums in Basel (Oktober 1997 bis Juni 1998) in Gang gebracht.

Für klärende Gespräche oder Korrespondenz bin ich folgenden Personen dankbar: Cornelis Bockemühl, Dankmar Bosse, Hellmut Fischmeister, Stefan Graeser, Peter Gschwind, Dieter Kötter, Georg Maier, Hans-Ude Nissen, Erich Offermann.

Einige Personen und eine Stiftung haben unter anderen den Druck dieses Buches durch einen finanziellen Beitrag gefördert: Dieter Roth, Alfred Hoehn, SAMPO.

Neben dem detaillierten Inhaltsverzeichnis finden sich in der Einführung, insbesondere im Abschnitt 1.4, ausführlichere Angaben zum Inhalt und Aufbau des Buches.

Grundlegende oder weiterführende Literatur, die sich im Laufe dieser Arbeit bewährt hat, wird jeweils am Ende eines Kapitels in Kurzform mit Autornamen und Jahreszahl angeführt. Nähere Details finden sich im Literaturverzeichnis.

Renatus Ziegler, im Sommer 1998

5. MORPHOLOGIE FÜR SYMMETRISCHE POLYEDER

In diesem Kapitel soll der Weg von den Symmetriegruppen zurück zu den (Kristall-) Polyedern aufgesucht werden. Im vorangehenden Kapitel wurden die Gruppen von Deckoperationen des euklidischen Raumes mit einem invarianten Punkt, die sogenannten Punktgruppen, ausführlich untersucht und gegen Ende des Kapitels insbesondere die Auswirkungen dieser Gruppen auf eine Sphäre mit Mittelpunkt im invarianten Punkt studiert. Dies hat auf grundlegende Begriffe wie Transformationsgruppe, Punktbahn und Ebenenbahn sowie Fundamentalbereich bezüglich einer solchen Gruppe geführt. Symmetriegruppen sind dabei nichts anderes als Transformationsgruppen der entsprechenden «symmetrischen» Objekte.

Die Punktgruppen als Transformationsgruppen oder Symmetriegruppen der Sphäre operieren auf dieser Sphäre und erzeugen vermöge der verschiedenen Symmetrieoperationen aus jedem Punkt und jeder Tangentialebene der Sphäre eine aus endlich vielen Punkten bzw. Ebenen bestehende Punktbahn bzw. Ebenenbahn, die mit jedem Fundamentalbereich genau ein Element gemeinsam haben. Dieser Zusammenhang wird den Übergang von der Symmetriegruppentheorie zur Geometrie symmetrischer Polyeder ermöglichen, welche das Hauptthema dieses Kapitels bildet: Punktbahnen und Ebenenbahnen bilden die einfachsten symmetrischen Polyeder, die hier sogenannten Punktgruppenpolyeder.

Bevor mit der Polyedergeometrie begonnen wird, soll im Abschnitt 5.1 der Zusammenhang einiger aus der Theorie der Symmetriegruppen stammenden Begriffe mit den geometrischen Untersuchungen der Flächenlagen im Abschnitt 3.4 hergestellt werden.

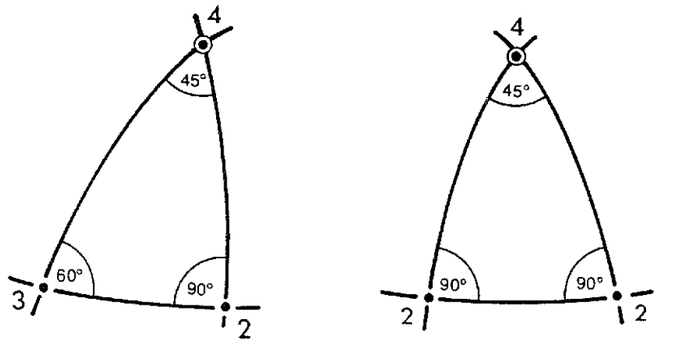
In den nachfolgenden Abschnitten werden die durch die Punktgruppen induzierten Klassen von Polyederformen diskutiert, oder allgemeiner: die Flächen- und Punktformen, welche durch die verschiedenen Flächen- und Punktlagetypen vermöge der Punktgruppen bestimmt werden.

5.1 *Fundamentaldreieck und Lagetypendreieck*

Fundamentaldreiecke

Im Abschnitt 4.5 wurde der *Punkt-Fundamentalbereich* einer Punktsymmetriegruppe eingeführt als eine Menge von Punkten, die aus allen Bahnen von Punkten genau einen Punkt enthält. Entsprechend wurde ein *Ebenen-Fundamentalbereich* einer Punktgruppe definiert als eine Menge von Ebenen, welche aus allen Bahnen von Ebenen genau eine Ebene enthält. Betrachtet man als Elemente von Bahnen nur die Punkte und Tangentialebenen einer Sphäre mit Mittelpunkt im invarianten Punkt der Punktgruppe, so werden die Fundamentalbereiche Teilmengen der Punktsphäre (Sphäre als Menge der in ihr liegenden Punkte) bzw. der Ebenensphäre (Sphäre als Menge ihrer Tangentialebenen).

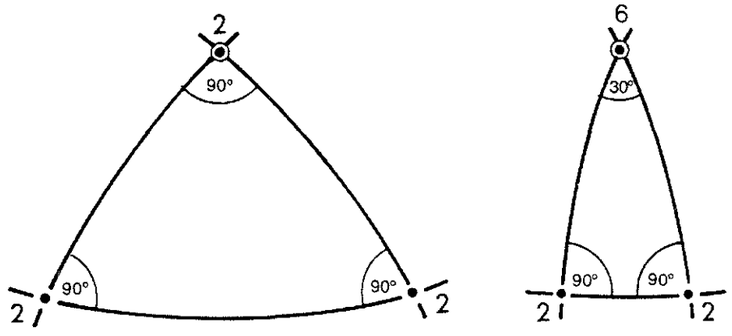
Im Abschnitt 4.6 wurde bewiesen, daß im Falle der Holoedrien des kubischen, tetragonalen, orthorhombischen, monoklinen, triklinen und hexagonalen Kristallsystems (dies sind zugleich aus Ebenenspiegelungen erzeugbare Gruppen) die Punkt- bzw. Ebenenbereiche der Sphäre, welche durch das Symmetriegerüst der entsprechenden Gruppe begrenzt werden, Fundamentalbereiche sind. Insbesondere sind bei der kubischen, tetragonalen, orthorhombischen und hexagonalen holoedrischen Punktgruppe diese Punkt-Fundamentalbereiche *sphärische Dreiecke* (**Figur 5.1ab**) bzw. dreieckige sphärische Ebenensegmente. Letztere bestehen genau aus den Tangentialebenen der Sphäre an die Punkte eines solchen Punkt-Fundamentaldreiecks. Da alle solchen *Fundamentaldreiecke* bezüglich einer Gruppe untereinander äquivalent sind, wird hier oft nur von *dem* Fundamentaldreieck gesprochen.



Kubische Holoedrie ($O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$) Tetragonale Holoedrie ($D_{4h} \equiv \mathbf{D}_4 \times \mathbf{Z}$)

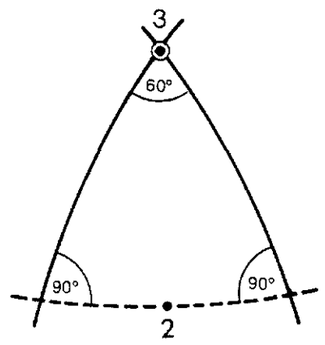
Figur 5.1a: *Kubisches und tetragonales Fundamentaldreieck (qualitativ)*

Im Falle der Holoedrie des trigonalen Systems hat sich ebenfalls ein eindeutig bestimmter Fundamentalbereich ergeben, der sich jedoch nicht allein aus den Elementen des Symmetriegerüstes ergibt (siehe **Figur 4.16** und **5.1c**).



Orthorhombische Holoedrie ($D_{2h} \equiv \mathbf{D}_2 \times \mathbf{Z}$) — Hexagonale Holoedrie ($D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$)

Figur 5.1b:*Orthorhombisches und hexagonales Fundamentaldreieck (qualitativ)*



Trigonale Holoedrie ($D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$)

Figur 5.1c: *Trigonales Fundamentaldreieck (qualitativ)*

Symmetrielage

Entscheidend ist der sich aus dem Symmetriegerüst der kubischen, tetragonalen, orthorhombischen und hexagonalen kristallographischen Holoedrien und der dadurch begrenzten Fundamentaldreiecke ergebende geometrische Tatbestand (**Figur 5.1ab**): Die drei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks sind Durchstoßpunkte von Symmetrieachsen, die drei Seiten liegen auf Symmetrieebenen, also «zwischen» den Symmetrieachsen, und die Elemente im Innern des Fundamentaldreiecks liegen weder auf einer Symmetrieachse noch auf einer Symmetrieebene. Dabei ist die Zähligkeit der entsprechenden Symmetrieachse, das heißt die Anzahl der Symmetrieoperationen um diese Achse bis zur Erreichung des Ausgangszustandes, gleich der Anzahl der Geraden (Schnittgeraden von Symmetrieebenen) durch den jeweiligen Durchstoßpunkt.

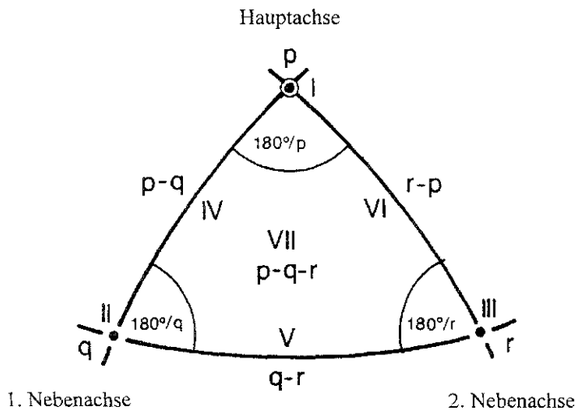
Auch hier nimmt wieder die Holoedrie des trigonalen Systems eine Sonderstellung ein (**Figur 5.1c**). Die eine Ecke des Fundamentaldreiecks dieser Symmetriegruppe wird von der dreizähligen Hauptachse durchstoßen; die zweizählige Achse dagegen schneidet die gegenüberliegende Seite des Fundamentaldreiecks, die nicht Schnitt einer Symmetrieebene ist, in der Mitte. Die übrigen Ecken enthalten keine Symmetrieachsen.

Mit der *Symmetrielage* **p** einer Fläche oder eines Punktes wird zum Ausdruck gebracht, zu welcher *p*-zähligen Achse die entsprechende Fläche senkrecht steht bzw. auf welcher der entsprechende Punkt liegt; liegt die Fläche bzw. der Punkt zwischen einer *p*-zähligen und einer *q*-zähligen Achse, so wird **p-q** geschrieben. Liegt die Fläche bzw. der Punkt zwischen drei Achsen **p**, **q** und **r**, so wird dies mit **p-q-r** notiert. Man beachte, daß sich die Symmetrielage immer auf das Symmetriegerüst der Holoedrien der entsprechenden (Kristall-)Systeme bezieht (**Figur 5.1d**).

Lagetypendreieck

Die durch die Ecken der Fundamentaldreiecke gehenden Symmetrieachsen, das heißt die mit ihnen verknüpften Symmetrieoperationen, sind im allgemeinen verschieden. Daraus ergeben sich in einem Fundamentaldreieck sieben mögliche Typen unterschiedlicher *Symmetrielagen* von Flächen bzw. von denjenigen Punkten, in welchen die Sphäre von den Ebenen berührt wird.

Diese *Lagetypen* werden mit sieben römischen Ziffern markiert (**Figur 5.1d**): drei Lagen I, II, III in den Ecken, drei Lagen IV, V, VI auf den Seiten und eine Lage VII weder in einer Ecke noch auf einer Seite.



Figur 5.1d: *Symmetrielage und Lagetypendreieck*

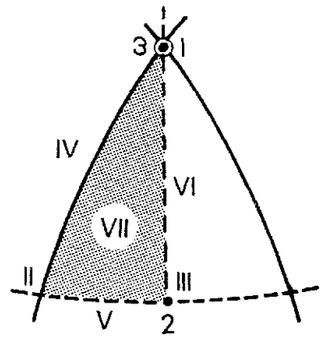
Den Lagetypen IV, V und VI auf den Seiten des Fundamentaldreiecks entsprechen Symmetrielagen von Flächen bzw. Punkten zwischen den Hauptachsen und der 1. oder der 2. Nebenachse. Sie haben einen Freiheitsgrad oder einen freien Parameter. Dem Lagetyp VII, der alle diejenigen Flächen bzw. Punkte umfaßt, die weder in Ecken noch auf Seiten des Fundamentaldreiecks liegen, entsprechen die allgemeinsten Symmetrielagen von Flächen bzw. Punkten. Die entsprechenden Lagen können beliebig im Innern des Fundamentaldreiecks variiert werden und haben deshalb zwei Freiheitsgrade oder zwei freie Parameter.

Für die Holoedrien des kubischen, tetragonalen, orthorhombischen und hexagonalen Kristallsystems ergibt sich aufgrund der Anordnung der Symmetrieachsen **n**, **p** und **q** im Fundamentaldreieck die folgende Entsprechung von Lagetypen und Symmetrielagen von Flächen bzw. Punkten (**Figur 5.1d**):

Symmetrielage	*Lagetyp*	*Freiheitsgrad*
p	I	0
q	II	0
r	III	0
p-q	IV	1
q-r	V	1
r-p	VI	1
p-q-r	VII	2

Das in dieser Weise durch Lagetypen interpretierte Fundamentaldreieck soll *Lagetypendreieck* heißen. Da alle Lagetypendreiecke bezüglich der Fundamentaldreiecke einer Gruppe untereinander äquivalent sind, wird hier oft nur von *dem* Lagetypendreieck gesprochen.

Beim trigonalen System ist ein volles Fundamentaldreieck zur eindeutigen Darstellung der Symmetrielagen ungeeignet, da die zweizählige Achse nicht durch eine Ecke desselben geht. Man legt deshalb ein halbes trigonales Fundamentaldreieck dem trigonalen Lagetypendreieck zugrunde (**Figur 5.1e**). Dieses ist zugleich das Fundamentaldreieck der die trigonale Holoedrie ($D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$) als Untergruppe enthaltenden hexagonalen Holoedrie ($D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$). Bei allen übrigen Kristallsystemen fällt das dem Lagetypendreieck zugrunde liegende Dreieck mit dem Fundamentaldreieck zusammen.



Figur 5.1e: *Trigonales Lagetypendreieck im trigonalen bzw. hexagonalen Fundamentaldreieck (qualitativ)*

Für das monokline und trikline System gibt es keine Unterscheidung nach Symmetrielagen, da zu wenig Symmetrieelemente vorhanden sind. An deren Stelle treten die im Abschnitt 3.4 angeführten arithmetischen Indizesklassen von Flächen- und Punktlagen.

Das Lagetypendreieck wurde bis anhin nur für die Holoedrie eines Kristallsystems eingeführt. Eine *Erweiterung der Lagetypensymbolik* erhält man durch die Einbeziehung der übrigen Gruppen der entsprechenden Systeme. Man hält dabei an den Lagetypen der Holoedrie fest, bezieht jedoch diese Typen auf die dazugehörigen Untergruppen (Hemiedrien und Tetardoedrien). Insbesondere weist etwa:

$$^{h}_{2}\,,\ ^{e}_{2}\,,\ ^{p}_{2} \text{ und } _{4}$$

auf die Lagetypen relativ zu der hemimorphen, enantiomorphen oder paramorphen Hemiedrie bzw. der Tetartoedrie der kubischen Holoedrie hin; bei letzterer steht kein zusätzliches Zeichen beim Lagetypensymbol. Die Symbole

$$\mathrm{VII}_2^{h},\ \mathrm{VII}_2^{p},\ \mathrm{VII}_2^{e},\ \mathrm{VII}_4$$

bedeuten dann den Flächenlagetyp VII der Holoedrie bezüglich der hemimorphen, paramorphen und enantiomorphen Hemiedrie bzw. der Tetartoedrie. Analog bedeuten

$$\mathrm{VII}_2^{II}$$

und

$$\mathrm{VII}_4^{II}$$

den Flächenlagetyp VII der Holoedrie bezüglich der Hemiedrie II. Art bzw. der Tetartoedrie II. Art.

Flächen- und Punktlagetypen

Im Abschnitt 3.4 wurden durch eine arithmetische Klassifizierung der Flächenindizes im Zusammenhang mit den Kristallsystemen *Flächenlagetypen* eingeführt. Bezieht man die entsprechenden Flächenlagen auf die Tangentialebenen einer Sphäre (Tangentialpolyeder eines Kristallpolyeders), so entspricht vermöge des Berührungspunktes jeder Flächenlage genau eine *Punktlage*, und damit jedem Flächenlagetyp genau ein *Punktlagetyp*.

Ein genauer Vergleich der im Abschnitt 3.4 entwickelten Flächenlagetypen (Tabelle 3.6) mit den hier dargestellten Symmetrielagetypen zeigt, daß diese bis in alle Einzelheiten übereinstimmen. Somit ist es berechtigt, in beiden Fällen einfach nur vom *Lagetyp* zu sprechen. Dies ergibt sich insbesondere aus der im Abschnitt 4.4 dargelegten Übereinstimmung der Klassifizierung der kristallographischen Symmetrieachsenrichtungen oder Blickrichtungen nach Kristallsystemen gemäß Abschnitt 3.4 (Tabelle 3.2) mit den Symmetrieachsenrichtungen der 7 kristallographischen holoedrischen Gruppen (Tabelle 4.5 und 4.6). Darüber hinaus ergab sich im Abschnitt 3.4 aus arithmetischen Überlegungen auch für das trigonale System dieselbe Klassifikation der Lagetypen wie für das hexagonale System, das heißt die Lagetypendreiecke dieser beiden Systeme sind auch aus diesem Gesichtspunkt dieselben.

5.2 *Symmetrische Polyeder*

Konvexe Polyeder

Die Standarddefinition eines Polyeders knüpft an den Polygonbegriff an. Ein *ebenes Polygon* ist eine in einer Ebene liegende «geschlossene Kette» von endlich vielen Strecken, *Kanten* genannt, die sich paarweise in den *Ecken* treffen. Formaler: Die in einer Ebene liegenden *Kanten* K_1, K_2, ... , K_n eines *ebenen Polygons* haben die *Ecken* $E_i = [K_i\ K_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, wobei $E_n = [K_n\ K_1]$. Dabei sind mehrfache Umläufe gestattet.

Das Polygon hat *keine Selbstdurchdringung*, wenn die Kanten keine gemeinsamen Punkte außer den Ecken haben. Das Polygon besitzt dann einen *geschlossenen Kantenzug* und gliedert deshalb die Ebene in zwei Bereiche, einen Innen- und einen Außenbereich (Jordanscher Kurvensatz). Ein Polygon ohne Selbstdurchdringung heißt *konvex*, wenn die Trägergeraden der Kanten des Polygons nicht durch den Innenbereich gehen.

Eine zusammenhängende Menge von ebenen Polygonen, so daß jede Seite eines Polygons zu genau einem weiteren Polygon gehört, heißt ein *Polyeder*. Zur Ausschließung von aus mehreren Polyedern gebildeten *Polyederverbänden* (Abschnitt 5.9) fordert man, daß keine Teilmenge von Polygonen eines Polyeders wieder ein Polyeder bildet. Die Polygone heißen *Flächen*, die Seiten der Polygone *Kanten* und die Ecken der Polygone *Ecken* des Polyeders.

Fordert man weiter, daß Flächen außer den Kanten keine weiteren Punkte gemeinsam haben, also *keine Selbstdurchdringung* stattfindet, so bildet das Polyeder eine *geschlossene Oberfläche*, welche den Raum in zwei Bereiche gliedert (Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes); einer davon ist endlich und heißt das *Innere* des Polyeders. Die Flächen eines solchen Polyeders sind Polygone ohne Selbstdurchdringung. Falls die Begrenzungsebenen außerdem nicht durch das Innere des Polyeders gehen, heißt das Polyeder *konvex*. Die Flächen eines solchen Polyeders sind konvexe Polygone.

Im folgenden werden nur *konvexe Polyeder* betrachtet, die einfach als *Polyeder* bezeichnet werden. Darüberhinaus werden nur *Klassen von ähnlichkeitsäquivalenten Polyedern* betrachtet, da weder die Größe noch die Lage eines Polyeders im Raum wichtig ist. (Da insbesondere Ähnlichkeiten gleichsinnig oder ungleichsinnig sein können, gehören spiegelbildliche oder enantiomorphe Paare von Polyedern zur selben Klasse.)

Der Begriff des konvexen Polyeders läßt sich auch aus der Gliederung des dreidimensionalen projektiven Raumes durch Ebenen bzw. Punkte gewinnen. Dies wurde im Abschnitt 2.3 *konvexes Punktpolyeder* oder *Kernpolyeder* genannt. Auf einen Beweis der Äquivalenz der beiden Definitionen wird hier verzichtet.

Punktbahnen und Ebenenbahnen bezüglich einer Sphäre

Im Abschnitt 4.5 wurden mit dem Ausdruck «Punktgruppen als Transformationsgruppen» *Ebenenbahnen* und *Punktbahnen* bezüglich einer auf einer Menge von Ebenen bzw. Punkten des Raumes operierenden, oder diese Mengen transformierenden, Punktgruppe eingeführt. Es soll jetzt insbesondere die Menge der Tangentialebenen bzw. Punkte einer Sphäre als zu transformierende oder zu bewegende Menge betrachtet werden. Dann umfassen die Ebenenbahnen und Punktbahnen die Gesamtheit aller «Stationen», in welche die Operationen einer Punktgruppe einen beliebigen (fest gewählten) Punkt oder eine beliebige (fest gewählte) Tangentialebene an die Sphäre bewegen.

Die vollständige Bahn einer Ebene bezüglich der Operationen einer Punktgruppe bestimmt genau dann ein konvexes Polyeder, wenn es mindestens vier Ebenen gibt, welche nicht durch einen Punkt gehen (Abschnitt 2.3: «Konvexe Punktpolyeder und konkave Hüllpolyeder»). Man sagt in diesem Falle, daß die Ebenenbahn der Punktgruppe die Flächen des Polyeders *erzeugt*. Dieses Polyeder heißt auch *konvexer Kern* der Ebenenbahn.

Die vollständige Bahn eines Punktes bezüglich der Operationen einer Punktgruppe bestimmt genau dann ein konvexes Polyeder, wenn es mindestens vier Punkte gibt, welche nicht in einer Ebene liegen (Abschnitt 2.3: «Konvexe Punktpolyeder und konkave Hüllpolyeder»). Man sagt in diesem Falle, daß die Punktbahn der Punktgruppe die Ecken des Polyeders *erzeugt*. Dieses Polyeder heißt auch *konvexe Hülle* der Punktbahn.

Symmetrische Polyeder

Ein Polyeder heißt *symmetrisch*, wenn es durch irgendeine nicht mit der Identität zusammenfallende Gruppe von Symmetrieoperationen mit Fixpunkt (also durch eine Punktgruppe) in sich übergeführt, das heißt mit sich zur Deckung gebracht werden kann. Es werden hier, wie bisher, nur abstands- und winkeltreue Symmetrien oder Transformationen betrachtet, also euklidische Isometrien oder Deckbewegungen.

Für Verallgemeinerungen auf affine, projektive und topologische oder nichteuklidische Symmetrien siehe Abschnitt 5.10.

Es wird hier von *allen* Punktsymmetriegruppen ausgegangen und erst in den Abschnitten 5.3 und 5.4 sowie 5.5 in kristallographische und nichtkristallographische Symmetrien differenziert.

Die *größte* Symmetriegruppe eines Polyeders heißt *Eigensymmetrie* des Polyeders.

Die wichtigsten Teilklassen von symmetrischen Polyedern sind die *isoedrischen* oder *gleichflächigen* und die *isogonalen* oder *gleicheckigen* Polyeder. Erstere bestehen aus symmetrieäquivalenten Flächen und letztere aus symmetrieäquivalenten Ecken, das heißt, es handelt sich um Ebenenbahnen bzw. Punktbahnen gewisser Ebenen bzw. Punkte einer Sphäre bezüglich bestimmter Punktgruppen.

Die *kleinste* Symmetriegruppe, deren Bahnen von Ebenen oder Punkten genau die Flächen bzw. Ecken des Polyeders erzeugen, heißt *erzeugende Symmetrie* der Flächen bzw. Ecken des Polyeders. Die entsprechenden Flächen- bzw. Punktlagen, deren Flächenbahnen bzw. Punktbahnen das Polyeder erzeugen, heißen *erzeugende Flächen-* bzw. *erzeugende Punktlagen*. Durch Symmetrieoperationen des Polyeders ineinander überführbare Flächen oder Ecken heißen *symmetrieäquivalent*.

Isogonale oder isoedrische Polyeder heißen auch *eckentransitive bzw. flächentransitive Polyeder*, da die Symmetriegruppe *transitiv* auf den Ecken bzw. Flächen operiert. Dies bedeutet nichts anderes als die elementare Tatsache, daß die Menge der Ecken bzw. Flächen eines isogonalen bzw. isoedrischen Polyeders durch dessen Symmetriegruppe in sich übergeführt wird.

Für den Zusammenhang von symmetrischen Polyedern mit den (metrisch) regulären, halbregulären und anderen Klassen von Polyedern siehe Abschnitt 5.8.

Punktgruppenpolyeder, Flächenformen und Punktformen

Die durch Punktgruppen-Bahnen erzeugbaren (isoedrischen und isogonalen) *Polyeder* sollen *Punktgruppenpolyeder* heißen. Ihre Einteilung nach den sie erzeugenden Symmetriegruppen oder nach ihren Eigensymmetrien ist zu grob: durch ein und dieselbe Gruppe können sehr verschiedenartige Polyeder erzeugt werden, je nach dem relativen Ort der erzeugenden Ebenen bzw. Punkte bezüglich des Symmetriegerüstes, das heißt der jeweiligen Flächen- bzw. Punktlage. So ergibt sich etwa aus der vollen Symmetriegruppe des Würfels (volle Hexaeder- oder Oktaedergruppe, kubische Holoedrie) mit einer Ebene als erzeugendem Element, die senkrecht auf einer **4**-Achse liegt, ein Würfel als Punktgruppenpolyeder und mit einer Ebene senkrecht auf einer **2**-Achse ein Rhombendodekaeder (**Figur 5.2**).

Die (ähnlichkeitsäquivalenten Klassen der) isoedrischen und isogonalen Polyeder werden deshalb nach äquivalenten Flächen- bzw. Punktlagetypen klassifiziert: Zwei isogonale bzw. isoedrische Polyeder mit derselben erzeugenden Symmetrie sind *äquivalent*, wenn ihre Flächen bzw. Ecken denselben Flächen- bzw. Punktlagetyp haben.

Die durch Punktgruppenbahnen erzeugbaren Flächen- bzw. Punktkonfigurationen heißen *einfache (symmetrische) Flächenformen* bzw. *einfache (symmetrische) Punktformen*. Die oben besprochenen Punktgruppenpolyeder sind Spezialfälle, insbesondere *geschlossene* Formen solcher einfachen Flächen- bzw. Punktformen.

Zur Bestimmung der isogonalen und isoedrischen Polyeder muß man beachten, daß nicht alle einfachen Flächen- bzw. Punktformen geschlossene Raumformen, das heißt Polyeder sind, sondern auch sogenannte *offene Flächenformen* bzw. *ebene Punktformen- oder Punktkonfigurationen* vorkommen können. So erzeugt etwa die Gruppe $C_4 \equiv \mathbf{4}$ der Drehungen um 90° als Flächenformen offene Prismen oder offene Pyramiden, je nachdem, ob die erzeugende Fläche parallel oder schräg zur Drehachse liegt (siehe dazu die vollständige Liste der Flächenformen und Punktformen der kristallographischen Gruppen im Abschnitt 5.3 sowie der nichtkristallographischen Gruppen in den Abschnitten 5.4 und 5.5).

Jedem Punktgruppenpolyeder liegt also eine Punktgruppe als erzeugende Symmetrie zugrunde. Aber nicht aus jeder Punktgruppe (und nicht aus jeder Flächen- bzw. Punktlage) läßt sich ein Polyeder erzeugen, sondern im allgemeinen nur eine einfache Flächen- bzw. Punktform.

Bei den drei Flächen- bzw. Punktlagetypen I, II und III (Abschnitt 5.1) ergeben sich eindeutig bestimmte, *invariable* Flächen- bzw. Punktformen (bis auf Ähnlichkeitsäquivalenz). Bei den Flächen- bzw. Punktlagetypen IV, V und VI kann je ein Parameter im vorgeschriebenen Rahmen variiert werden, so daß einzelne Repräsentanten der jeweiligen Klassen von Flächen- bzw. Punktformen desselben Lagetyps (insbesondere isoedrische bzw. isogonale Polyeder) untereinander nicht ähnlichkeitsäquivalent sind. Diese Formen heißen *einfach variable* Formen.

Bei dem Flächen- bzw. Punktlagetyp VII sind zwei Parameter in den durch das Lagetypendreieck festgelegten Grenzen frei variierbar, so daß eine noch größere Vielfalt von Repräsentanten dieser Klasse entsteht. Sie heißen *zweifach variable* Formen. Man beachte, daß die Beschränkung auf *ganzzahlige* Flächen- bzw. Punktlagen nur für die kristallographischen Flächen- bzw. Punktformen gilt (Abschnitt 5.3).

Punktgruppenpolyeder vom Flächen- bzw. Punktlagetyp VII (allgemeinster Lagetyp) haben keine symmetrischen Flächen bzw. Ecken, denn es gibt keine Symmetrien der erzeugenden Gruppe oder der Eigensymmetriegruppe, welche *eine* (oder mehrere) Flächen bzw. Ecken in sich selbst überführen. Andernfalls müßte die Fläche bzw. der Punkt eine besondere Lage bezüglich des Symmetriegerüstes haben, was gerade beim Lagetyp VII nicht der Fall ist.

Bei den Punktgruppenformen der übrigen Flächen- bzw. Punktlagetypen gibt es zum Teil hochsymmetrische Flächen bzw. Ecken, insbesondere bei den Lagetypen I, II und III. Man siehe dazu die Beispiele weiter oben: die Seitenflächen des Würfels haben die Symmetrie $D_4 \equiv \mathbf{D_4}$ und die Seitenflächen des Rhombendodekaeders die Symmetrie $D_2 \equiv \mathbf{D_2}$. Beide Symmetrien sind natürlich Untergruppen der Symmetriegruppe des Würfels bzw. des Rhombendodekaeders.

Duale Polyeder und Formen

Unterwirft man ein konvexes Polyeder $\mathcal{P}$ der Polarität an irgendeiner Sphäre (Abschnitt 2.4), so erhält man ein zu $\mathcal{P}$ *polares Polyeder*. Wählt man eine Sphäre mit Radius 1 (Einheitssphäre), so entspricht jedem Punkt A mit Abstand r vom Mittelpunkt M der Sphäre diejenige Ebene, die senkrecht auf MA steht und den Abstand $1/r$ von M hat; jeder Ebene α im Abstand s von M entspricht ein Punkt im Abstand $1/s$ auf dem Lot von M auf α.

Aus der Definition der isoedrischen und isogonalen Polyeder durch Bahnen von Ebenen bzw. Punkten einer Sphäre bezüglich der Operationen einer Punktgruppe mit dem invarianten Punkt im Mittelpunkt der Sphäre folgt ohne weiteres, daß es zu jedem isoedrischen Polyeder eine *Inkugel* und zu jedem isogonalen Polyeder eine *Umkugel* gibt. Daraus folgt weiter, daß es zu jedem isogonalen Polyeder genau ein dazu polares isoedrisches Polyeder und umgekehrt zu jedem isoedrischen Polyeder genau ein dazu polares isogonales Polyeder gibt mit derselben erzeugenden Symmetrie und derselben Eigensymmetrie. Die Polarität wird in diesem Fall vermittelt durch die Sphäre, die beim ersten Polyeder Umkugel und beim zweiten Inkugel ist. Dabei liegen die Flächen des zu einem isogonalen Polyeder polaren isoedrischen Polyeders in den Tangentialebenen der Ecken des isogonalen Polyeders und die Ecken des zu einem isoedrischen Polyeder polaren isogonalen Polyeders in den Berührungspunkten der Flächen des isoedrischen Polyeders.

Vermöge der Gesetzmäßigkeiten der räumlichen Polarität (Abschnitt 2.4) gilt allgemein: Ein zu einem konvexen (symmetrischen) Polyeder $\mathcal{P}$ mit e Ecken, f Flächen und k Kanten polares Polyeder hat e Flächen, f Ecken und k Kanten, wobei jeder Ecke mit m Kanten und jeder Fläche mit n Kanten von $\mathcal{P}$ genau eine Fläche mit m Kanten bzw. eine Ecke mit n Kanten entspricht. Das zum polaren Polyeder von $\mathcal{P}$ polare Polyeder ist projektiv äquivalent zu $\mathcal{P}$.

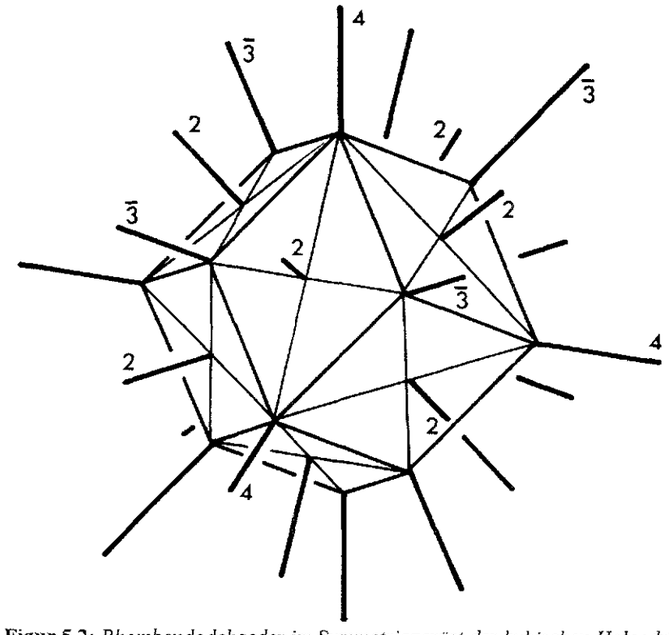
Für symmetrische Polyeder gibt es einen ausgezeichneten Mittelpunkt, den invarianten Punkt der Eigensymmetriegruppe. Legt man die die Polarität vermittelnde Sphäre durch diesen Punkt, so sind polare Polyeder eines symmetrischen Polyeders untereinander ähnlichkeitsäquivalent. Insbesondere sind also polare Polyeder von polaren Polyedern eines Polyeders $\mathcal{P}$, die durch Sphären mit beliebiger Radiuslänge und Mittelpunkt im invarianten Punkt gewonnen werden, ähnlichkeitsäquivalent zum ursprünglichen Polyeder $\mathcal{P}$.

Zwei konvexe symmetrische Polyeder heißen *dual*, wenn das eine Polyeder zur Polarform des anderen Polyeders ähnlichkeitsäquivalent ist und umgekehrt.

Dieser Begriff der Dualität von konvexen Polyedern läßt sich erweitern auf allgemeine Flächenformen und Punktformen, die durch Punktgruppen erzeugt werden. Dies bedeutet, daß es zu jeder Flächenform genau eine dazu duale Punktform gibt und umgekehrt. Insbesondere sind genau diejenigen Flächenformen und Punktformen *dual*, deren Flächenlage und Punktlage übereinstimmen.

Dies ist genau dann der Fall, wenn es Punkte mit der gegebenen Punktlage gibt, welche Berührungspunkte der Flächen der gegebenen Flächenlage sind bezüglich der durch die Flächenform bestimmten Sphäre, oder wenn es Flächen mit der gegebenen Flächenlage gibt, welche Tangentialebenen in den Punkten der gegebenen Punktlage sind bezüglich der durch die Punktform bestimmten Sphäre.

Man beachte, daß es nur bei Übereinstimmung der genauen Lage der erzeugenden Elemente, und nicht bloß des Lagetyps, zu zwei dualen Punktgruppenpolyedern eine Sphäre mit Mittelpunkt im invarianten Punkt gibt, für welche die dualen Polyeder polar sind. Es ist deshalb sinnvoll, den Begriff der Dualität von symmetrischen Polyedern dahingehend zu verallgemeinern, daß man auch dann von dualen Flächenformen und Punktformen, inbesondere von dualen isoedrischen und isogonalen Polyedern spricht, wenn deren erzeugende Elemente demselben *Lagetyp* angehören. Sind in diesem Falle die genauen Lagen der erzeugenden Elemente der dualen Polyeder verschieden, so gibt es keine Fläche 2. Grades, insbesondere keine Sphäre, vermöge welcher die beiden Polyeder polar sind. Man kann dann von *Klassen* von Polyedern sprechen, die zueinander dual sind (Abschnitt 5.8)



Figur 5.2: *Rhombendodekaeder im Symmetriegerüst der kubischen Holoedrie (Hexaeder- oder Oktaedergruppe, $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$)*

Flächenkombinationspolyeder

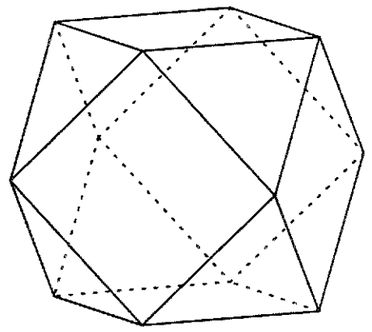
Die Klasse der symmetrischen Polyeder ist durch die Klasse der isoedrischen und isogonalen Polyeder bei weitem nicht erschöpft. Eine große Schar von im allgemeinen weder isoedrischen noch isogonalen symmetrischen Polyedern bilden die sogenannten *Flächenkombinationspolyeder* und *Eckenkombinationspolyeder*. In der Kristallographie werden nur die ersteren betrachtet; dies sind aus mehreren einfachen Flächenformen mit gegebenenfalls sowohl im Typ wie in den Parametern unterschiedlichen Lagen der erzeugenden Ebenen kombinierte Polyeder. Die *Kombination* geschieht durch Abschneiden von Ecken und/oder Kanten des einen Polyeders durch die Flächen des anderen Polyeders und umgekehrt («Abstumpfung»). Dadurch wird der konvexe Kern beider Polyeder gebildet. Entscheidend ist, daß als Resultat dieser Operation wieder ein (konvexes) Polyeder entsteht.

Verschiedene Arten von Flächenkombinationen werden im Abschnitt 5.3 besprochen. Eine ausführliche Diskussion verschiedener Reihen von Flächenkombinationspolyedern findet sich im Abschnitt 5.7, wo auch die dual entsprechenden Arten von *Eckenkombinationen* sowie die dazugehörigen Polyeder eingeführt werden. Weitere Polyederklassen, die durch Kombination gewonnen werden können, werden im Abschnitt 5.8 diskutiert. Für Zusammensetzungen von symmetrischen Polyedern zu polyedrischen Gebilden, welche selbst keine Polyeder mehr sind, sogenannte symmetrische *Polyederverbände*, siehe Abschnitt 5.9.

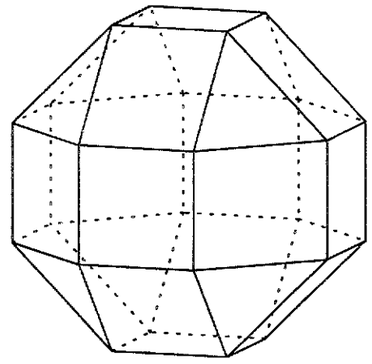
Die Flächen von Flächenkombinationspolyedern sind im allgemeinen untereinander nicht symmetrieäquivalent: sie zerfallen in zwei oder mehrere Klassen eventuell bezüglich verschiedener Gruppen symmetrieäquivalenter Flächen, je nachdem, ob das Kombinationspolyeder aus zwei oder mehreren einfachen Flächenformen kombiniert ist. Die Gesamtheit *aller* Flächen eines Flächenkombinationspolyeders ist natürlich unter der Symmetriegruppe dieses Polyeders invariant.

Die erzeugenden Symmetrien der beteiligten Punktgruppenpolyeder eines symmetrischen Flächenkombinationspolyeders müssen nicht identisch sein; falls sie es nicht sind, müssen sie jedoch entweder im Untergruppenverhältnis stehen oder eine gemeinsame nichttriviale Untergruppe besitzen, da sonst kein symmetrisches Polyeder zustande kommt. Es genügt im allgemeinen nicht, daß die erzeugenden Symmetrien der Komponenten eines Flächenkombinationspolyeders Untergruppen derselben Gruppe (zum Beispiel einer Holoedrie) sind. So läßt sich etwa aus einer offenen 3-Pyramide und einer umgekehrten offenen 4-Pyramide mit gleicher Achse kein symmetrisches Polyeder bilden, obwohl beide erzeugende Symmetrien $C_3 \equiv \mathbf{C}_3$ und $C_4 \equiv \mathbf{C}_4$ Untergruppen der Oktaedergruppe $O \equiv \mathbf{O}$ sind.

Als Beispiele von Flächenkombinationspolyedern aus zwei bzw. drei einfachen Flächenformen (Hexaeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder) diene ein Kuboktaeder (**Figur 5.3a**) bzw. ein (im allgemeinen nicht reguläres) Rhombenkuboktaeder (**Figur 5.3b**). Beide sind zugleich einfache Punktformen. Beispiele von Kombinationspolyedern, welche keine einfachen Formen sind, sogenannte reine Kombinationspolyeder, finden sich im Abschnitt 5.7.



Figur 5.3a: *Kuboktaeder*



Figur 5.3b: *Rhombenkuboktaeder (nicht regulär)*

5.3 *Kristallographische Flächenformen*

Das Kristallformengesetz

Die in der Kristallographie betrachteten Flächenformen sind Idealformen von in der Natur vorkommenden Realkristallen (Abschnitt 3.1). Die entsprechende Formenvielfalt umfaßt einerseits weniger als den Bereich der Punktgruppenpolyeder und andererseits mehr.

Für kristallographische Flächenformen gelten folgende Einschränkungen bezüglich Punktgruppenpolyedern:

(i) Als Symmetriegruppen kommen nur die 32 Kristallklassen in Frage.

(ii) Es gibt nur Flächenlagen mit kleinen ganzzahligen Indizes.

Durch folgende Bestimmungen wird die Klasse der kristallographischen Flächenformen andererseits über die Klasse der Punktgruppenpolyeder hinaus erweitert:

(iii) Jede durch eine Kristallklasse erzeugbare Flächenform mit kleinen ganzzahligen Indizes ist eine *einfache kristallographische Flächenform*.

Hier fallen auch offene Flächenformen darunter, also solche, die kein Polyeder bilden. Sämtliche einfachen kristallographischen Flächenformen sind in den **TABELLEN 5.3**, **5.4** und **5.5a** aufgeführt (siehe weiter unten).

Die drei Bedingungen lassen sich zusammenfassen durch das *Klassifizierungsprinzip für einfache kristallographische Flächenformen*: Zwei kristallographische Flächenformen mit kleinen ganzzahligen Indizes sind äquivalent, wenn ihnen dieselbe Kristallklasse als erzeugende Symmetrie und derselbe Flächenlagetyp zugrunde liegt.

Klassen von einfachen (symmetrischen) kristallographischen Flächenformen, kurz: *einfache Kristallformen*, die gemäß Definition aus zueinander symmetrieäquivalenten Flächen eines bestimmten Flächenlagetyps bestehen, werden als $\{h_0k_0l_0\}$-Formen bezeichnet, wenn ihnen eine Fläche mit den Indizes $(h_0k_0l_0)$ zugehört. Hat also eine Fläche die Indizes (100), so entsteht daraus eine {100}-Flächenform durch irgendeine der 32 Kristallklassen als erzeugende Symmetrie. Die kristallographischen Koordinatensysteme sind so eingerichtet (Tabelle 3.2 und 3.6), daß in diesem Falle eine Flächenlage des Typs I vorliegt. Kristallographische Flächenformen des allgemeinsten Flächenlagetyps VII werden dementsprechend als $\{hkl\}$-Formen bezeichnet. Die 7 möglichen Flächenlagen im Lagetypendreieck ergeben für die Holoedrien der sieben Kristallsysteme $7 \cdot 7 = 49$ Klassen von einfachen Formen und mit den 32 Kristallklassen insgesamt $7 \cdot 32 = 224$ Klassen von einfachen Kristallformen.

Weiter sind als Kristallpolyeder folgende symmetrische Polyeder zugelassen, die im allgemeinen nicht mehr durch Punktgruppen erzeugbar sind:

(iv) *Flächenkombinationsformen* von einfachen kristallographischen Flächenformen sind Zusammensetzungen von mehreren einfachen Flächenformen mit demselben Mittelpunkt, deren Flächenlagen im Typ und in den Parametern verschieden sein können und deren Symmetrien entweder gleich oder im Untergruppenverhältnis stehen oder eine gemeinsame nichttriviale Untergruppe besitzen.

Die durch (i) bis (iv) charakterisierten Klassen kristallographischer Flächenformen sind Repräsentanten von noch umfassenderen Klassen von möglichen Kristallpolyedern, die im allgemeinen keine symmetrischen Polyeder (das heißt Flächenformen mit Punktgruppen als Eigensymmetrien) mehr sind. Diese Repräsentanten wurden in den Kapiteln 3 und 4 als *Tangentialpolyeder* von allgemeinen Kristallpolyedern bezeichnet. In der Kristallographie wird dieses auch *Idealgestalt* genannt.

Tangentialpolyeder sind symmetrische konvexe Polyeder mit Inkugel, die dadurch aus allgemeinen Kristallpolyedern von Realkristallen entstehen, indem alle Ebenen der Kristallflächen parallel zu sich selbst verschoben werden, bis sie eine Sphäre im Innern des Kristallkörpers berühren und dort zum Schnitt gebracht werden. Um zu den allgemeinsten Kristallpolyedern zurückzukommen, muß diese Einschränkung auf Tangentialpolyeder wieder aufgehoben werden:

(v) KRISTALLFORMENGESETZ: Jede geschlossene Flächenform, das heißt jedes Polyeder, das aus den symmetrischen kristallographischen Flächenformen gemäß (i) bis (iv) durch Parallelverschiebung einer oder mehrerer Flächen hervorgeht, ist ein mögliches Kristallpolyeder.

Die so entstehenden Kristallpolyeder sind im allgemeinen keine symmetrischen Polyeder mehr, falls es sich bei der Parallelverschiebung der Flächen nicht gerade um eine Ähnlichkeit handelt. In der Kristallographie wird in diesem Zusammenhang von einer *Verzerrung* der *Idealgestalt* gesprochen. Die folgende Diskussion wird ohne Verlust der Allgemeinheit meist auf die symmetrischen, «unverzerrten» kristallographischen Flächenformen beschränkt.

Die an einem konkreten Kristallpolyeder in Kombination auftretenden einfachen Flächenformen, in der Kristallographie kurz *Formen* genannt, heißen die *Tracht* eines Kristalls. Unter *Habitus* wird die relative Größe der Flächen verstanden; sie hängt wesentlich vom Grad der Verzerrung ab. Die Tracht betrifft die Idealgestalt, der Habitus die konkrete Realgestalt eines Kristalls.

TABELLE 5.1: *Einfache Flächenformen des kubischen Systems*. Beim kubischen System ergeben sich $7 \cdot 5 = 35$ einfache Kristallformen. Die Tabelle zeigt, daß davon nur 15 verschieden sind. Die dazugehörigen *einfachen kubischen Punktformen* zeigt **Figur 5.10**.

TABELLEN 5.2abc: *Einfache Flächenformen des tetragonalen, hexagonalen und trigonalen Systems*. Beim tetragonalen und hexagonalen System gibt es $7 \cdot 7 = 49$ einfache Kristallformen, von denen 11 bzw. 13 verschieden sind. Beim trigonalen System gibt es 35 einfache Kristallformen, von denen 15 verschieden sind. Für die entsprechenden *Punktformen*, siehe Tabelle 5.5b.

TABELLE 5.1: *Einfache Flächenformen des kubischen Systems*

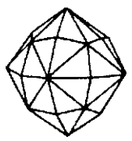
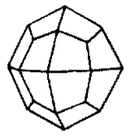
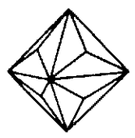
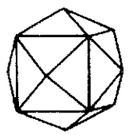
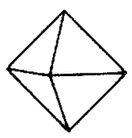
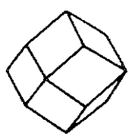
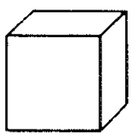
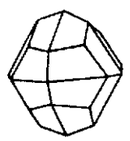
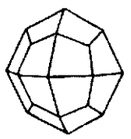
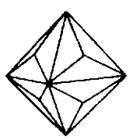
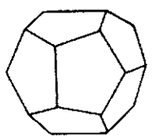
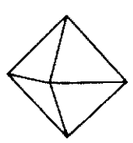
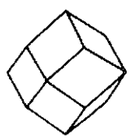
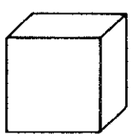
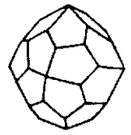
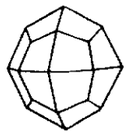
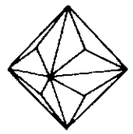
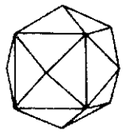
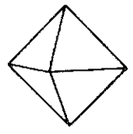
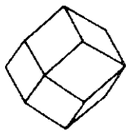
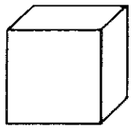
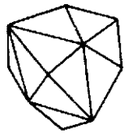
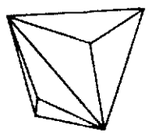
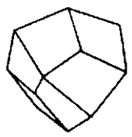
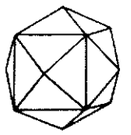
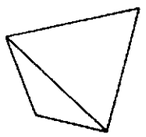
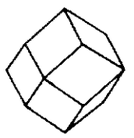
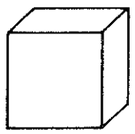
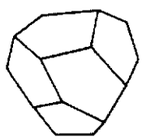
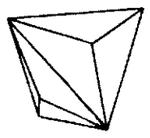
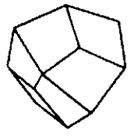
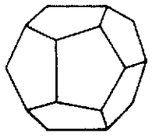
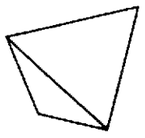
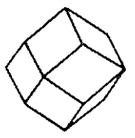
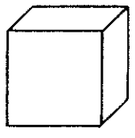
	VII {*hkl*}	IV {*hhl*}, $\lvert h\rvert < \lvert l\rvert$	V {*hhl*}, $\lvert h\rvert > \lvert l\rvert$	VI {*hk*0}	II {111}	III {110}	I {100}
Holoeder $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$	 Hexakisoktaeder	 Deltoidikositetraeder	 Pyramidenoktaeder	 Pyramidenwürfel	 Oktaeder	 Rhombendodekaeder	 Würfel
Paramorphe Hemieder $T_h \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{Z}$	 Disdodekaeder	 Deltoidikositetraeder	 Pyramidenoktaeder	 Pentagondodekaeder	 Oktaeder	 Rhombendodekaeder	 Würfel
Enantiomorphe Hemieder $O \equiv \mathbf{O}$	 Pentagonikositetraeder	 Deltoidikositetraeder	 Pyramidenoktaeder	 Pyramidenwürfel	 Oktaeder	 Rhombendodekaeder	 Würfel
Hemimorphe Hemieder $T_d \equiv \mathbf{OT}$	 Hexakistetraeder	 Pyramidentetraeder	 Deltoiddodekaeder	 Pyramidenwürfel	 Tetraeder	 Rhombendodekaeder	 Würfel
Tetartoeder $T \equiv \mathbf{T}$	 Tetraedr.Pentagondodekaeder	 Pyramidentetraeder	 Deltoiddodekaeder	 Pentagondodekaeder	 Tetraeder	 Rhombendodekaeder	 Würfel

TABELLE 5.2a: *Einfache Flächenformen des tetragonalen Systems*

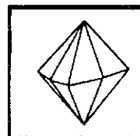
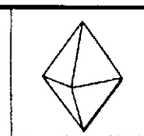
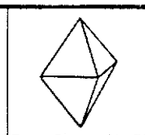
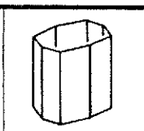
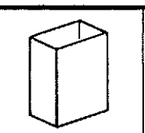
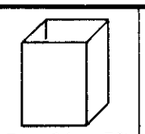
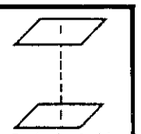
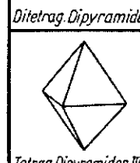
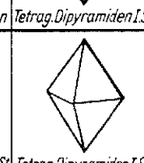
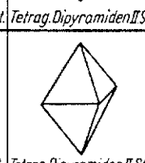
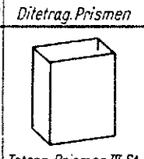
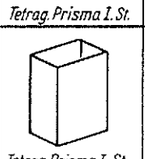
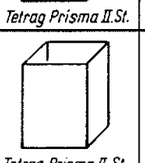
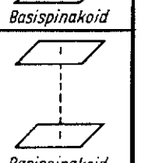
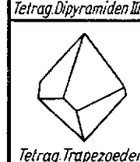
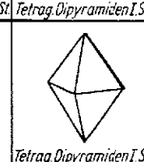
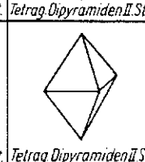
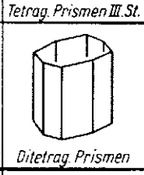
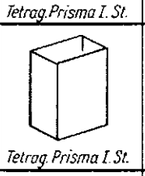
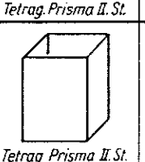
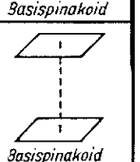
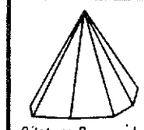
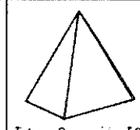
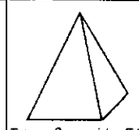
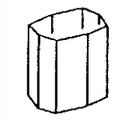
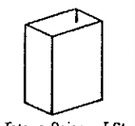
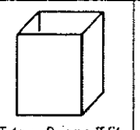
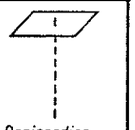
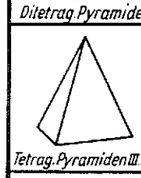
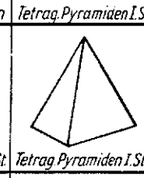
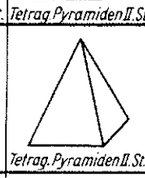
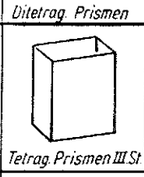
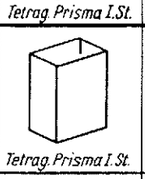
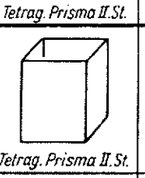
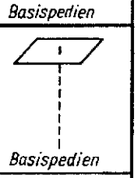
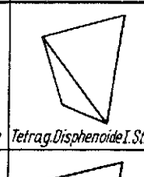
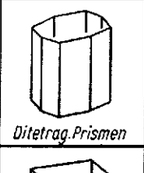
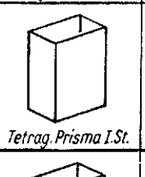
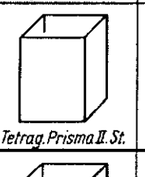
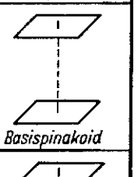
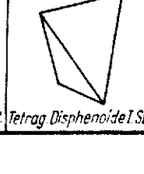
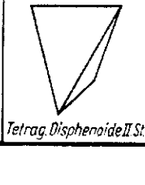
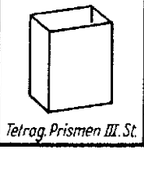
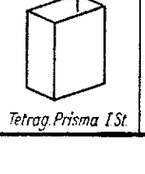
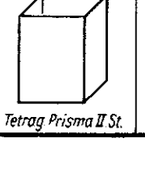
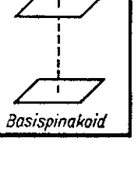
	VII {*hkl*}	VI {*hhl*}	IV {*h*0*l*}	V {*hk*0}	III {110}	II {100}	I {001}
Holoeder $D_{4h} \equiv \mathbf{D}_4 \times \mathbf{Z}$	 Ditetrag. Dipyramiden	 Tetrag. Dipyramiden I. St.	 Tetrag. Dipyramiden II St.	 Ditetrag. Prismen	 Tetrag. Prisma I. St.	 Tetrag Prisma II. St.	 Basispinakoid
Paramorphe Hemieder $C_{4h} \equiv \mathbf{C}_4 \times \mathbf{Z}$	 Tetrag. Dipyramiden III. St.	 Tetrag. Dipyramiden I. St.	 Tetrag. Dipyramiden II. St.	 Tetrag. Prismen III. St.	 Tetrag. Prisma I. St.	 Tetrag. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Enantiomorphe Hemieder $D_4 \equiv \mathbf{D}_4$	 Tetrag. Trapezoeder	 Tetrag. Dipyramiden I. St.	 Tetrag. Dipyramiden II St.	 Ditetrag. Prismen	 Tetrag. Prisma I. St.	 Tetrag. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Hemimorphe Hemieder $C_{4v} \equiv \mathbf{D}_4\mathbf{C}_4$	 Ditetrag. Pyramiden	 Tetrag. Pyramiden I. St.	 Tetrag. Pyramiden II. St.	 Ditetrag. Prismen	 Tetrag. Prisma I. St.	 Tetrag. Prisma II. St.	 Basispedien
Tetartoeder $C_4 \equiv \mathbf{C}_4$	 Tetrag. Pyramiden III. St.	 Tetrag. Pyramiden I. St.	 Tetrag. Pyramiden II. St.	 Tetrag. Prismen III. St.	 Tetrag. Prisma I. St.	 Tetrag. Prisma II. St.	 Basispedien
Hemieder II. Art $D_{2d} \equiv \mathbf{D}_4\mathbf{D}_2$	Tetrag. Skalenoeder	 Tetrag. Disphenoide I. St.	Tetrag. Dipyramiden II. St.	 Ditetrag. Prismen	 Tetrag. Prisma I. St.	 Tetrag. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Tetartoeder II. Art $S_4 \equiv \mathbf{C}_4\mathbf{C}_2$	Tetrag. Disphenoid III. St.	 Tetrag. Disphenoide I. St.	 Tetrag. Disphenoide II. St.	 Tetrag. Prismen III. St.	 Tetrag. Prisma I St.	 Tetrag. Prisma II St.	 Basispinakoid

TABELLE 5.2b: *Einfache Flächenformen des hexagonalen Systems*

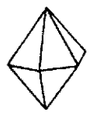
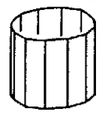
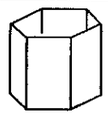
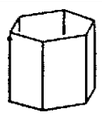
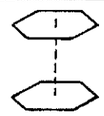
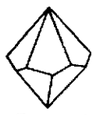
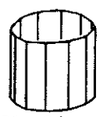
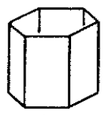
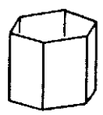
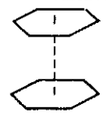
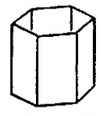
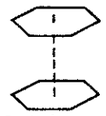
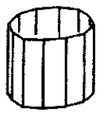
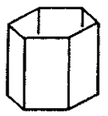
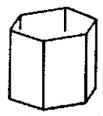
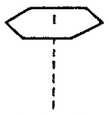
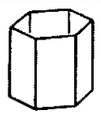
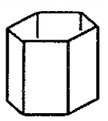
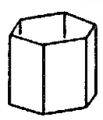
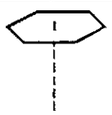
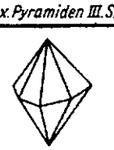
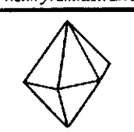
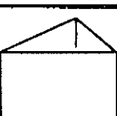
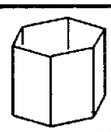
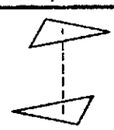
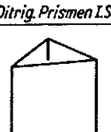
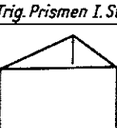
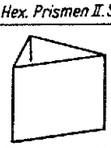
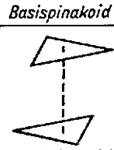
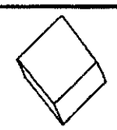
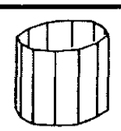
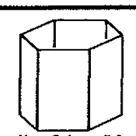
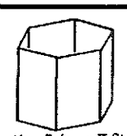
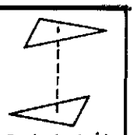
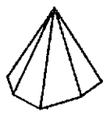
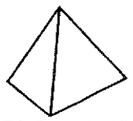
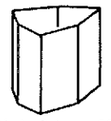
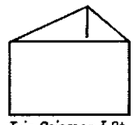
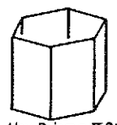
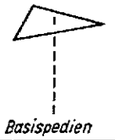
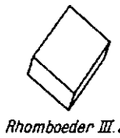
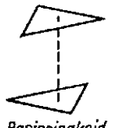
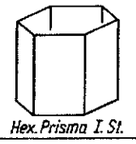
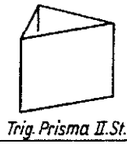
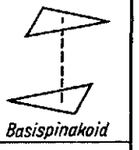
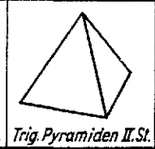
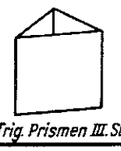
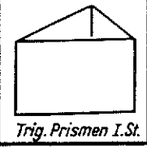
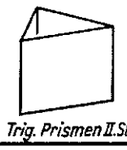
	VII $\{hk\bar{i}\,l\}$	IV $\{h0\,\bar{h}\,l\}$	VI $\{hh\,\overline{2h}\,hl\}$	V $\{hk\bar{i}\,0\}$	II $\{10\,\bar{1}\,0\}$	III $\{11\,\bar{2}\,0\}$	I $\{0001\}$
Holoeder $D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$	Dihex. Dipyramiden	Hex. Dipyramiden I. St.	 Hex. Dipyramiden II. St.	 Dihex. Prismen	 Hex. Prisma I. St.	 Hex. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Enantiomorphe Hemieder $D_6 \equiv \mathbf{D}_6$	 Hex. Trapezoeder	Hex. Dipyramiden I. St.	Hex. Dipyramiden II. St.	 Dihex. Prismen	 Hex. Prisma I. St.	 Hex. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Paramorphe Hemieder $C_{6h} \equiv \mathbf{C}_6 \times \mathbf{Z}$	Hex. Dipyramiden III. St.	Hex. Dipyramiden I. St.	Hex. Dipyramiden II. St.	 Hex. Prismen III. St.	Hex. Prisma I. St.	Hex. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Hemimorphe Hemieder $C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	Dihex. Pyramide	Hex. Pyramiden I. St.	Hex. Pyramiden II. St.	 Dihex. Prismen	 Hex. Prismen I. St.	 Hex. Prisma II. St.	 Basispedien
Tetartoeder $C_6 \equiv \mathbf{C}_6$	Hex. Pyramiden III. St.	Hex. Pyramiden I. St.	Hex. Pyramiden II. St.	 Hex. Prismen III. St.	 Hex. Prisma I. St.	 Hex. Prisma II. St.	 Basispedien
Hemieder II. Art $D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	 Ditrig. Dipyramiden	Trig. Dipyramiden I. St.	 Hex. Dipyramiden I. St.	Ditrig. Prismen I. St.	 Trig. Prismen I. St.	 Hex. Prismen II. St.	 Basispinakoid
Tetartoeder II. Art $C_{3h} \equiv \mathbf{C}_6\mathbf{C}_3$	Trig. Dipyramiden III. St.	Trig. Dipyramiden I. St	Trig. Dipyramiden II. St.	 Trig. Prismen III. St.	 Trig. Prismen I. St	 Trig. Prismen II. St.	 Basispinakoid

TABELLE 5.2c: *Einfache Flächenformen des trigonalen Systems*

	VII $\{hk\bar{i}\,l\}$	IV $\{h0\bar{h}\,l\}$	VI $\{hh\overline{2h}\,hl\}$	V $\{hk\bar{i}\,0\}$	II $\{10\bar{1}\,0\}$	III $\{11\bar{2}\,0\}$	I $\{0001\}$
Holoeder $D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$	Ditrig. Skalenoeder	 Rhomboeder I. St.	Hex. Dipyramiden II. St.	 Dihex. Prismen	 Hex. Prisma I. St	 Hex. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Hemimorphe Hemieder $C_{3v} \equiv \mathbf{D}_3\mathbf{C}_3$	 Ditrig. Pyramiden I. St.	 Trig. Pyramiden I. St.	Hex. Pyramiden II. St.	 Ditrig. Prismen I. St.	 Trig. Prismen I. St.	 Hex. Prisma II. St.	 Basispedien
Paramorphe Hemieder $C_{3i} \equiv \mathbf{C}_3 \times \mathbf{Z}$	 Rhomboeder III. St.	Rhomboeder I. St.	Rhomboeder II. St.	Hex. Prismen III. St.	Hex. Prisma I. St.	Hex. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Enantiomorphe Hemieder $D_3 \equiv \mathbf{D}_3$	Trig. Trapezoeder	Rhomboeder I. St.	Trig. Dipyramiden II. St.	Ditrig. Prismen II. St.	 Hex. Prisma I. St.	 Trig. Prisma II. St.	 Basispinakoid
Tetartoeder $C_3 \equiv \mathbf{C}_3$	Trig. Pyramiden III. St.	Trig. Pyramiden I. St.	 Trig. Pyramiden II. St.	 Trig. Prismen III. St.	 Trig. Prismen I. St.	 Trig. Prismen II. St.	Basispedien

Die 47 Klassen von kristallographischen Flächen- und Punktformen und die 56 Klassen von Flächen- und Punktformen der 32 kristallographischen Punktgruppen

Berücksichtigt man die freie Wahlmöglichkeit der konkreten Flächenlagen innerhalb eines der Flächenlagetypen IV, V, VI und VII, so stellt sich heraus, daß viele dieser Formenklassen sich untereinander nur durch die räumliche Position ihrer Repräsentanten unterscheiden. Es bleiben insgesamt 47 Klassen von einfachen kristallographischen Flächenformen übrig. Davon sind 30 geschlossen, also Punktgruppenpolyeder. Von diesen wiederum gibt es bei 22 Klassen Repräsentanten von dualarchimedischen Polyedern, und 3 Klassen bestehen aus platonischen Polyedern (Abschnitt 5.8).

Läßt man die Beschränkung auf *ganzzahlige* Indizes von Flächen- oder Punktlagen fallen, so gibt es bezüglich der 32 Kristallklassen 56 anstatt 47 einfache Flächen- bzw. Punktformen. Die 9 zusätzlichen Formen mit irrationalen Indizes sind in **TABELLE 5.2d** aufgelistet.

Außer dem regulären Pentagondodekaeder, das ein irrationaler Spezialfall des rationalen und irregulären Pentagondodekaeders oder Pyritoeders ist, gehen die restlichen 8 zusätzlichen Formen aus denjenigen kristallographischen Formen hervor, deren Konstruktion ein di-n-Seit bzw. di-n-Eck zugrunde liegt (wie dies auch beim Skalenoeder bzw. abgeschnittenen Antiprisma der Fall ist, siehe Abschnitt 5.5). Bei Zulassung von irrationalen Indizes kann eines dieser di-n-Seite bzw. di-n-Ecke zu einem $2n$-Seit bzw. $2n$-Eck werden.

An deren Eigensymmetrie wird offenbar, daß es sich bei den Flächen- und Punktformen mit irrationalen Indizes um einfache Formen nichtkristallographischer Gruppen handelt (siehe dazu die Abschnitte 5.4 und insbesondere 5.5). Die Eigensymmetrien der kubischen Form gehört dem Ikosaedersystem an, die Eigensymmetrien der tetragonalen Formen dem oktagonalen System und die Eigensymmetrien der hexagonalen und trigonalen Formen dem dodekagonalen System (siehe zu diesen Systemen die Tabelle 5.12b).

Für Erläuterungen zu den Einzelheiten der Tabelle 5.2d, siehe die nachfolgenden Erläuterungen zu den Tabellen 5.3, 5.4 und 5.5.

TABELLE 5.2d: *Die 9 einfachen Flächenformen und Punktformen der 32 kristallographischen Punktgruppen mit* ***irrationalen*** *Indizes*

Ordnung	*System der erzeugenden Symmetrie*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*System der Eigen-symmetrie*	*Symmetrie-lage*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*			*PUNKTFORMEN*		
							Name(n)	*Polyeder*	*Figur*	*Name(n)*	*Polyeder*	*Figur*
12	Kubisch	$T \equiv \mathbf{T}$	$I_h \equiv \mathbf{I}\times\mathbf{Z}$	Ikosaeder	**4-2**	VI_2^p	Reguläres Pentagondodekaeder	P	5.18	Reguläres Ikosaeder	P	5.18
16	Tetragonal	$D_{4h} \equiv \mathbf{D}_4\times\mathbf{Z}$	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8\times\mathbf{Z}$	Oktagonal	**4-2-2**	VII	8-Dipyramide	DC_8	5.37	8-Prisma	C_8	
8		$D_{2d} \equiv \mathbf{D}_4\mathbf{D}_2$	$D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$		**4-2-2**	VII_2^{II}	4-Streptoeder	$D\mathcal{D}_4$	5.38	4-Antiprisma	$\mathcal{D}_4$	5.39
8		$C_{4v} \equiv \mathbf{D}_4\mathbf{C}_4$	$C_{8v} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{C}_8$		**4-2-2**	VII_2^h	offene 8-Pyramide	$(D\mathcal{A}_8)$		8-Eck	$(\mathcal{A}_8)$	
8		$C_{4v} \equiv \mathbf{D}_4\mathbf{C}_4$	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8\times\mathbf{Z}$		**2-2**	V	offenes 8-Prisma	$(D\mathcal{A}_8)$		8-Eck	$(\mathcal{A}_8)$	
24	Hexagonal	$D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6\times\mathbf{Z}$	$D_{12h} \equiv \mathbf{D}_{12}\times\mathbf{Z}$	Dodekagonal	**6-2-2**	VII	12-Dipyramide	DC_{12}		12-Prisma	C_{12}	
12		$C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	$C_{12v} \equiv \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_{12}$		**6-2-2**	VII_2^h	offene 12-Pyramide	$(D\mathcal{A}_{12})$		12-Eck	$(\mathcal{A}_{12})$	
12		$C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	$D_{12h} \equiv \mathbf{D}_{12}\times\mathbf{Z}$		**2-2**	V	offenes 12-Prisma	$(D\mathcal{A}_{12})$		12-Eck	$(\mathcal{A}_{12})$	
12		$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	$D_{6d} \equiv \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_6$		**3-2**	VII	6-Streptoeder	$D\mathcal{D}_6$		6-Antiprisma	$\mathcal{D}_6$	

Erläuterungen zu den Tabellen 5.3, 5.4 und 5.5ab

TABELLE 5.3: *Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Kristallsystems.*

TABELLE 5.4: *Einfache Flächen- und Punktformen der tetragonalen, orthorhombischen, monoklinen und triklinen Kristallsysteme.*

TABELLE 5.5a: *Einfache Flächen- und Punktformen des hexagonalen und trigonalen Kristallsystems.*

In diesen Tabellen sind, gegliedert nach den Kristallsystemen, die 47 Klassen von kristallographischen Flächenformen angeführt, zusammen mit der Anzahl Flächen oder der Ordnung, der erzeugenden Kristallklasse oder der erzeugenden Symmetrie, der Eigensymmetrie und dem Lagetypus (siehe dazu Abschnitt 5.1).

Stehen mehrere Namen in einer Zeile (das heißt mit demselben Lagetypus), so handelt es sich um synonyme Bezeichnungen der entsprechenden einfachen Formen. Wenn der Lagetypus keinen Index trägt, so bezieht er sich auf die Holoedrie, das heißt auf die größte Gruppe eines Kristallsystems. Für die Erklärung der Symmetrielage in Tabelle 5.3, siehe Abschnitt 5.1.

Die Kolonne «Polyeder» wird in den Abschnitten 5.5 (für die Tabellen 5.4 und 5.5) und 5.8 (Tabelle 5.3) genauer besprochen. Ein «DA» oder «A» bedeutet, daß beim entsprechenden Lagetyp dualarchimedische bzw. archimedische Polyeder als Spezialfälle vorkommen. Mit «P» wird auf platonische Polyeder verwiesen. Ein «T» vor einer Figurennummer verweist auf eine Tabelle mit der entsprechenden Nummer.

Die im weiteren verwendeten Symbole bedeuten folgendes (Abschnitt 5.1). Mit

$$VII_2^h,\ VII_2^p,\ VII_2^c,\ VII_2^{II}$$

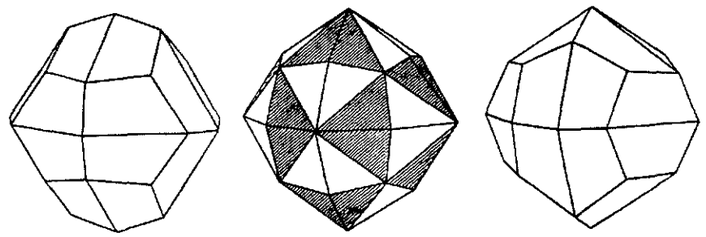
wird der Flächenlagetyp VII bezüglich der hemimorphen, paramorphen, enantiomorphen Hemiedrie bzw. der Hemiedrie II. Art der entsprechenden Holoedrie markiert. Analog bedeuten

$$VII_4,\ VII_4^{II}$$

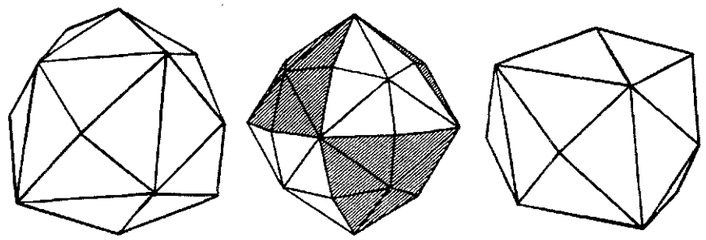
den Flächenlagetyp VII bezüglich der Tetartoedrie bzw. der Tetartoedrie II. Art.

In der Kolonne «Punktformen» sind die den kristallographischen Flächenformen *dual* entsprechenden *Punktformen* angegeben. Für das kubische System sind diese zusammen mit den entsprechenden Flächenformen in **Figur 5.10** abgebildet. Als Punktbahnen von Punkten anstelle von Flächen (Abschnitt 5.1) haben sie dieselbe erzeugende Symmetrie und Eigensymmetrie wie die entsprechenden Flächenformen. Für weitere Erläuterungen siehe die Abschnitte 5.5 und 5.8.

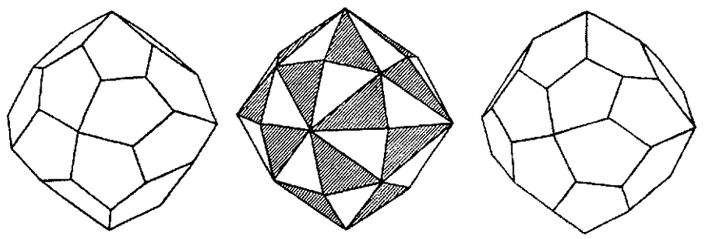
TABELLE 5.5b: *Einfache Punktformen des tetragonalen, hexagonalen und trigonalen Kristallsystems bezüglich aller Lagetypen.* Hier sind die einfachen Punktformen dieser Systeme noch einmal aufgeführt, gegliedert nach ihrem Vorkommen in den jeweiligen Lagetypen.



Figur 5.4: *Paramorphe Hemieder* VII_2^p *(Disdodekaeder) des kubischen Holoeders* VII *(6-Pyramidenoktaeder)*



Figur 5.5: *Hemimorphe Hemieder* VII_2^h *(Hexakistetraeder) des kubischen Holoeders* VII *(6-Pyramidenoktaeder)*



Figur 5.6: *Enantiomorphe Hemieder* VII_2^c *(Pentagonikositetraeder) des kubischen Holoeders* VII *(6-Pyramidenoktaeder)*

Flächenkombinationsformen und Kombinationsarten

Werden die (kristallographischen) Punktformen, falls sie nicht ganz in einer Ebene liegen, als (konvexe) Polyeder aufgefaßt (Abschnitt 5.2), so erweisen sie sich als *Flächenkombinationsformen* von zwei oder drei einfachen kristallographischen Flächenformen. Für das kubische System sind die entsprechenden Flächenkombinationen in Tabelle 5.1 angeführt. Für die übrigen (Kristall-)Systeme siehe die Tabellen 5.14 und 5.15.

Für die Flächenkombinationsformen sind drei *Arten* zu unterscheiden (für weitere Beispiele siehe die **TABELLEN 5.3** und **5.9**):

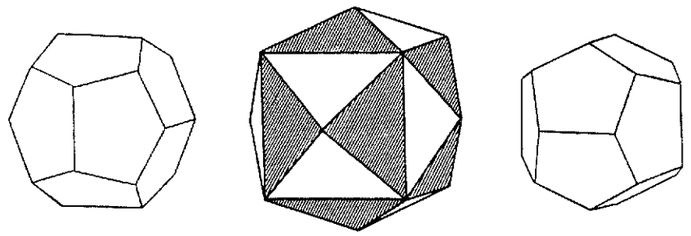
(1) *Abstumpfung* der Ecken und/oder Kanten eines Polyeders durch die Flächen eines anderen Polyeders, wobei die relative Größe der Polyeder unabhängig voneinander variiert werden kann. Diese Art der Flächenkombination wird gekennzeichnet durch den Divisionsstrich /. *Beispiel*: Das Oktaederstumpf ist ein durch ein Hexaeder abgestumpftes Oktaeder, geschrieben II / I.

(2) Ist die relative Größe der flächenkombinierten Polyeder variierbar, aber nicht unabhängig voneinander, so wird die entsprechende Flächenkombinationsart durch ⊕ gekennzeichnet (in den *International Tables*, Hahn/Klapper [1995], wird dies mit & bezeichnet). *Beispiel*: Das Rhombenkuboktaeder entsteht durch eine Abstumpfung der Ecken und Kanten des Hexaeders durch Oktaeder- und Rhombendodekaederflächen. Sobald die noch frei wählbare Abstumpfung des Hexaeders durch ein Oktaeder oder ein Rhombendodekaeder vollzogen ist, ist die weitere Abstumpfung durch das dritte Polyeder eindeutig festgelegt. Das so entstehende Polyeder wird gekennzeichnet durch I ⊕ II ⊕ III.

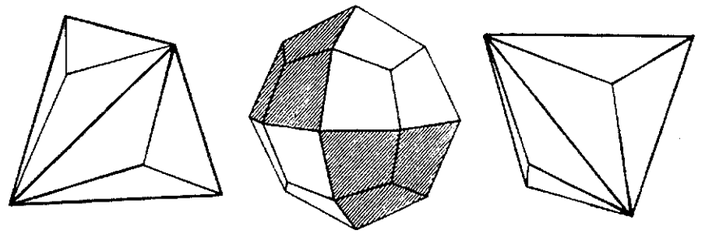
(3) Falls die relative Größe der flächenkombinierten Polyeder überhaupt nicht variierbar, also fix ist, so wird die entsprechende Flächenkombinationsart mit + gekennzeichnet. *Beispiel*: Das Kuboktaeder ist ein durch ein Oktaeder bis genau in die Kantenmitten abgestumpftes Hexaeder, geschrieben I + II.

Vollformen oder Holoeder

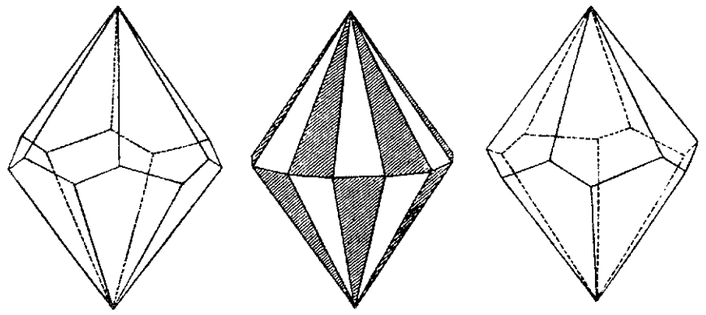
In der Kristallographie werden noch einige zusätzliche Begriffe zur Klassifizierung der möglichen Flächenformen eingeführt, auf die kurz eingegangen werden soll. Die *allgemeinen Formen* oder *Vollformen (Holoeder)* sind die {*hkl*}-Formen des Flächenlagetyps VII und damit vollständige Darstellungen der kristallographischen Punktgruppen, die keine Flächensymmetrien aufweisen, also asymmetrische Polygone als Flächen haben.



Figur 5.7a: *Paramorphe Hemieder* VI_2^p *(irreguläres Pentagondodekaeder) = Tetartoeder* VI_4 *des kubischen Holoeders* VI *(4-Pyramidenhexaeder)*



Figur 5.7b: *Hemimorphe Hemieder* V_2^h *(3-Pyramidentetraeder) = Tetartoeder* V_4 *des kubischen Holoeders* V *(Deltoid-24flächner)*



Figur 5.8: *Enantiomorphe Hemieder* VII_2^e *(hexagonale Trapezoeder) des hexagonalen Holoeders* VII *(dihexagonale Dipyramide*

Alle übrigen Formen mit den Flächenlagetypen I, II, III, IV, V und VI werden *spezielle Formen* genannt. Diese sind unvollständige Darstellungen der kristallographischen Punktgruppen, denn einige Symmetrieoperationen ihrer Eigensymmetrien tranformieren gewisse Flächen in sich, und folglich erhalten diese Flächen eine Eigensymmetrie. Also ist die erzeugende Symmetrie einer speziellen Flächenform eine echte Untergruppe ihrer Eigensymmetrie.

Als Flächensymmetrien können auftreten: 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehachsen und/oder 1, 2, 3, 4 und 6 Symmetrieachsen. So wird etwa eine Seitenfläche des Würfels als {100}-Form mit Flächenlagetypus I in der kubischen Holoedrie (Hexaeder- oder Oktaedergruppe) durch die 4-Achse und die durch diese gehenden 4 Symmetrieebenen in sich übergeführt. Diese Fläche hat also eine 4-zählige Drehsymmetrie und vier Drehachsen, also die Symmetrie der Diedergruppe $D_4 \equiv \mathbf{D_4}$.

Den *invariablen Formentypen* {001}, {010}, {001}, {110}, {111} etc. werden die *einfach variablen Formentypen* {0*kl*}, {*h*0*l*}, {*hk*0} und die *zweifach variablen Formentypen* {*hkl*} gegenübergestellt.

Hemieder und Tetartoeder

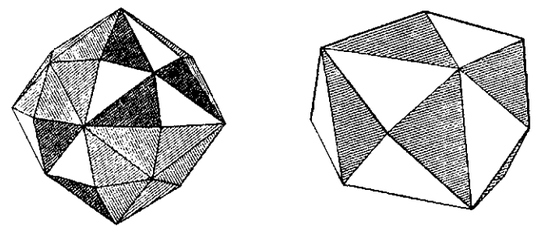
Man unterscheidet weiter bei den kristallographischen Flächenformen neben den schon genannten *Vollformen* oder *Holoeder* auch *Halbformen* oder *Hemieder* und *Viertelsformen* oder *Tetartoeder*. Dies entspricht der Unterscheidung der einfachen {*hkl*}-Flächenformen mit Flächenlagetypus VII in der Holoedrie eines Kristallsystems von den entsprechenden Flächenformen der Untergruppen vom Index 2 (Hemiedrie) und Index 4 (Tetartoedrie) – siehe dazu Abschnitt 4.4 und Tabelle 4.5. Dem gruppentheoretischen Übergang von der Holoedrie zu den Untergruppen vom Index 2 bzw. 4 entspricht die geometrische Operation der *Halbierung* oder *Viertelung* der Anzahl der Flächen.

Bei diesem Übergang entstehen im allgemeinen sogenannte *korrelate Formen*: Ist die Hemiedrie *paramorph* (enthält also die Inversion **Z**), so entstehen kongruente korrelate Formen, die sich nur durch ihre Position im Raum unterscheiden. Solche Formen werden durch «positiv» und «negativ» unterschieden (**Figur 5.4** und **5.7a**). Ist die Hemiedrie *hemimorph* (das heißt zu der oder den höchstzähligen Achsen gibt es keine dazu senkrechte(n) Symmetrieebene(n)), so entstehen ebenfalls kongruente korrelate Formen, die sich nur durch ihre Position im Raum unterscheiden. Sie werden entweder ebenfalls durch «positiv» und «negativ» oder durch «oben» und «unten» unterschieden (**Figur 5.5** und **5.7b**).

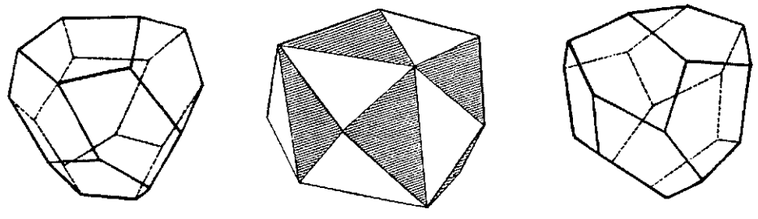
Ist die Hemiedrie *enantiomorph* (enthält also nur Drehungen), so entstehen korrelate Formen, die spiegelbildlich kongruent sind, also durch eine Inversion ineinander übergeführt werden können. Sie werden als «rechts» oder «links» unterschieden (**Figur 5.6** und **5.8**).

Beim Übergang von Holoedern zu Tetartoedern gibt es vier korrelate Formen, die als hemiedrische Hemieder ebenfalls nach «oben» und «unten» bzw. «rechts» und «links» klassifiziert werden können.

Zur Bildung der Tetartoeder geht man in einem ersten Schritt zu irgendeinem der möglichen Hemieder, konstruiert daraus noch einmal hemiedrische Formen und erhält Tetartoeder (die manchmal mit Hemiedern zusammenfallen können). Dies entspricht der gruppentheoretischen Tatsache, daß eine Tetartoedrie eine Untergruppe vom Index 4 in der Holoedrie und zugleich Untergruppe vom Index 2 in gewissen Hemiedrien dieser Holoedrie ist (Figur 4.14a und Tabelle 4.5). Für eine Flächenform der kubischen Holoedrie mit dem Lagetyp VII zeigt **Figur 5.9a** die Bildung eines Tetartoeders als enantiomorphen Hemieder eines hemimorphen Hemieders VII_2^h des Holoeders VII (**Figur 5.5** und **5.6**). In **Figur 5.9b** sind die aus einem der hemimorphen Hemieder VII_2^h ableitbaren Tetartoeder dargestellt.



a: Hemimorpher Hemieder VII_2^h (Hexakistetraeder) des kubischen Holoeders VII (6-Pyramidenoktaeder)



b: Enantiomorphe Hemieder (tetraedrische Pentagondodekaeder) eines hemimorphen Hemiders VII_2^h (Hexakistetraeder) = Tetartoeder VII_4

Figur 5.9: *Ableitung der Tetartoeder des Lagetyps* VII *(tetraedrische Pentagondodekaeder) aus dem kubischen Holoeder* VII *(6-Pyramidenoktaeder) als enantiomorphe Hemieder des hemimorphen Hemieders* VII_2^h *(Hexakistetraeder)*

TABELLE 5.3: *Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Kristallsystems*

SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*Symmetrie-lage*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*			*PUNKTFORMEN*			
						Name(n)	*Polyeder*	*Figur*	*Name(n)*	*Polyeder*	*Figur*	*Flächenkombination*
KUBISCH	48	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**4-3-2**	VII	6-Pyramidenoktaeder, Hexakisoktaeder	DA	5.10	Kuboktaederstumpf	A	5.10	(I + II) / III
	24	$T_d \equiv \mathbf{OT}$	$T_d \equiv \mathbf{OT}$	**4-3-2**	VII_2^h	Hexakistetraeder		5.10	Irreguläres abgestumpftes Oktaeder		5.10	$I / (II_2^h / II_2^h)$
	24	$O \equiv \mathbf{O}$	$O \equiv \mathbf{O}$	**4-3-2**	VII_2^c	Pentagon-24flächner, Pentagonikositetraeder, Pentagontrioktaeder, Gyroid, Gyroeder	DA	5.10	Abgeschrägtes Hexaeder, Cubus simus	A	5.10	$I + II + VII_2^c$
	24	$T_h \equiv \mathbf{T}\times\mathbf{Z}$	$T_h \equiv \mathbf{T}\times\mathbf{Z}$	**4-3-2**	VII_2^p	Disdodekaeder, Dyakisdodekaeder		5.10	Irreguläres Rhombenkuboktaeder		5.10	$I \oplus II \oplus VII_2^p$
	24	$O \equiv \mathbf{O}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**4-3**	IV	Deltoid-24flächner, Deltoidikositetraeder, Trapezoeder, Ikositetraeder	DA	5.10	Rhombenkuboktaeder	A	5.10	$I \oplus II \oplus III$
	24	$O \equiv \mathbf{O}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**3-2**	V	3-Pyramidenoktaeder, Trisoktaeder, Triakisoktaeder, Trigontrioktaeder	DA	5.10	Hexaederstumpf	A	5.10	I / II
	24	$O \equiv \mathbf{O}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**4-2**	VI	4-Pyramidenhexaeder, Tetrakishexaeder	DA	5.10	Oktaederstumpf	A	5.10	II / I
	12	$T \equiv \mathbf{T}$	$T_d \equiv \mathbf{OT}$	**4-3**	IV_2^h	3-Pyramidentetraeder, Tristetraeder, Triakistetraeder, Trigondodekaeder	DA	5.10	Tetraederstumpf	A	5.10	II_2^h / II_2^h
	12	$T \equiv \mathbf{T}$	$T_d \equiv \mathbf{OT}$	**3-2**	V_2^h	Deltoiddodekaeder		5.10	Irreguläres Kuboktaeder		5.10	$I \oplus II_2^h \oplus II_2^h$
	12	$T \equiv \mathbf{T}$	$T_h \equiv \mathbf{T}\times\mathbf{Z}$	**4-2**	VI_2^p	Irreguläres Pentagondodekaeder, Dihexaeder, Pyritoeder		5.10	Irreguläres Ikosaeder		5.10	$II + VI_2^p$
	12	$T \equiv \mathbf{T}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**2**	III	Rhomben-12flächner, Rhombendodekaeder	DA	5.10	Kuboktaeder	A	5.10	I + II
	12	$T \equiv \mathbf{T}$	$T \equiv \mathbf{T}$	**4-3-2**	VII_4	Tetraedrisches Pentagondodekaeder, Tetartoid		5.10	Abgeschrägtes Tetraeder		5.10	$II_2^h + II_2^h + VII_4$
	8	$T_h \equiv \mathbf{T}\times\mathbf{Z}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**3**	II	Oktaeder	P	5.10	Hexaeder	P	5.10	I
	6	$T \equiv \mathbf{T}$	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**4**	I	Hexaeder, Würfel	P	5.10	Oktaeder	P	5.10	II
	4	$T \equiv \mathbf{T}$	$T_d \equiv \mathbf{OT}$	**3**	II_2^h	Tetraeder	P	T5.1	Tetraeder	P	T5.1	II_2^h

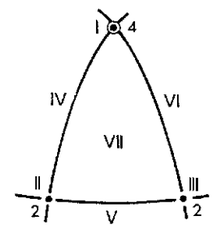
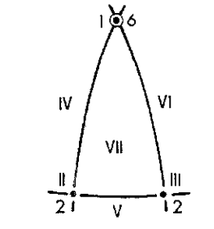
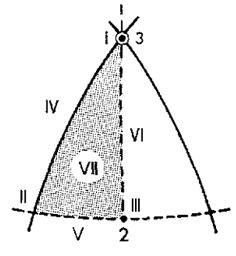
TABELLE 5.4: *Einfache Flächen- und Punktformen der tetragonalen, orthorhombischen, monoklinen und triklinen Kristallsysteme*

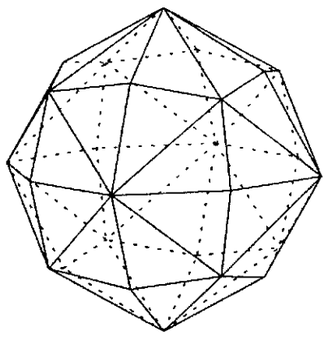
SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*			*PUNKTFORMEN*	
					Name(n)	*Polyeder*	*Figur*	*Name(n)*	*Polyeder*
TETRA-GONAL	16	$D_{4h} \equiv \mathbf{D_4}\times\mathbf{Z}$	$D_{4h} \equiv \mathbf{D_4}\times\mathbf{Z}$	VII	ditetragonale Dipyramide, di-4-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_4$	T5.2a	di-4-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_4$
	8	$D_{2d} \equiv \mathbf{D_4D_2}$	$D_{2d} \equiv \mathbf{D_4D_2}$	VII_2^{II}	tetragonales Skalenoeder, 2-Skalenoeder	$D\mathcal{G}_2$	T5.2a	abgeschnittenes 2-Antiprisma	$\mathcal{G}_2$
	8	$C_{4v} \equiv \mathbf{D_4C_4}$	$C_{4v} \equiv \mathbf{D_4C_4}$	VII_2^{II}	ditetragonale offene Pyramide	$(D\mathcal{B}_4)$	T5.2a	di-Viereck	$(\mathcal{B}_4)$
	8	$D_4 \equiv \mathbf{D_4}$	$D_4 \equiv \mathbf{D_4}$	VII_2^{e}	tetragonales Trapezoeder, 4-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_4$	T5.2a	schiefes 4-Antiprisma	$\mathcal{E}_4$
	8	$C_{4h} \equiv \mathbf{C_4}\times\mathbf{Z}$	$D_{4h} \equiv \mathbf{D_4}\times\mathbf{Z}$	VII_2^{p}	tetragonale Dipyramide, 4-Dipyramide	$D\mathcal{C}_4$	T5.2a	4-Prisma	$\mathcal{C}_4$
	8	$C_{4v} \equiv \mathbf{D_4C_4}$	$D_{4h} \equiv \mathbf{D_4}\times\mathbf{Z}$	V	ditetragonales offenes Prisma	$(D\mathcal{B}_4)$	T5.2a	di-Viereck in O	$(\mathcal{B}_4)$
	4	$S_4 \equiv \mathbf{C_4C_2}$	$D_{2d} \equiv \mathbf{D_4D_2}$	VII_4^{II}	2-Streptoeder, tetragonales Disphenoid, tetragonales Tetraeder	$D\mathcal{D}_2$	T5.2a	2-Antiprisma, tetragonales Tetraeder	$\mathcal{D}_2$
	4	$C_4 \equiv \mathbf{C_4}$	$C_{4v} \equiv \mathbf{D_4C_4}$	VII_4	tetragonale offene Pyramide	$(D\mathcal{A}_4)$	T5.2a	Quadrat	$(\mathcal{A}_4)$
	4	$C_4 \equiv \mathbf{C_4}$	$D_{4h} \equiv \mathbf{D_4}\times\mathbf{Z}$	V_2^{p}	tetragonales offenes Prisma	$(D\mathcal{A}_4)$	T5.2a	Quadrat in O	$(\mathcal{A}_4)$
ORTHO-RHOMBISCH	8	$D_{2h} \equiv \mathbf{D_2}\times\mathbf{Z}$	$D_{2h} \equiv \mathbf{D_2}\times\mathbf{Z}$	VII	orthorhombische Dipyramide, di-2-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_2$		di-2-Eck-Prisma, Quader	$\mathcal{F}_2$
	4	$C_{2v} \equiv \mathbf{D_2C_2}$	$C_{2v} \equiv \mathbf{D_2C_2}$	VII_2^{h}	orthorhombische offene Pyramide	$(D\mathcal{B}_2)$		Rechteck	$(\mathcal{B}_2)$
	4	$D_2 \equiv \mathbf{D_2}$	$D_2 \equiv \mathbf{D_2}$	VII_2^{s}	2-Trapezoeder, orthorhombisches Disphenoid, orthorhombisches Tetraeder	$D\mathcal{E}_2$		schiefes 2-Antiprisma, orthorhombisches Disphenoid, Trapezoeder	$\mathcal{E}_2$
	4	$C_{2h} \equiv \mathbf{C_2}\times\mathbf{Z}$	$D_{2h} \equiv \mathbf{D_2}\times\mathbf{Z}$	V	orthorhombisches offenes Prisma	$(D\mathcal{B}_2)$		Rechteck in O	$(\mathcal{B}_2)$
MONOKLIN	2	$C_{1h} \equiv \mathbf{C_2C_1}$	$C_{2v} \equiv \mathbf{D_2C_2}$	VII_2	Doma, Sphenoid, Dieder, Zweiflächner	$(D\mathcal{A}_2)$		Zweieck	$(\mathcal{A}_2)$
TRIKLIN	2	$S_2 \equiv \mathbf{C_1}\times\mathbf{Z}$		VII	Pinakoid, Paralleloeder, Paralleler Zweiflächner	$(D\mathcal{A}_2)$		Zweieck	$(\mathcal{A}_2)$
	1	$C_1 \equiv \mathbf{C_1}$		VII_2	Pedion, Monoeder, Einflächner	$(D\mathcal{A}_2)$		Eineck, Punkt	$(\mathcal{A}_1)$

TABELLE 5.5a: *Einfache Flächen- und Punktformen des hexagonalen und trigonalen Kristallsystems*

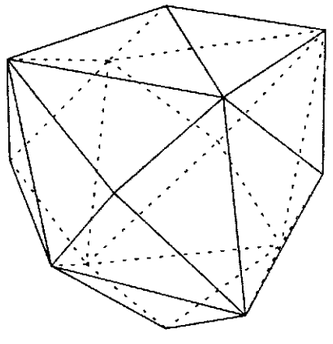
SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*			*PUNKTFORMEN*	
					Name(n)	*Polyeder*	*Figur*	*Name(n)*	*Polyeder*
HEXAGONAL	24	$D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$	$D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$	VII	dihexagonale Dipyramide, di-6-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_6$	T5.2b	dihexagonales Prisma, di-6-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_6$
	12	$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	VII_2^H	ditrigonale Dipyramide, di-3-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_3$	T5.2b	ditrigonales Prisma, di-3-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_3$
	12	$C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	$C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	VII_2^h	dihexagonale offene Pyramide	$(D\mathcal{B}_6)$	T5.2b	di-Sechseck, abgestumpftes 6-Eck	$(\mathcal{B}_6)$
	12	$D_6 \equiv \mathbf{D}_6$	$D_6 \equiv \mathbf{D}_6$	VII_2^e	hexagonales Trapezoeder, 6-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_6$	T5.2b	schiefes 6-Antiprisma	$\mathcal{E}_6$
	12	$C_{6h} \equiv \mathbf{C}_6 \times \mathbf{Z}$	$D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$	VII_2^p	hexagonale Dipyramide, 6-Dipyramide	DC_6	T5.2b	hexagonales Prisma, 6-Prisma	C_6
	12	$C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	$D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$	V	dihexagonales offenes Prisma	$(D\mathcal{B}_6)$	T5.2b	di-Sechseck in O	$(\mathcal{B}_6)$
	6	$C_{3h} \equiv \mathbf{C}_6\mathbf{C}_3$	$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	VII_4^H	trigonale Dipyramide, 3-Dipyramide	DC_3	T5.2b	trigonales Prisma, 3-Prisma	C_3
	6	$C_6 \equiv \mathbf{C}_6$	$C_{6v} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{C}_6$	VII_4	hexagonale offene Pyramide	$(D\mathcal{A}_6)$	T5.2b	Sechseck	$(\mathcal{A}_6)$
	6	$C_6 \equiv \mathbf{C}_6$	$D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$	V_2^p	hexagonales offenes Prisma	$(D\mathcal{A}_6)$	T5.2b	Sechseck in O	$(\mathcal{A}_6)$
TRIGONAL	12	$D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$	$D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$	VII	ditrigonales Skalenoeder, hexagonales Skalenoeder, 3-Skalenoeder	$D\mathcal{G}_3$	T5.2c	abgeschnittenes 3-Antiprisma	$\mathcal{G}_3$
	6	$C_{3v} \equiv \mathbf{D}_3\mathbf{C}_3$	$C_{3v} \equiv \mathbf{D}_3\mathbf{C}_3$	VII_2^h	ditrigonale offene Pyramide	$(D\mathcal{B}_3)$	T5.2c	di-Dreieck	$(\mathcal{B}_3)$
	6	$D_3 \equiv \mathbf{D}_3$	$D_3 \equiv \mathbf{D}_3$	VII_2^e	trigonales Trapezoeder, 3-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_3$	T5.2c	schiefes 3-Antiprisma	$\mathcal{E}_3$
	6	$C_{3i} \equiv \mathbf{C}_3 \times \mathbf{Z}$	$D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$	VII_2^p	trigonales Streptoeder, Rhomboeder, 3-Streptoeder	$D\mathcal{D}_3$	T5.2c	3-Antiprisma	$\mathcal{D}_3$
	6	$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	V_2^e	ditrigonales offenes Prisma	$(D\mathcal{B}_3)$	T5.2c	di-Dreieck in O	$(\mathcal{B}_3)$
	3	$C_3 \equiv \mathbf{C}_3$	$C_{3v} \equiv \mathbf{D}_3\mathbf{C}_3$	VII_4	trigonale offene Pyramide	$(D\mathcal{A}_3)$	T5.2c	Dreieck	$(\mathcal{A}_3)$
	3	$C_3 \equiv \mathbf{C}_3$	$D_{3h} \equiv \mathbf{D}_6\mathbf{D}_3$	V_4	trigonales offenes Prisma	$(D\mathcal{A}_3)$	T5.2c	Dreieck in O	$(\mathcal{A}_3)$

TABELLE 5.5b: *Einfache Punktformen des tetragonalen, hexagonalen und trigonalen Kristallsystems bezüglich aller Lagetypen*

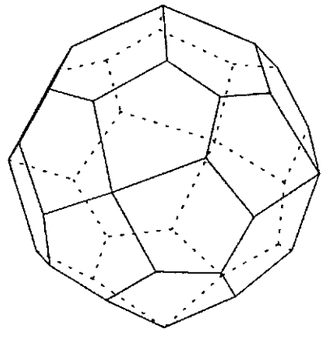
			Lagetyp								*Lagetypendreieck der Holoedrie*
SYSTEM	***Erzeugende Gruppen***		***Punktformen***	**VII**	**IV**	**VI**	**V**	**II**	**III**	**I**	
4 = 4·1	**4/m mm**	$D_{4h} \equiv \mathbf{D_4}\times\mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{F}_n$	C_4	C_4	$\mathcal{B}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_2$	
Tetragonal	$\bar{\mathbf{4}}$ **2m**	$D_{2d} \equiv \mathbf{D_4D_2}$	Hemieder II. Art	$\mathcal{G}_2$	C_4	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{B}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	4mm	$C_{4v} \equiv \mathbf{D_4C_4}$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{B}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_1$	
	422	$D_4 \equiv \mathbf{D_4}$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_4$	C_4	C_4	$\mathcal{B}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	4/m	$C_{4h} \equiv \mathbf{C_4}\times\mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	C_4	C_4	C_4	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{4}}$	$S_4 \equiv \mathbf{C_4C_2}$	Tetartoeder II. Art	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	4	$C_4 \equiv \mathbf{C_4}$	Tetartoeder I. Art	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_4$ in O	$\mathcal{A}_1$	
6 = 4·1+2	**6/m mm**	$D_{6h} \equiv \mathbf{D_6}\times\mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{F}_6$	C_6	C_6	$\mathcal{B}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_2$	
Hexagonal	$\bar{\mathbf{6}}$ **2m**	$D_{3h} \equiv \mathbf{D_6D_3}$	Hemieder II. Art	$\mathcal{F}_3$	C_3	C_6	$\mathcal{B}_3$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	6mm	$C_{6v} \equiv \mathbf{D_6C_6}$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_6$	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{B}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_1$	
	622	$D_6 \equiv \mathbf{D_6}$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_6$	C_6	C_6	$\mathcal{B}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	6/m	$C_{6h} \equiv \mathbf{C_6}\times\mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	C_6	C_6	C_6	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{6}}$	$C_{3h} \equiv \mathbf{C_6C_3}$	Tetartoeder II. Art	C_3	C_3	C_3	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	6	$C_6 \equiv \mathbf{C_6}$	Tetartoeder I. Art	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_1$	
3 = 2·1+1	$\bar{\mathbf{3}}$ **2/m**	$D_{3d} \equiv \mathbf{D_3}\times\mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{G}_3$	$\mathcal{D}_3$	C_6	$\mathcal{B}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_2$	
Trigonal	**3m**	$C_{3v} \equiv \mathbf{D_3C_3}$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_6$	$\mathcal{B}_3$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_1$	
	32	$D_3 \equiv \mathbf{D_3}$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_3$	$\mathcal{D}_3$	C_3	$\mathcal{B}_3$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{3}}$	$C_{3i} \equiv \mathbf{C_3}\times\mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_6$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	3	$C_3 \equiv \mathbf{C_3}$	Tetartoeder	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_3$ in O	$\mathcal{A}_1$	



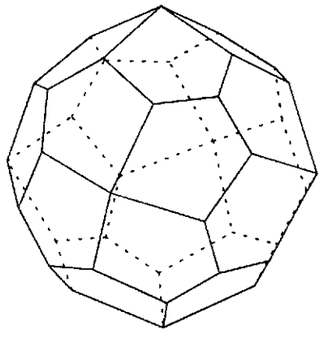
6-Pyramidenoktaeder (VII)

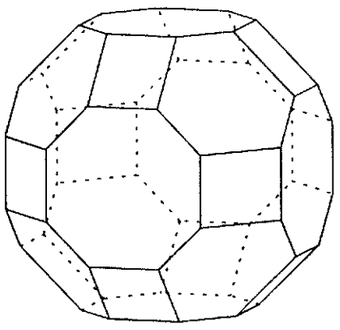


Hexakistetraeder (VII_2^h)

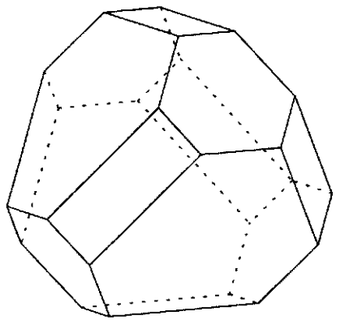


Enantiomorphe Pentagon-24flächner (VII_2^c)

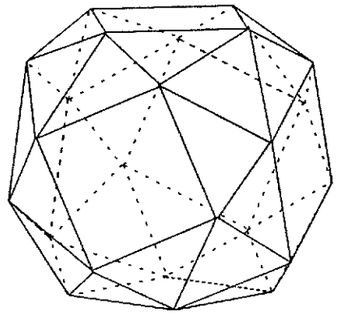


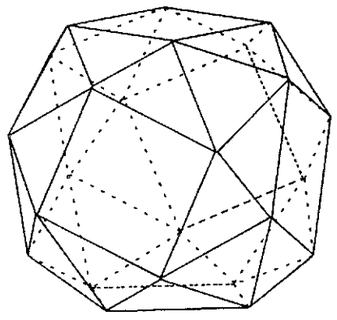


Kuboktaederstumpf



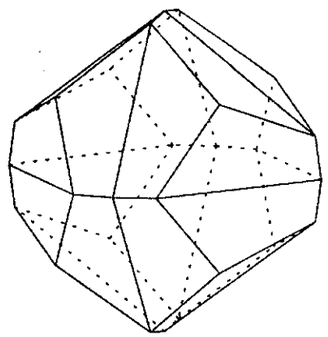
Irreguläres abgestumpftes Oktaeder



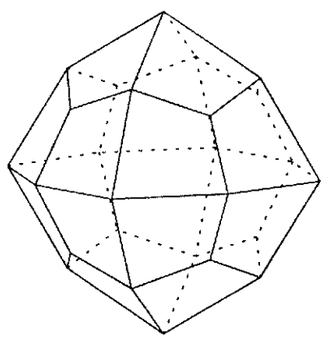


Enantiomorphe abgeschrägte Hexaeder

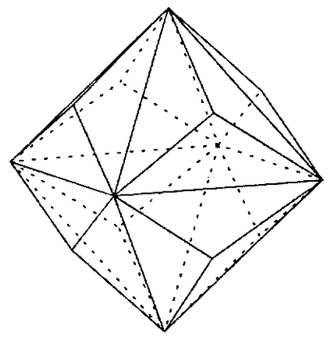
Figur 5.10: *Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Systems*



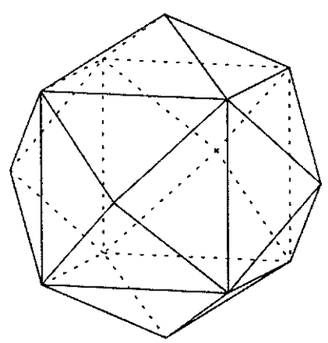
Disdodekaeder (VII_2^p)



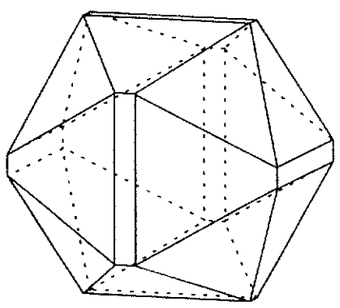
Deltoid-24flächner (IV)



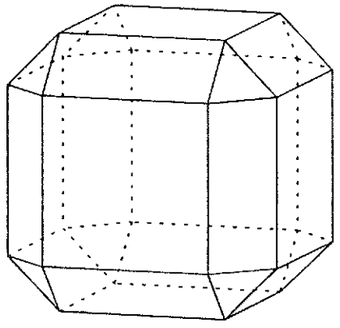
3-Pyramidenoktaeder (V)



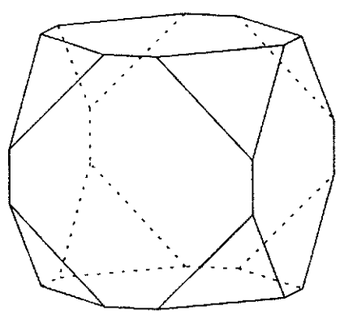
4-Pyramidenhexaeder (VI)



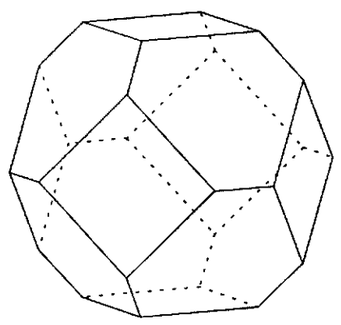
Irreguläres Rhombenkuboktaeder



Rhombenkuboktaeder

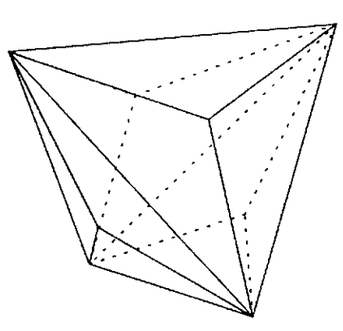


Hexaederstumpf

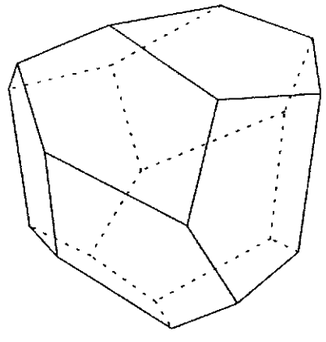


Oktaederstumpf

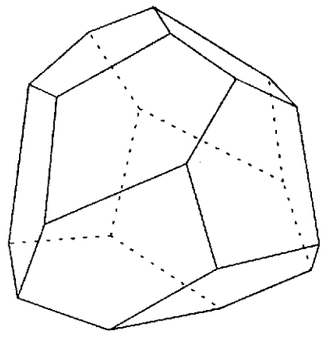
Figur 5.10 (Fortsetzung): *Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Systems*

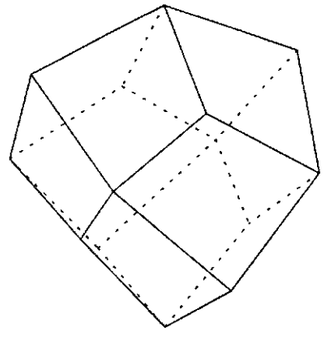


3-Pyramidentetraeder (IV_2^h)

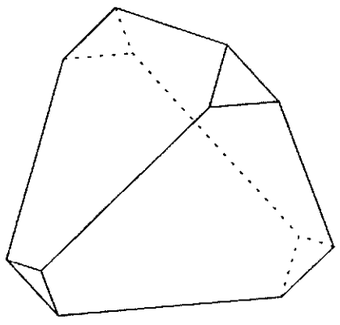


Enantiomorphe tetraedrische Pentagondodekaeder (VII_4)

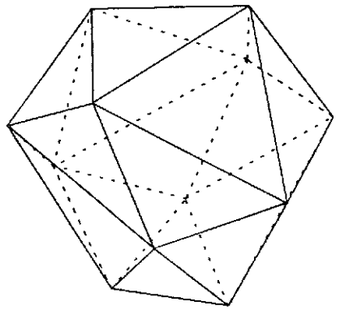




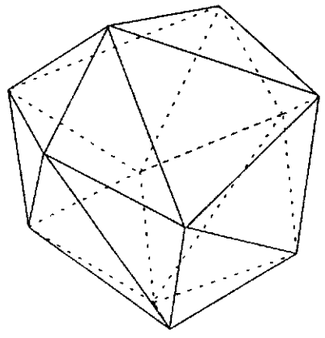
Deltoiddodekaeder (V_2^b)

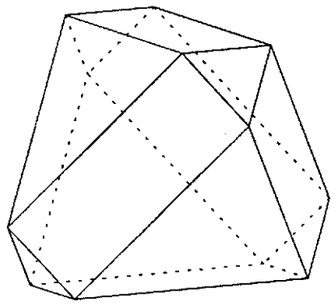


Tetraederstumpf



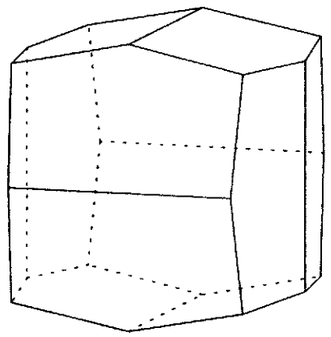
Enantiomorphe abgeschrägte Tetraeder



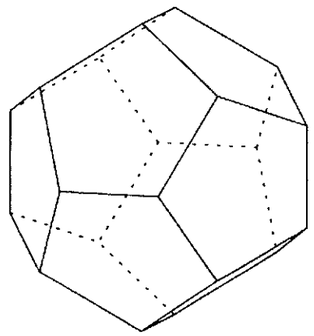


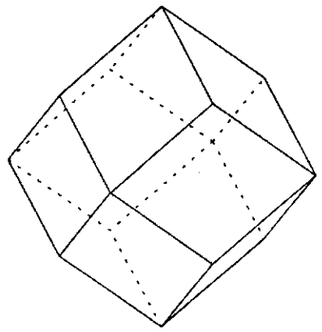
Irreguläres Kuboktaeder

Figur 5.10 (Fortsetzung): *Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Systems*

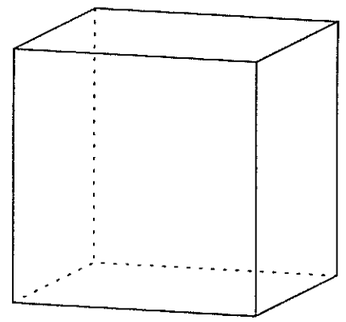


Irreguläre Pentagondodekaeder (VI_2^p)

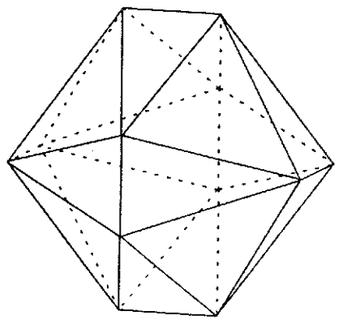




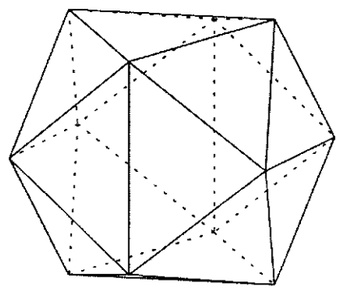
Rhomben-12flächner (III)

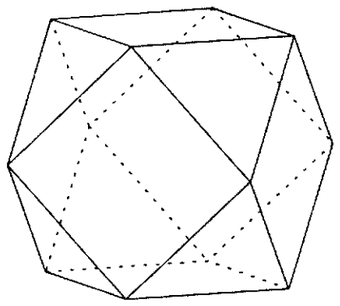


Hexaeder (I)

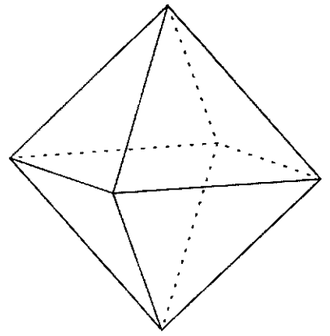


Irreguläre Ikosaeder





Kuboktaeder



Oktaeder

Figur 5.10 (Fortsetzung): *Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Systems*

5.4 *Symmetrische Polyeder der Ikosaedergruppe*

Die Symmetriegruppen des Ikosaeders

Die Gruppen der Symmetrien eines Ikosaeders und deren Untergruppen sowie die von diesen erzeugten symmetrischen Polyeder und allgemeinen Flächen- und Punktformen werden im folgenden analog zu den kristallographischen Punktgruppen dargestellt. Eine entsprechende Diskussion der übrigen nichtkristallographischen Punktgruppen und der durch diese induzierten Flächen- und Punktformen erfolgt im Abschnitt 5.5.

Die «*Ikosaederfamilie*» setzt sich zusammen aus dem *Ikosaedersystem* und dem *pentagonalen System*. Das *Ikosaedersystem* enthält die volle Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ (Holoedrie) sowie die Untergruppe $I \equiv \mathrm{I}$ vom Index 2 in $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$, die nur aus den Drehoperationen von $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ besteht (Hemiedrie).

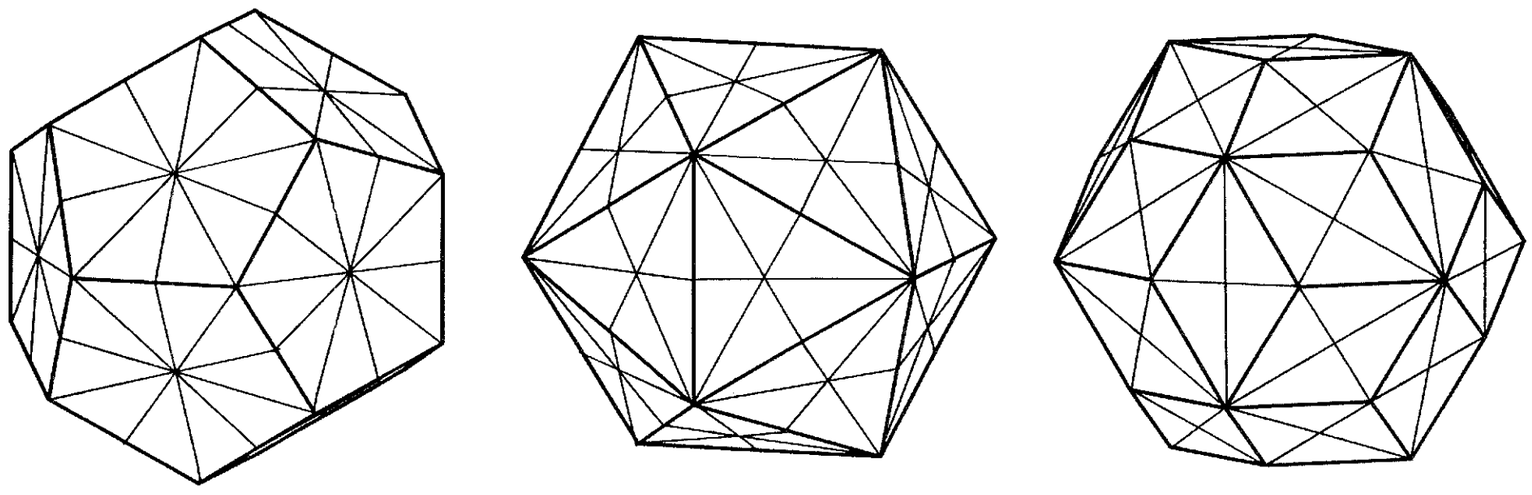
Das *pentagonale System* besitzt als größte Gruppe (Holoedrie) die Untergruppe $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$ vom Index 5 der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ (**TABELLE 5.6**).

Die übrigen Gruppen des pentagonalen Systems sind diejenigen Untergruppen von $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$, die zu keinem anderen (Kristall-)System gehören. (Das pentagonale System hat eine zum trigonalen System analoge Struktur; siehe dazu Abschnitt 5.5.)

Die graphische Darstellung aller Untergruppenbeziehungen der vollen Ikosaedergruppe, inklusive derjenigen Gruppen, die auch anderen Systemen angehören, findet sich in **Figur 5.12**. Dort sind neben dem Ikosaedersystem und dem pentagonalen System auch die anderen beteiligten Kristallsysteme hervorgehoben, analog wie in Figur 4.14a. Am linken und rechten Rand der Figur stehen die Ordnungen der entsprechenden Gruppen.

Die volle Ikosaedergruppe ist gleich der vollen Symmetriegruppe (Eigensymmetrie) eines regulären Ikosaeders, Pentagondodekaeders oder Rhomben-30flächners. Die Symmetrieebenen sind in **Figur 5.11** dargestellt und die dazugehörigen stereographischen Projektionen in **Figur 5.13**. Das Symmetriegerüst der Holoedrie des pentagonalen Systems zeigt Figur 4.7.

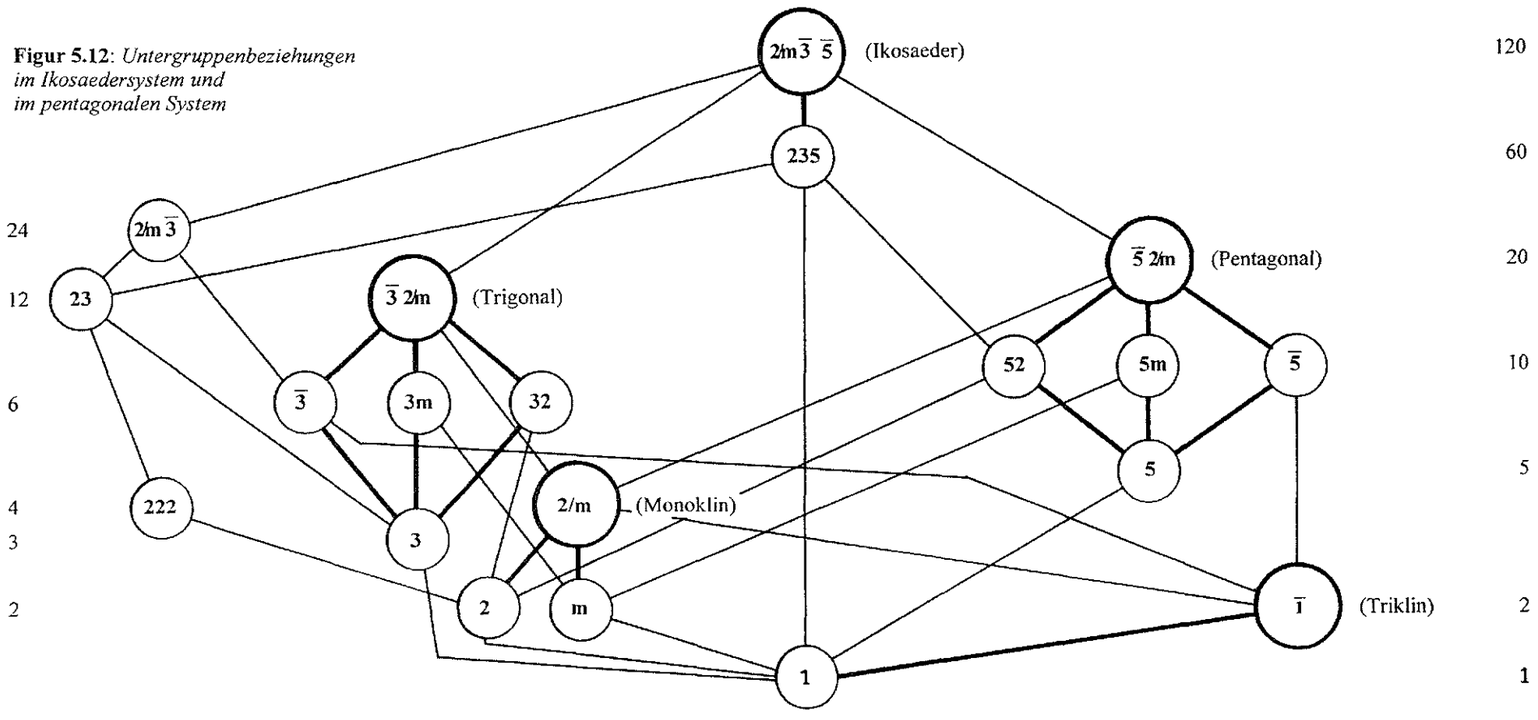
TABELLE 5.6: *Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems*. Die Symmetrieelemente dieser Gruppen sind analog zu **TABELLE 4.4** dargestellt, zusammen mit den verschiedenen Bezeichnungen sowie den dazugehörigen abstrakten Gruppen (siehe Abschnitt 4.2 und **TABELLE 4.2**). Für die Bestimmung der Symmetrieachsenrichtungen siehe weiter unten.



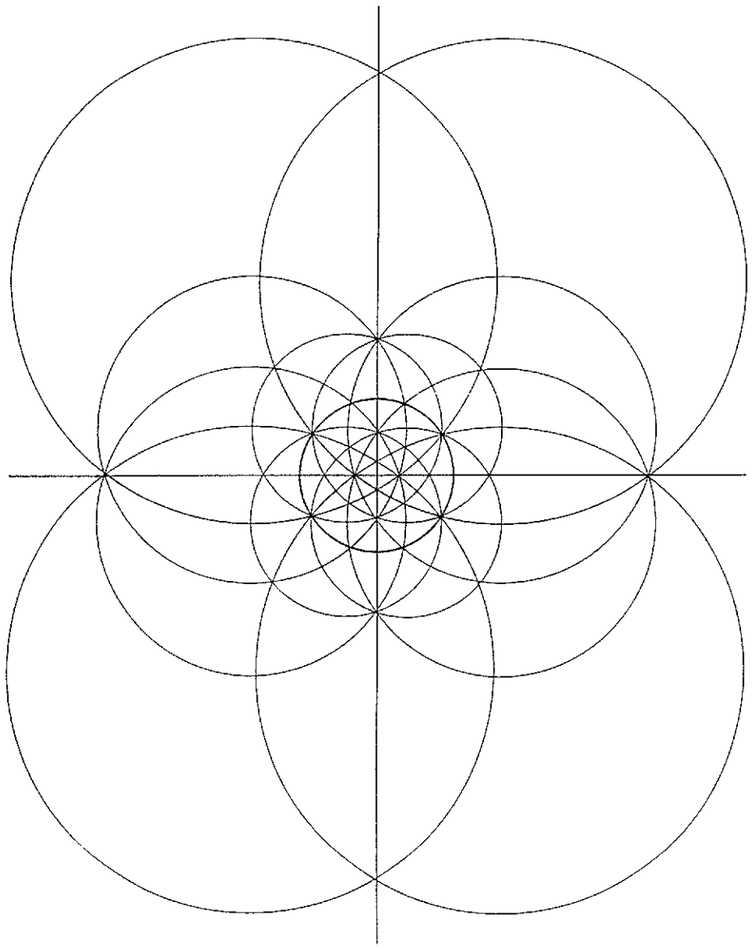
Figur 5.11: *Symmetrieebenen der vollen Ikosaedergruppe in Dodekaederhülle, Ikosaederhülle und in Rhomben-30flächnerhülle*

TABELLE 5.6: *Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems*

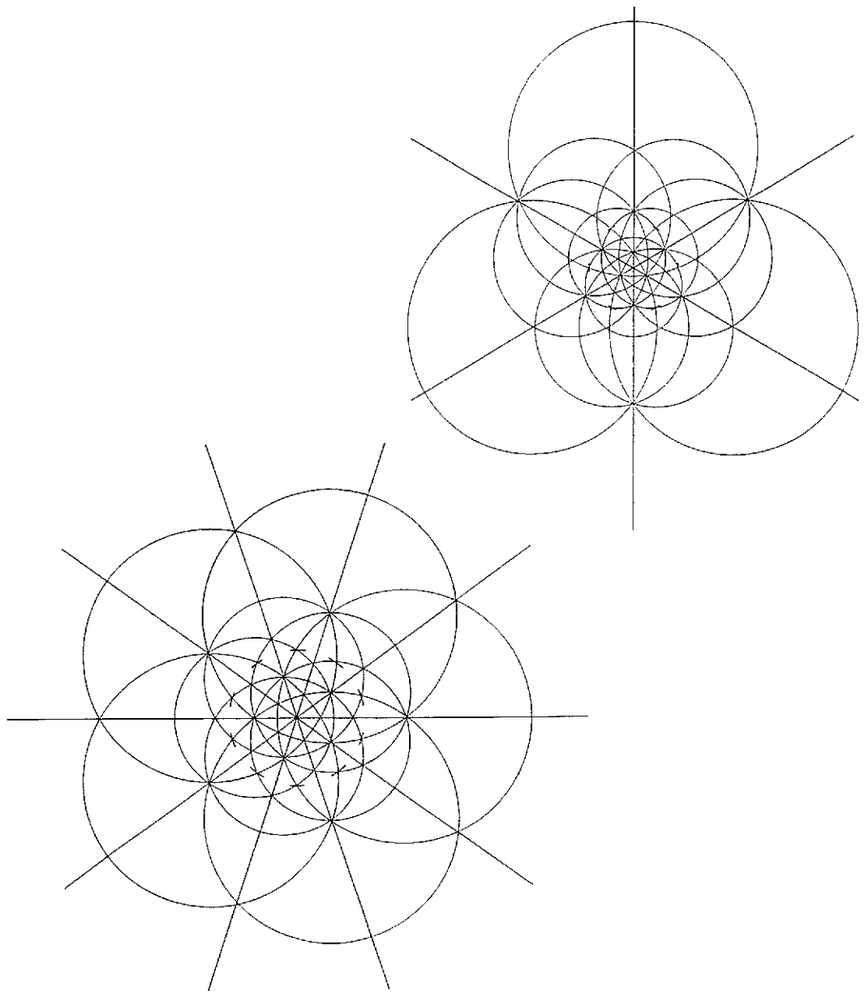
SYSTEM	*Ordnung*	*SYMMETRIEOPERATIONEN UND SYMMETRIEACHSENRICHTUNGEN*				*GRUPPENSYMBOLE*				*Symmetriegerüst: Figur*
		Haupt-achse(n)	*1. Neben-achse(n)*	*2. Neben-achse(n)*	*Typ*	*Coxeter-Weyl*	*Schönflies*	*Hermann-Mauguin*	*Abstrakte Gruppe*	
IKOSAEDER	120	$15 \cdot (2+\mathbf{m})$	$10 \cdot \bar{3}$	$6 \cdot \bar{5}$	Z	$\mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	I_h	$2/m\ \bar{3}\ \bar{5}$	$\mathbf{A}_5 \times \mathbf{Z}$	5.11
	60	$15 \cdot 2$	$10 \cdot 3$	$6 \cdot 5$	e	**I**	I	**235**	$\mathbf{A}_5$	
PENTAGONAL	20	$\bar{5}$	$5 \cdot (2+\mathbf{m})$		Z	$\mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$	D_{5d}	$\bar{5}\,2/m$	$\mathbf{D}_{10}$	4.7
	10	5	$5 \cdot 2_p$		e	$\mathbf{D}_5$	D_5	**52**	$\mathbf{D}_5$	
	10	5_p	$5 \cdot \mathbf{m}$			$\mathbf{D}_5\mathbf{C}_5$	C_{5v}	**5m**	$\mathbf{D}_5$	
	10	$\bar{5}$			Z	$\mathbf{C}_5 \times \mathbf{Z}$	C_{5i}	$\bar{5}$	$\mathbf{C}_{10}$	
	5	5_p			e	$\mathbf{C}_5$	C_5	**5**	$\mathbf{C}_5$	



Figur 5.12: *Untergruppenbeziehungen im Ikosaedersystem und im pentagonalen System*



Stereographische Projektion in Richtung einer 2-Achse



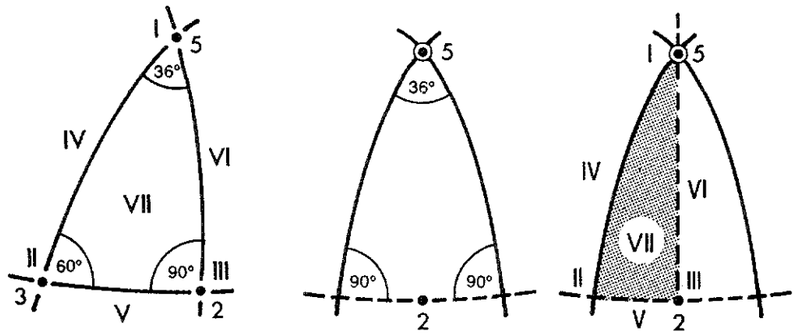
Stereographische Projektionen in Richtung einer 5-Achse und einer 3-Achse

Figur 5.13: *Stereographische Projektionen des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe* $I_h \equiv \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$

Symmetrieachsenrichtungen, Lagetypen, Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems

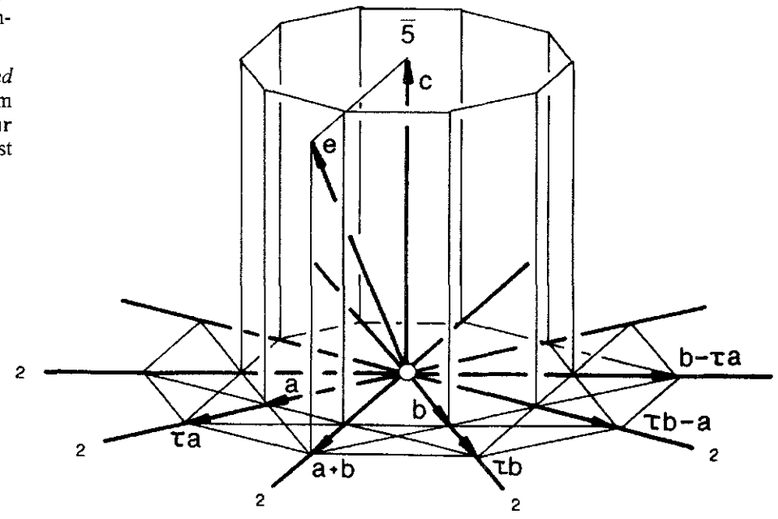
Hier geht es um die für das Ikosaedersystem geeigneten *Koordinatenachsen* in ihrem Verhältnis zu den charakteristischen Symmetrierichtungen oder «Ikosaedersystem-Blickrichtungen». Auf letzteren basieren die Punktgruppensymbole nach Hermann-Mauguin und auf ersteren die Festlegung der Flächenlagetypen durch Indizes. Man beachte, daß die Blickrichtungen, das heißt die Symmetrieachsen der Zähligkeiten 2, 3 und 5, nur bei drei 2-zähligen Achsen mit den Koordinatenrichtungen übereinstimmen.

TABELLE 5.7: *Koordinatenachsen und Symmetrieachsenrichtungen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems*. Die Achsenrichtungen des Koordinatensystems für das Ikosaedersystem werden so gewählt, daß sie einem dem Ikosaeder umschriebenen Hexaeder parallel sind (**Figur 5.16**). Die Achsenrichtungen des pentagonalen Systems richten sich nach dem Symmetriegerüst (**Figur 4.7**) der Holoedrie $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$ dieses Systems (**Figur 5.15**).



a: *Ikosaedersystem* $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ **b**: *Pentagonales System* $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$

Figur 5.14: *Fundamentaldreieck und Lagetypendreieck der Holoedrie (qualitativ)*



Figur 5.15: *Koordinaten- und Symmetrieachsenrichtungen des pentagonalen Systems. Für τ gilt:* $\tau^2 = \tau+1$, $\tau = 1+1/\tau$, $\tau = (\sqrt{5}+1)/2 = 1.618...$

TABELLE 5.7: *Koordinatenachsen und Symmetrieachsenrichtungen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems*

SYSTEM	***Hauptsymmetrie-richtung(en)*** **III**	***1. Nebenrichtung(en)*** **II**	***2. Nebenrichtung(en)*** **I**	***Einheitslängen a, b, c der Richtungen* a, b, c**	***Zwischenwinkel* α, β, γ *der Richtungen* a, b, c**	***Anzahl freie Parameter***	***Koordinaten-gerüst, Figur***
IKOSAEDER	15 Richtungen **a, b, c, ...** mit Periode 2	10 Richtungen **a+b+c**, ... mit Periode 3	6 Richtungen mit Periode 5	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	0	5.16
PENTAGONAL	1 Richtung **c** mit Periode 5	5 Richtungen **a, a+b, b, τb−a, b−τa** mit Periode 2	keine	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 72°$	1	5.15

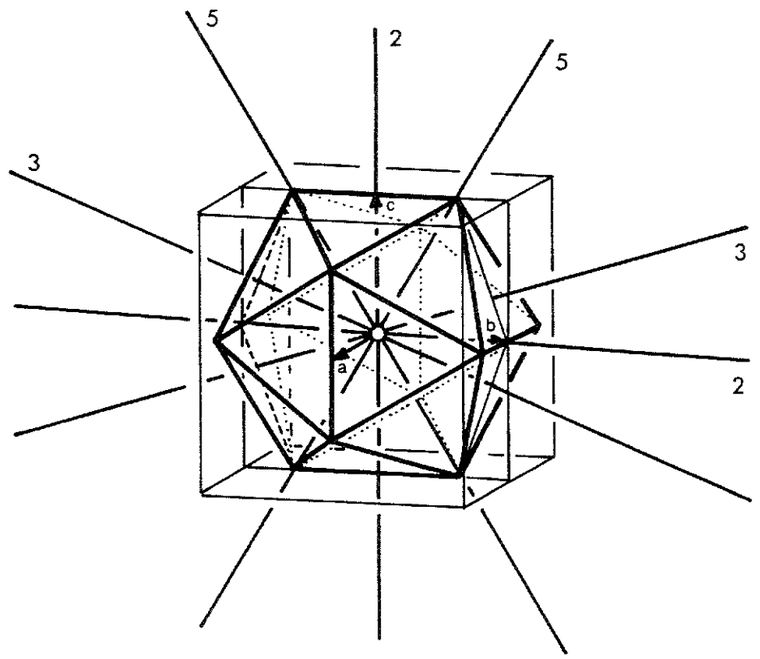
TABELLE 5.8: *Flächenlagetypen des Ikosaedersystems*. Die Flächenlagetypen des Ikosaedersystems werden in dieser Tabelle genauer charakterisiert und in **Figur 5.17** im einzelnen dargestellt.

In **Figur 5.14a** finden sich die entsprechenden Lagetypen auf dem durch einen sphärischen oder ebenen Schnitt des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe (Holoedrie $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$) bestimmten Fundamentaldreieck eingetragen.

Die Flächenlagetypen des pentagonalen Systems in **Figur 5.14b** werden analog zu denjenigen des trigonalen Kristallsystems festgelegt (Abschnitt 5.1): dem pentagonalen Lagetypendreieck liegt ein halbes Fundamentaldreieck der größten Gruppe des pentagonalen Systems, der Holoedrie $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$, zugrunde, da die Bestimmung der Lagetypen bezüglich des vollen Fundamentaldreiecks nicht zu eindeutig voneinander unterschiedenen Formenklassen führt. Dieses Lagetypendreieck fällt im wesentlichen mit demjenigen des dekagonalen Systems zusammen (Abschnitt 5.5).

TABELLE 5.9: *Einfache Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems* (**Figur 5.18, 5.19, 5.20**). Diese Tabelle ist analog aufgebaut wie die Tabellen 5.3 bzw. 5.5a. Im ersteren System kommen, wie im kubischen System, nur Polyeder vor. Im letzteren sind jeweils 3 Polyeder und 4 offene bzw. 4 flache Formen. Für die Bezeichnung dieser Formen siehe die Abschnitte 5.5 und 5.8 und für die Symbole der Flächenkombinationsformen die Erläuterungen im Abschnitt 5.3.

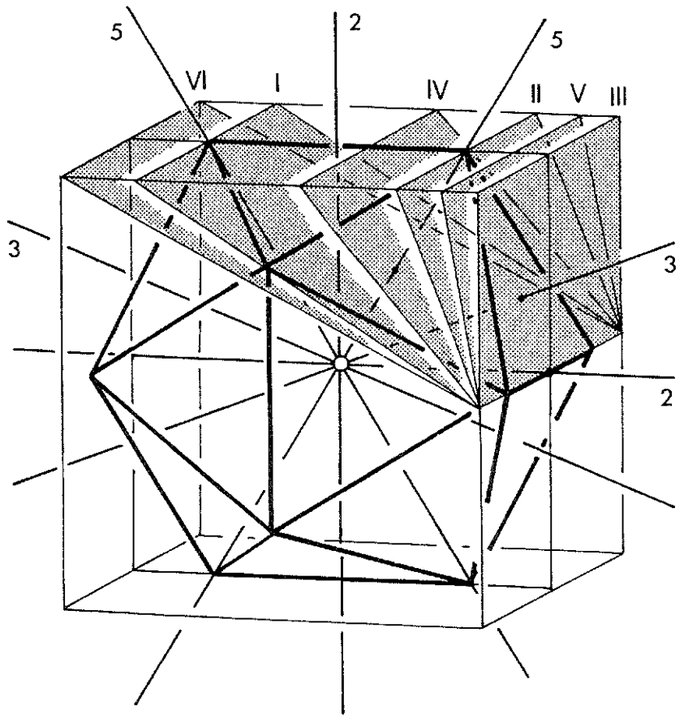
Der einzige Hemieder der einfachen Flächenformen der Ikosaedergruppe ist das pentagonale Hexekontaeder, das durch die enantiomorphe Hemiedrie $I \equiv \mathbf{I}$ (Untergruppe vom Index 2) der Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ erzeugt wird (**Figur 5.19**).



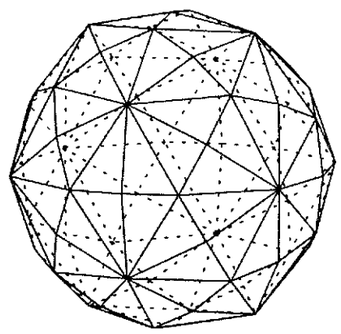
Figur 5.16: *Koordinatenachsen und Symmetrierichtungen des Ikosaedersystems*

TABELLE 5.8: *Flächenlagen des Ikosaedersystems*

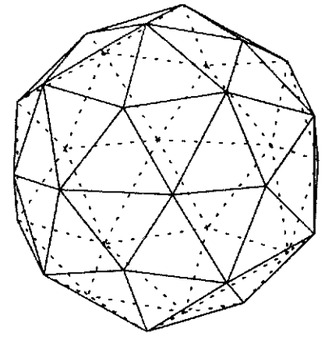
Flächenlage bezüglich Koordinatenachsen-richtungen a, b, c	***Symmetrie-lage***	***Flächenindizes***	***Bedingungen an h, k, l*** $\tau = (\sqrt{5}+1)/2 = 1.618...$	***Lagetyp***	***freie Parameter***	***Figur***
parallel **a, c**	**2**	(010)		III	0	5.17
parallel **a**	**3-2**	(0*kl*)	$\lvert l\rvert < (2-\tau)\lvert k\rvert$	V	1	5.17
parallel **a**	**3**	(01*l*)	$l = 2-\tau$	II	0	5.17
parallel **a**	**5-3**	(0*kl*)	$(2-\tau)\lvert k\rvert < \lvert l\rvert < \tau\lvert k\rvert$	IV	1	5.17
parallel **a**	**5-3**	(011)		IV	1	
parallel **a**	**5**	(01τ)		I	0	5.17
parallel **a**	**5-2**	(0*kl*)	$\lvert l\rvert > \tau\lvert k\rvert$	VI	1	5.17
allgemeine Lage	**5-3-2**	(*hkl*)		VII	2	
parallel **a**	**2**	(001)		III	0	
parallel **b, c**	**2**	(100)		III	0	
senkrecht **a+b+c**	**3**	(111)		II	0	



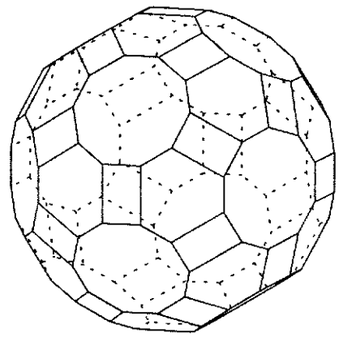
Figur 5.17: *Flächenlagetypen des Ikosaedersystems*



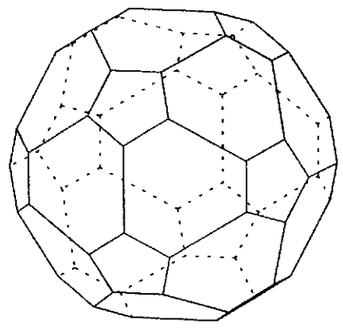
6-Pyramidenikosaeder (VII)



5-Pyramidendodekaeder (VI)

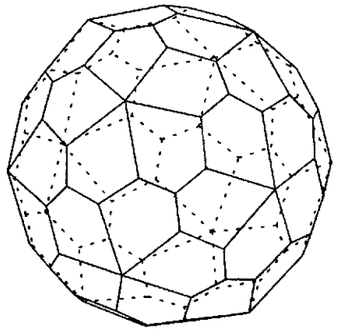


Ikosidodekaederstumpf

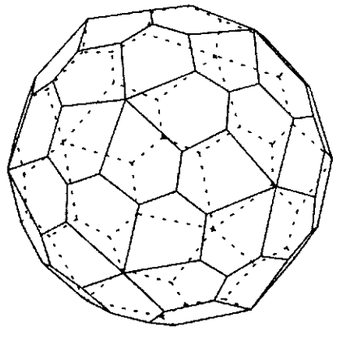


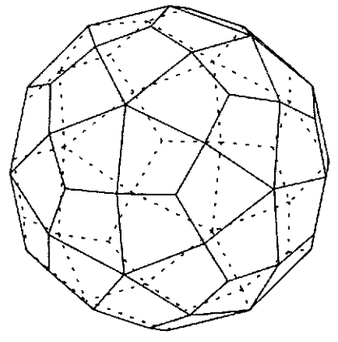
Ikosaederstumpf

Figur 5.18: *Einfache Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems*

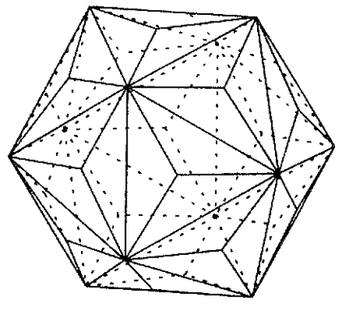


Enantiomorphe Pentagon-60flächner (VII_2^c)

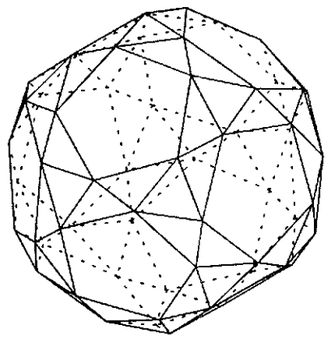




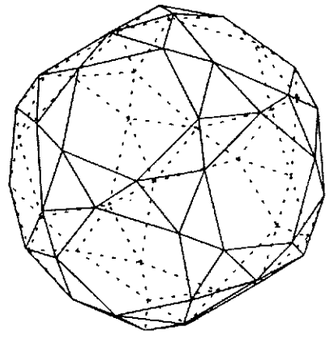
Deltoid-60flächner (IV)

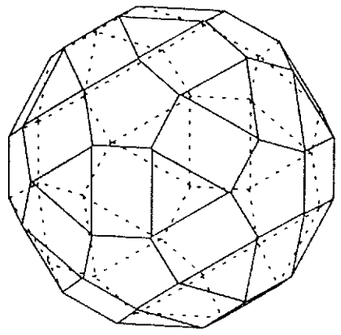


3-Pyramidenikosaeder (V)

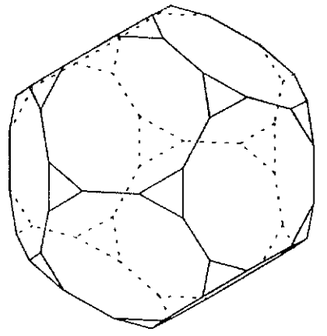


Enantiomorphe abgeschrägte Dodekaeder



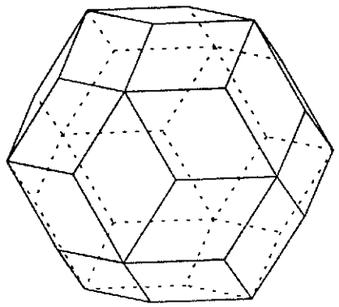


Rhombenikosidodekaeder

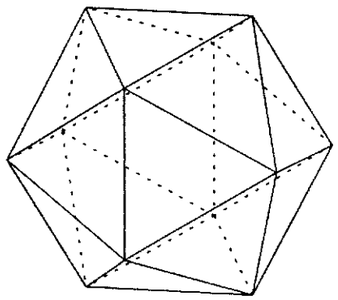


Dodekaederstumpf

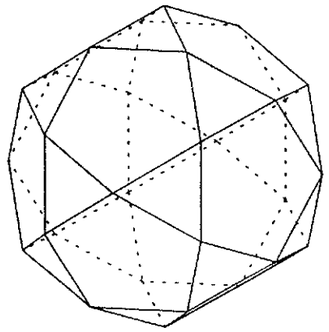
Figur 5.18 (Fortsetzung): *Einfache Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems*



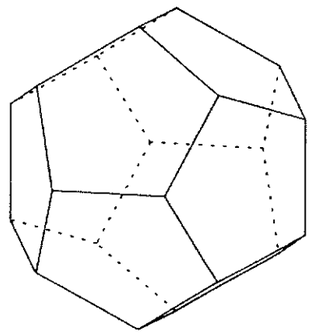
Rhomben-30flächner (III)



Ikosaeder (II)

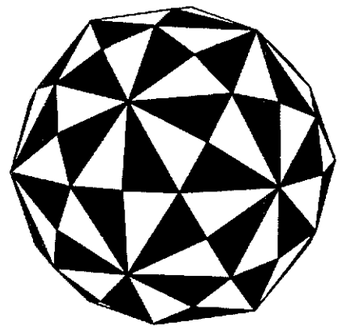


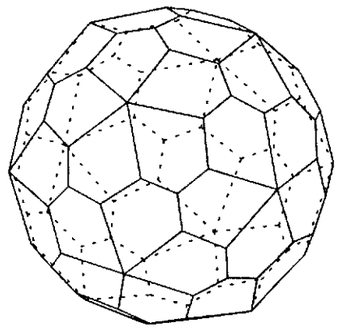
Ikosidodekaeder

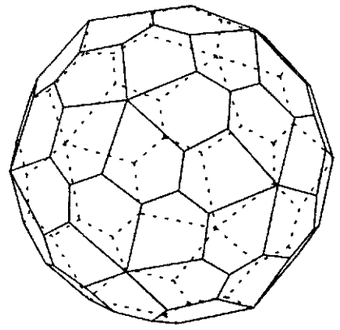


Pentagondodekaeder

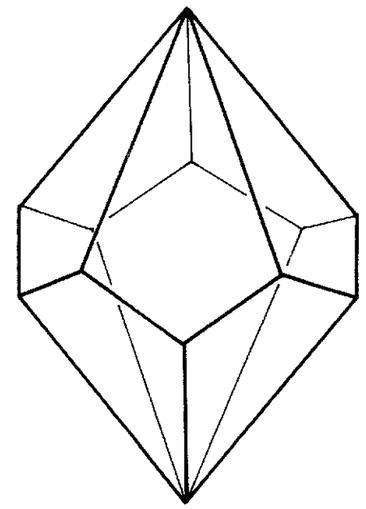
Figur 5.18 (Fortsetzung): *Einfache Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems*



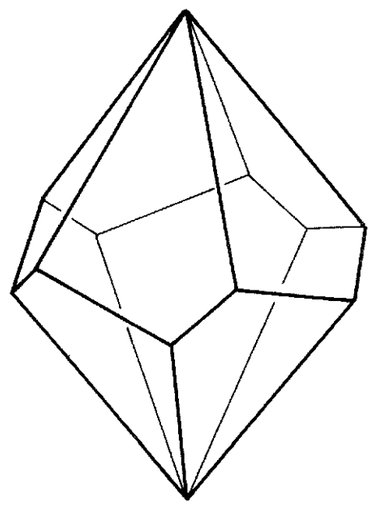




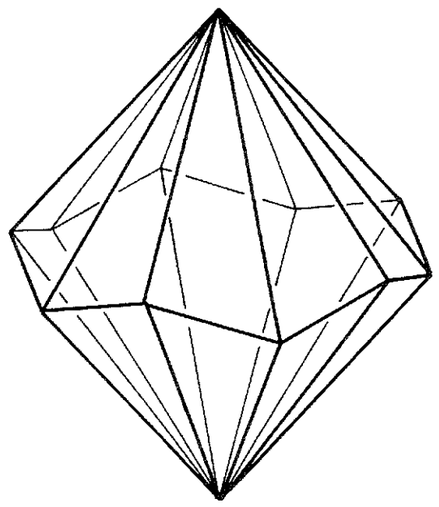
Figur 5.19: *Enantiomorphe Hemieder* VII_2^e *(Pentagon-60flächner) des ikosaedrischen Holoeders vom Lagetyp VII (6-Pyramidenikosaeder)*



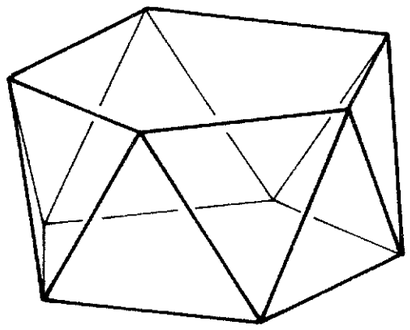
5-Streptoeder ($D\mathcal{D}_5$)



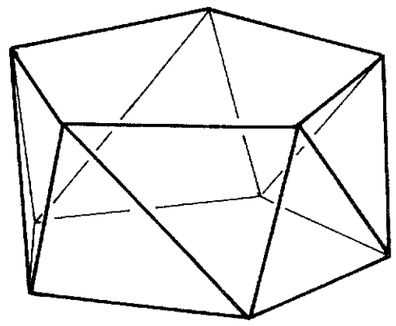
5-Trapezoeder ($D\mathcal{E}_5$)



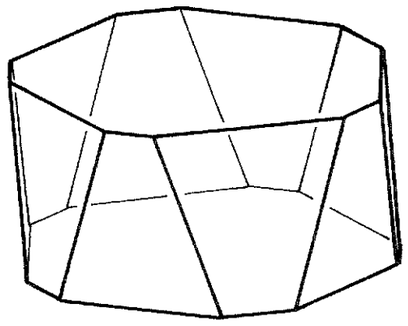
5-Skalenoeder ($D\mathcal{G}_5$)



5-Antiprisma ($\mathcal{D}_5$)



Schiefes 5-Antiprisma ($\mathcal{E}_5$)



Abgeschnittenes 5-Antiprisma ($\mathcal{G}_5$)

Figur 5.20: *Einfache Flächen und Punktformen des pentagonalen Systems*

TABELLE 5.9: *Einfache Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems*

SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*Symmetrie-lage*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*			*PUNKTFORM*			
						Name(n)	*Polyeder*	*Figur*	*Name(n)*	*Polyeder*	*Figur*	*Flächenkombination*
IKOSAEDER	120	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**5-3-2**	VII	6-Pyramidenikosaeder, Hekatonikosaeder, Hexakisikosaeder, Dyakishexekontaeder	DA	5.18	Ikosidodekaederstumpf	A	5.18	(I + II) / III
	60	$I \equiv \mathbf{I}$	$I \equiv \mathbf{I}$	**5-3-2**	VII_2^c	Pentagon-60flächner, Pentagonhexekontaeder	DA	5.18	Abgeschrägtes Dodekaeder, Dodecaedron simum	A	5.18	$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{VII}_2^e$
	60	$I \equiv \mathbf{I}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**5-2**	$\mathrm{VI} \equiv \mathrm{VI}_2^e$	5-Pyramidendodekaeder, Pentakisdodekaeder, Dodekakispentaeder	DA	5.18	Ikosaederstumpf	A	5.18	II / I
	60	$I \equiv \mathbf{I}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**5-3**	$\mathrm{IV} \equiv \mathrm{IV}_2^e$	Deltoid-60flächner, Deltoidhexekontaeder, Hexekontaeder	DA	5.18	Rhomben-ikosidodekaeder	A	5.18	$\mathrm{I} \oplus \mathrm{II} \oplus \mathrm{III}$
	60	$I \equiv \mathbf{I}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**3-2**	$\mathrm{V} \equiv \mathrm{V}_2^e$	3-Pyramidenikosaeder, Ikosakistrieder, Triakisikosaeder, Trisikosaeder	DA	5.18	Dodekaederstumpf	A	5.18	I / II
	30	$I \equiv \mathbf{I}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**2**	$\mathrm{III} \equiv \mathrm{III}_2^c$	Rhomben-30flächner, Rhombentriakontaeder	DA	5.18	Ikosidodekaeder, Triakontagon	A	5.18	I + II
	20	$D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**3**	$\mathrm{II} \equiv \mathrm{II}_2^e$	Ikosaeder	P	5.18	Pentagondodekaeder	P	5.18	I
	12	$I \equiv \mathbf{I}$	$I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$	**5**	$\mathrm{I} \equiv \mathrm{I}_2^e$	Pentagondodekaeder	P	5.18	Ikosaeder	P	5.18	II
PENTAGONAL	20	$D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$	$D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$		VII	dipentagonales Skalenoeder, 5-Skalenoeder	$D\mathcal{G}_5$	5.20	abgeschnittenes 5-Antiprisma	$\mathcal{G}_5$	5.20	VII_2^p / ‖
	10	$C_{5v} \equiv \mathbf{D}_5\mathbf{C}_5$	$C_{5v} \equiv \mathbf{D}_5\mathbf{C}_5$		VII_2^h	dipentagonale offene Pyramide	$(D\mathcal{B}_5)$		di-Fünfeck	$(\mathcal{B}_5)$		
	10	$D_5 \equiv \mathbf{D}_5$	$D_5 \equiv \mathbf{D}_5$		VII_2^e	pentagonales Trapezoeder, 5-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_5$	5.20	schiefes 5-Antiprisma	$\mathcal{E}_5$	5.20	VII_2^e / ‖
	10	$C_{5i} \equiv \mathbf{C}_5 \times \mathbf{Z}$	$D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$		VII_2^p	pentagonales Streptoeder, 5-Streptoeder	$D\mathcal{D}_5$	5.20	5-Antiprisma	$\mathcal{D}_5$	5.20	VII_2^p / ‖
	10	$C_{5v} \equiv \mathbf{D}_5\mathbf{C}_5$	$D_{5h} \equiv \mathbf{D}_{10}\mathbf{D}_5$		V_2^e	dipentagonales offenes Prisma	$(D\mathcal{B}_5)$		di-Fünfeck	$(\mathcal{B}_5)$		
	5	$C_5 \equiv \mathbf{C}_5$	$C_{5v} \equiv \mathbf{D}_5\mathbf{C}_5$		VII_4	pentagonale offene Pyramide	$(D\mathcal{A}_5)$		Fünfeck	$(\mathcal{A}_5)$		
	5	$C_5 \equiv \mathbf{C}_5$	$D_{5h} \equiv \mathbf{D}_{10}\mathbf{D}_5$		II_2^e	pentagonales offenes Prisma	$(D\mathcal{A}_5)$		Fünfeck	$(\mathcal{A}_5)$		

5.5 *Punktgruppenformen der Diedersysteme*

In diesem Abschnitt soll die Übersicht von symmetrischen Punkt- und Flächenformen, insbesondere Punktgruppenpolyeder, abgeschlossen werden, indem die noch fehlenden Formen in den bisherigen Rahmen eingeordnet werden. Es fällt endgültig jede der Kristallographie zugehörige Beschränkung weg, sowohl was die Zähligkeit der möglichen Drehachsen wie auch was die numerische Form der Indizes betrifft.

Die gröbste Einteilung der *Punktgruppen* ist diejenige nach den hier so genannten Symmetrie*gattungen*. Zur *kubischen Gattung* gehören alle Punktgruppen des kubischen Kristallsystems, zur *Ikosaedergattung* alle Punktgruppen des Ikosaedersystems und zur *Diedergattung* alle übrigen Punktgruppen. In den ersten beiden Fällen fällt das System mit der Gattung zusammen.

Die Gruppen der Diedersysteme

Die Diedergattung wird weiter untergliedert in das 4N-gonale, (4N+2)-gonale und das (2N+1)-gonale System (N ≥ 1). Dies sind Verallgemeinerungen des tetragonalen, des hexagonalen bzw. des trigonalen Kristallsystems. Die Untergruppenstruktur der letzteren Systeme (Figur 4.14a) überträgt sich unmittelbar auf die entsprechend verallgemeinerten Diedersysteme (Figur 5.23).

Das orthorhombische System kann als Spezialfall des (4N+2)-gonalen Systems für N = 0 aufgefaßt werden. Es wird jedoch hier separat behandelt, ebenso wie das monokline und das trikline System (siehe dazu Abschnitt 3.4 und 4.4).

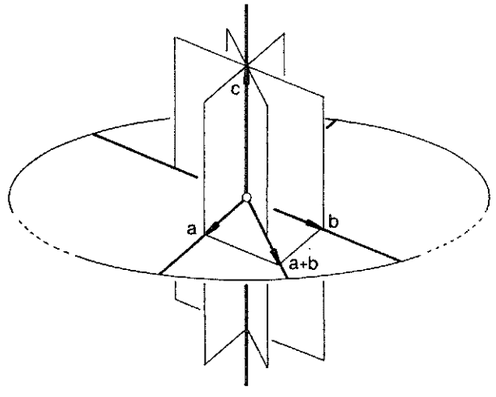
TABELLE 5.10: *Klassifizierung der Punktgruppen nach Symmetriegattungen, Symmetriesystemen und Symmetrieklassen.*

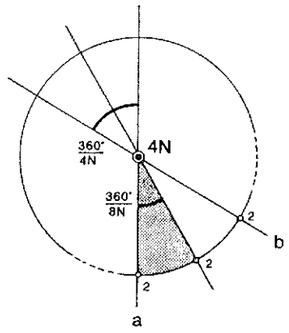
TABELLE 5.11: *Koordinatenachsenrichtungen der Diedersysteme.* Hier sind die zu den Diedersystemen gehörigen Blickrichtungen und Koordinatenachsenrichtungen mit allen notwendigen Einzelheiten aufgelistet und in den **Figuren 5.21**, **5.22a** und **5.22b** dargestellt. Die Tabelle ist analog aufgebaut wie **TABELLE 3.2** und **TABELLE 5.7**.

TABELLE 5.10: *Klassifizierung der Punktgruppen nach Symmetriegattungen, Symmetriesystemen und Symmetrieklassen*

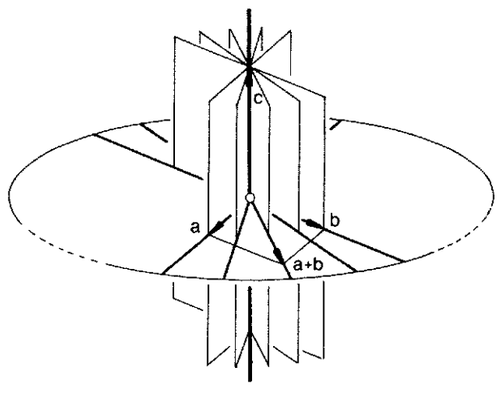
SYMMETRIE-GATTUNG	***Ikosaeder***		***Kubisch***		***Dieder*** *(n ≥ 3 und N ≥ 1)*						
SYSTEM	***Ikosaeder***		***Kubisch***		***n = 4N***		***n = 4N+2***		***n = 2N+1***		***Ordnung***
KLASSEN *Holoedrie*	**2/m $\bar{3}$ $\bar{5}$** **≡ m $\bar{3}$ $\bar{5}$**	$I_h \equiv \mathbf{I}\times\mathbf{Z}$	**m $\bar{3}$ m** **≡ $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$**	$O_h \equiv \mathbf{O}\times\mathbf{Z}$	**n/m mm** **≡ $\frac{n}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$**	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n\times\mathbf{Z}$	**n/m mm** **≡ $\frac{n}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$**	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n\times\mathbf{Z}$	**$\bar{n}$ 2/m** **≡ $\bar{n}$ m**	$D_{nd} \equiv \mathbf{D}_n\times\mathbf{Z}$	$4n$
Hemiedrien II. Art					**$\bar{n}$ 2m**	$D_{½nd} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{½n}$	**$\bar{n}$ 2m ≡ ½n/m 2m**	$D_{½nh} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{½n}$			$2n$
hemimorph			**$\bar{4}$ 3m**	$T_d \equiv \mathbf{OT}$	**nmm**	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	**nmm**	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	**nm**	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	$2n$
enantiomorph	**235**	$I \equiv \mathbf{I}$	**432**	$O \equiv \mathbf{O}$	**n22**	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	**n22**	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	**n2**	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	$2n$
paramorph			**2/m $\bar{3}$**	$T_h \equiv \mathbf{T}\times\mathbf{Z}$	**n/m**	$C_{nh} \equiv \mathbf{C}_n\times\mathbf{Z}$	**n/m**	$C_{nh} \equiv \mathbf{C}_n\times\mathbf{Z}$	**$\bar{n}$ ≡ n×Z**	$C_{ni} \equiv \mathbf{C}_n\times\mathbf{Z}$	$2n$
Tetartoedrien II. Art					**$\bar{n}$**	$S_n \equiv \mathbf{C}_n\mathbf{C}_{½n}$	**$\bar{n}$ ≡ ½n/m**	$C_{½nh} \equiv \mathbf{C}_n\mathbf{C}_{½n}$			n
(I. Art)			**23**	$T \equiv \mathbf{T}$	**n**	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	**n**	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	**n**	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	n

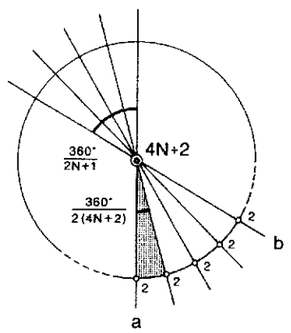
Koordinaten- und Symmetrieachsenrichtungen der Diedersysteme (N ≥ 1) mit stereographischer Projektion des Symmetriegerüstes und Fundamentaldreieck



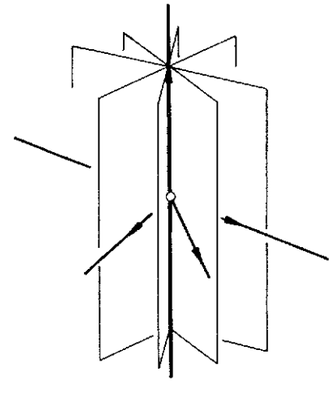


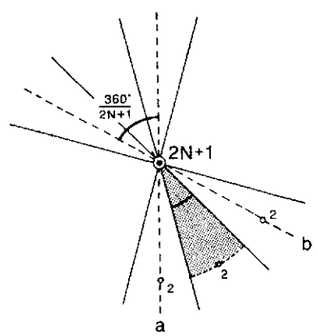
Figur 5.21: *4N-gonales System*



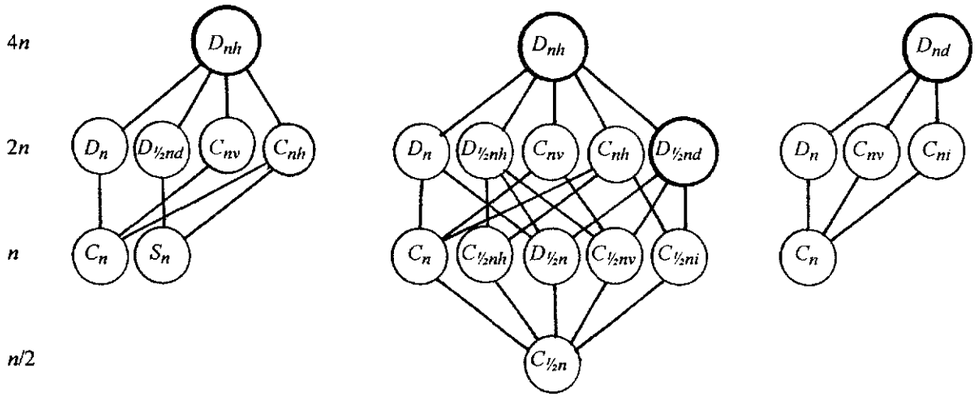


Figur 5.22a: *(4N+2)-gonales System*





Figur 5.22b: *(2N+1)-gonales System*



Ordnung	*n = 4N*	*n = 4N + 2*	*n = 2N + 1*
		½n = 2N + 1	

Figur 5.23: *Untergruppenstruktur der Diedersysteme*

Fundamentaldreieck und Lagetypendreieck

Die Symmetriegerüste der größten Gruppen, das heißt der Holoedrien des 4N-gonalen Systems und des (4N+2)-gonalen Systems für N ≥ 1, legen eindeutig bestimmte Fundamentaldreiecke fest (Figur 5.21 und 5.22a). Bei der größten Gruppe des (2N+1)-gonalen Systems (N ≥ 1) ist dies nicht der Fall, da es hier nur Symmetrieebenen durch die Hauptachse gibt und keine senkrecht dazu. Deshalb muß hier eine durch die zweizähligen Achsen gehende Ebene zu Hilfe genommen werden, um Fundamentaldreiecke festzulegen (Figur 5.22b), analog wie beim trigonalen und pentagonalen System (Abschnitt 4.5 und 5.4).

Dem Lagetypendreieck liegt bei den ersten beiden Systemen, wie beim tetragonalen und hexagonalen System (Tabelle 5.5b), ein ganzes Fundamentaldreieck zugrunde.

Beim (2N+1)-gonalen System liegt dem Lagetypendreieck ein halbes Fundamentaldreieck der entsprechenden Holoedrie zugrunde (Tabelle 5.16). Letzteres ist wieder analog wie beim trigonalen (Abschnitt 5.1, Tabelle 5.5b) und pentagonalen System (Figur 5.14b). Man ersieht aus Tabelle 5.16, daß eine Bestimmung der Lagetypen bezüglich des vollen Fundamentaldreiecks nicht zu eindeutig unterscheidbaren Formenklassen führen würde: insbesondere kämen beim Lagetyp VII verschiedene Punkt- bzw. Flächenformen heraus, je nachdem, ob sich die Punkt- bzw. Flächenlage auf der Verbindungsebene der Hauptachse mit einer zweizähligen Achse befindet oder nicht. Das Lagetypendreieck des (2N+1)-gonalen Systems fällt im wesentlichen mit dem Lagetypendreieck des (4N+2)-gonalen Systems zusammen.

TABELLE 5.11: *Koordinatenachsenrichtungen der Diedersysteme (n ≥ 3 und N ≥ 1)*

SYSTEM	***Hauptsymmetrie-richtung(en)* I**	***1. Nebenrichtung(en)* II**	***2. Nebenrichtung(en)* III**	***Einheitslängen a, b, c***	***Zwischenwinkel*** α, β, γ	***Anzahl freie Parameter***	***Koordinaten-gerüst, Figur***
$n = 4N$	1 Richtung **c** mit Periode 4N	2N Richtungen **a**, **b**, ... mit Periode 2	2N Richtungen **a+b**, ... mit Periode 2	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 360°/4N$	1	5.21
$n = 4N + 2$	1 Richtung **c** mit Periode 4N+2	2N+1 Richtungen **a**, **a+b**, **b**, ... mit Periode 2	2N+1 Richtungen mit Periode 2	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 360°/(2N+1)$	1	5.22a
$n = 2N + 1$	1 Richtung **c** mit Periode 2N+1	2N+1 Richtungen **a**, **a+b**, **b**, ... mit Periode 2	keine	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 360°/(2N+1)$	1	5.22b

TABELLE 5.12a: *Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen der Diedersysteme*. Diese Tabelle zeigt die weitere Untergliederung der drei Diedersysteme in Klassen zusammen mit den Symmetrieelementen für $N \geq 1$ oder $n \geq 3$. Sie ist analog aufgebaut wie **TABELLE 4.4** und **TABELLE 5.6**.

TABELLE 5.12b: *Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen des Oktagonalen, Dodekagonalen und Dekagonalen Diedersystems*

TABELLE 5.12a: *Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen der Diedersysteme (N ≥ 1)*

SYSTEM		*SYMMETRIEOPERATIONEN UND SYMMETRIEACHSENRICHTUNGEN*				*GRUPPENSYMBOLE*				*Spezialfälle*
(N = 1, 2, 3, ...)	*Ordnung*	*Hauptachse(n)*	*1. Nebenachse(n)*	*2. Nebenachse(n)*	*Typ*	*Coxeter-Weyl*	*Schönflies*	*Hermann-Mauguin*	*Abstrakte Gruppe*	(Tabellen 4.4, 5.6 und 5.12a)
$n = 4N$	$4n$	**n+m**	$\frac{1}{2}n \cdot$ **(2+m)**	$\frac{1}{2}n \cdot$ **(2+m)**	Z	$\mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	D_{nh}	**n/m mm**	$\mathbf{D}_{2n}$	Tetragonales, Oktagonales und Dodekagonales System
($n = 4, 8, 12, ...$)	$2n$	$\overline{\mathbf{n}}$	$\frac{1}{2}n \cdot \mathbf{2}$	$\frac{1}{2}n \cdot$ **m**		$\mathbf{D}_n\mathbf{D}_{\frac{1}{2}n}$	$D_{\frac{1}{2}nd}$	$\overline{\mathbf{n}}$ **2m**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	$\mathbf{n}_p$	$\frac{1}{2}n \cdot$ **m**	$\frac{1}{2}n \cdot$ **m**		$\mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	C_{nv}	**nmm**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	**n**	$\frac{1}{2}n \cdot \mathbf{2}$	$\frac{1}{2}n \cdot \mathbf{2}$	e	$\mathbf{D}_n$	D_n	**n22**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	**n+m**			Z	$\mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	C_{nh}	**n/m**	$\mathbf{C}_{2n}$	
	n	$\overline{\mathbf{n}}$				$\mathbf{C}_n\mathbf{C}_{\frac{1}{2}n}$	S_n	$\overline{\mathbf{n}}$	$\mathbf{C}_n$	
	n	$\mathbf{n}_p$			e	$\mathbf{C}_n$	C_n	**n**	$\mathbf{C}_n$	
$n = 4N + 2$	$4n$	**n+m**	$\frac{1}{2}n \cdot$ **(2+m)**	$\frac{1}{2}n \cdot$ **(2+m)**	Z	$\mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	D_{nh}	**n/m mm**	$\mathbf{D}_{2n}$	Hexagonales und Dekagonales System
($n = 6, 10, ...$)	$2n$	$\overline{\mathbf{n}} \equiv \frac{1}{2}$**n+m**	$\frac{1}{2}n \cdot \mathbf{2}_p$	$\frac{1}{2}n \cdot$ **m**		$\mathbf{D}_n\mathbf{D}_{\frac{1}{2}n}$	$D_{\frac{1}{2}nh}$	$\overline{\mathbf{n}}$ **2m** $\equiv \frac{1}{2}$**n/m 2m**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	$\mathbf{n}_p$	$\frac{1}{2}n \cdot$ **m**	$\frac{1}{2}n \cdot$ **m**		$\mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	C_{nv}	**nmm**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	**n**	$\frac{1}{2}n \cdot \mathbf{2}$	$\frac{1}{2}n \cdot \mathbf{2}$	e	$\mathbf{D}_n$	D_n	**n22**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	**n+m**			Z	$\mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	C_{nh}	**n/m**	$\mathbf{C}_{2n}$	
	n	$\overline{\mathbf{n}} \equiv \frac{1}{2}$**n+m**				$\mathbf{C}_n\mathbf{C}_{\frac{1}{2}n}$	$C_{\frac{1}{2}nh}$	$\overline{\mathbf{n}} \equiv \frac{1}{2}$**n/m**	$\mathbf{C}_n$	
	n	$\mathbf{n}_p$			e	$\mathbf{C}_n$	C_n	**n**	$\mathbf{C}_n$	
$n = 2N + 1$	$4n$	$\overline{\mathbf{n}}$	$n \cdot$ **m**	$n \cdot \mathbf{2}$	Z	$\mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	D_{nd}	$\overline{\mathbf{n}}$ **2/m** $\equiv$ $\overline{\mathbf{n}}$ **m**	$\mathbf{D}_{2n}$	Trigonales und Pentagonales System
($n = 3, 5, 7, ...$)	$2n$	$\mathbf{n}_p$	$n \cdot$ **m**			$\mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	C_{nv}	**nm**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	**n**	$n \cdot \mathbf{2}_p$		e	$\mathbf{D}_n$	D_n	**n2**	$\mathbf{D}_n$	
	$2n$	$\overline{\mathbf{n}}$			Z	$\mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	C_{ni}	$\overline{\mathbf{n}} \equiv$ **n** $\times$ **Z**	$\mathbf{C}_{2n}$	
	n	$\mathbf{n}_p$				$\mathbf{C}_n$	C_n	**n**	$\mathbf{C}_n$	

TABELLE 5.12b: *Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen des oktagonalen, dodekagonalen und dekagonalen Diedersystems*

SYSTEM	*Ordnung*	*SYMMETRIEOPERATIONEN UND SYMMETRIEACHSENRICHTUNGEN*				*GRUPPENSYMBOLE*			
		Hauptachse	*1. Nebenachsen*	*2. Nebenachsen*	*Typ*	*Coxeter-Weyl*	*Schönflies*	*Hermann-Mauguin*	*Abstrakte Gruppe*
Oktagonal	32	**8+m**	4 · (2+m)	4 · (2+m)	Z	$\mathbf{D_8 \times Z}$	D_{8h}	**8/m mm**	$\mathbf{D_{16}}$
(8 = 4 · 2)	16	$\mathbf{\bar{8}}$	4 · 2	4 · m		$\mathbf{D_8D_4}$	D_{4d}	$\mathbf{\bar{8}}$ **2m**	$\mathbf{D_8}$
	16	$\mathbf{8}_p$	4 · m	4 · m		$\mathbf{D_8C_8}$	C_{8v}	**8mm**	$\mathbf{D_8}$
	16	**8**	4 · 2	4 · 2	e	$\mathbf{D_8}$	D_8	**822**	$\mathbf{D_8}$
	16	**8+m**			Z	$\mathbf{C_8 \times Z}$	C_{8h}	**8/m**	$\mathbf{C_{16}}$
	8	$\mathbf{\bar{8}}$				$\mathbf{C_8C_4}$	S_8	$\mathbf{\bar{8}}$	$\mathbf{C_8}$
	8	$\mathbf{8}_p$			e	$\mathbf{C_8}$	C_8	**8**	$\mathbf{C_8}$
Dodekagonal	48	**12+m**	6 · (2+m)	6 · (2+m)	Z	$\mathbf{D_{12} \times Z}$	D_{12h}	**12/m mm**	$\mathbf{D_{24}}$
(12 = 4 · 3)	24	$\mathbf{\bar{12}}$	6 · 2	6 · m		$\mathbf{D_{12}D_6}$	D_{6d}	$\mathbf{\bar{12}}$ **2m**	$\mathbf{D_{12}}$
	24	$\mathbf{12}_p$	6 · m	6 · m		$\mathbf{D_{12}C_{12}}$	C_{12v}	**12mm**	$\mathbf{D_{12}}$
	24	**12**	6 · 2	6 · 2	e	$\mathbf{D_{12}}$	D_{12}	**12 22**	$\mathbf{D_{12}}$
	24	**12+m**			Z	$\mathbf{C_{12} \times Z}$	C_{12h}	**12/m**	$\mathbf{C_{24}}$
	12	$\mathbf{\bar{12}}$				$\mathbf{C_{12}C_6}$	S_{12}	$\mathbf{\bar{12}}$	$\mathbf{C_{12}}$
	12	$\mathbf{12}_p$			e	$\mathbf{C_{12}}$	C_{12}	**12**	$\mathbf{C_{12}}$
Dekagonal	40	**10+m**	5 · (2+m)	5 · (2+m)	Z	$\mathbf{D_{10} \times Z}$	D_{10h}	**10/m mm**	$\mathbf{D_{20}}$
(10 = 4 · 2 + 2)	20	$\mathbf{\bar{10} \equiv 5+m}$	5 · $\mathbf{2}_p$	5 · m		$\mathbf{D_{10}D_5}$	D_{5h}	$\mathbf{\bar{10}}$ **2m ≡ 5/m 2m**	$\mathbf{D_{10}}$
	20	$\mathbf{10}_p$	5 · m	5 · m		$\mathbf{D_{10}C_{10}}$	C_{10v}	**10mm**	$\mathbf{D_{10}}$
	20	**10**	5 · 2	5 · 2	e	$\mathbf{D_{10}}$	D_{10}	**10 22**	$\mathbf{D_{10}}$
	20	**10+m**			Z	$\mathbf{C_{10} \times Z}$	C_{10h}	**10/m**	$\mathbf{C_{20}}$
	10	$\mathbf{\bar{10} \equiv 5+m}$				$\mathbf{C_{10}C_5}$	C_{5h}	$\mathbf{\bar{10} \equiv 5/m}$	$\mathbf{C_{10}}$
	10	$\mathbf{10}_p$			e	$\mathbf{C_{10}}$	C_{10}	**10**	$\mathbf{C_{10}}$

Flächen- und Punktformen der Diedersysteme

Die durch Diederpunktgruppen erzeugbaren einfachen Flächen- und Punktformen werden in den **TABELLEN 5.14** und **5.15** angeführt und im folgenden näher erläutert. Eine zusammenfassende Übersicht aller vorkommenden, zueinander dualen Flächen- und Punktformen und ihrer Bezeichnungen gibt **TABELLE 5.13**.

TABELLE 5.13: *Flächen- und Punktformen der Diedersysteme ($N \geq 1$).* Hier sind die verschiedenen Flächen- und Punktformen tabelliert mit ihren Namen und einigen nicht die Symmetrie betreffenden Eigenschaften. Diese Formen und ihre Bezeichnungen – die nichts mit den Gruppensymbolen zu tun haben – werden im folgenden näher beschrieben. Die Bezeichnungen von Polygonen und offenen Pyramiden sowie offenen Prismen werden in runde Klammern gesetzt, da es sich um keine geschlossenen Raumformen, das heißt um keine Polyeder handelt.

TABELLEN 5.14 und 5.15: *Einfache Flächen- und Punktformen des 4N-gonalen, des (4N+1)-gonalen und des (2N+1)-gonalen Diedersystems ($N \geq 1$).* Alle einfachen Flächen- und Punktformen der Diedersysteme sind hier mit ihren Symmetrieeigenschaften aufgeführt. Man vergleiche diese Tabellen mit den Spezialfällen in den **TABELLEN 5.2abc** sowie den dazugehörigen Erläuterungen im Abschnitt 5.3.

TABELLE 5.16: *Einfache Punktformen der Diedersysteme für $N \geq 1$ bezüglich aller Lagetypen.* Vollständige Auflistung aller Punktformen bezüglich aller Lagetypen für die drei Diedersysteme. Diese Tabelle wird insbesondere für die im Abschnitt 5.6 weitergehenden Betrachtungen zu den Polyederformen bereitgestellt. Die entsprechenden Flächenformen erhält man mit Hilfe der Tabelle 5.13.

Es folgen die Beschreibungen der geometrischen Eigenschaften der einzelnen Flächen- und Punktformen der Diedersysteme.

$\mathcal{A}_n$: *n*-Eck

Reguläres konvexes Polygon:
(1) *Polygon*: Endliche Menge von *Kanten* $K_1, K_2, \ldots, K_n$ mit *Ecken* $E_i = [K_i\ K_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, wobei $E_n = [K_n\ K_1]$.
(2) *Polygon ohne Selbstdurchdringung*: Kanten haben keine gemeinsamen Punkte außer in den Ecken.
(3) *Konvexes Polygon*: Keine Trägergerade einer Kante schneidet eine andere Kante.
(4) *Reguläres konvexes Polygon*: Alle Kanten (und Winkel) sind kongruent.

$\mathcal{B}_n$: di-*n*-Eck

Kantenhalbreguläres Polygon: Zwei verschiedene Kantenlängen und gleiche Winkel; auch *abgestumpftes n*-Eck genannt. Die Abstumpfung eines *n*-Ecks geschieht durch die Seiten eines um den Winkel $360°/2n$ gedrehten zweiten *n*-Ecks. Dieses ist größer oder kleiner als das ursprüngliche *n*-Eck, aber nicht so groß bzw. so klein, daß kein Schnitt mehr stattfindet. Sind die beiden *n*-Ecke gleich groß, so entsteht ein $2n$-Eck (siehe **Figur 5.25a** für $n = 3$ und **Figur 6.5a** für $n = 4$).

di-*n*-Seit

Eckenhalbreguläres Polygon: Zwei verschiedene Ecken und gleichlange Seiten; wird hier auch *ausgeknicktes n*-Seit genannt.

Die Ausknickung eines *n*-Ecks geschieht durch die Ecken eines um den Winkel $360°/2n$ gedrehten zweiten *n*-Ecks, das größer oder kleiner als das ursprüngliche *n*-Eck ist (aber nicht so groß bzw. so klein, daß keine Ausknickung mehr stattfinden kann). Sind die beiden *n*-Ecke gleich groß, so entsteht ein $2n$-Eck (siehe **Figur 5.25b** für $n = 3$ und **Figur 6.5b** für $n = 4$).

Die *n*-Ecke und die di-*n*-Ecke liegen entweder in allgemeiner Lage oder deren Ebene geht durch den invarianten Punkt *O* der Punktgruppe («di-*n*-Eck in *O*»).

Pyramiden oder Prismen heißen *offen*, wenn eine bzw. beide parallelen Basisflächen nicht zur Flächenform gehören. In diesen Fällen liegt kein Polyeder vor.

n-Pyramide

Pyramide «über» *n*-Eck: die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des *n*-Ecks.

$D\mathcal{A}_n$:

Offene Pyramide oder offenes Prisma über *n*-Eck: *offene n-Pyramide* bzw. *offenes n-Prisma* (siehe **Tabellen 5.2abc** für $n = 3, 4, 6$).

C_n: *n*-Prisma

Prisma über *n*-Eck; «über» bedeutet hier, daß die Achse des Prismas senkrecht auf der Ebene des *n*-Ecks steht und durch den Mittelpunkt des *n*-Ecks geht (siehe **Figur 5.24** für $n = 5$).

DC_n: *n*-Dipyramide

Doppelpyramide über *n*-Eck (siehe **Figur 5.24** für $n = 5$ und **Tabellen 5.2abc** für $n = 3, 4, 6$).

di-*n*-Seit-Pyramide

Pyramide über di-*n*-Seit (siehe **Figur 5.24** für $n = 5$).

$\mathcal{F}_n$: di-*n*-Eck-Prisma

Prisma über di-*n*-Eck (siehe **Figur 5.24** für $n = 5$).

di-*n*-Seit-Prisma

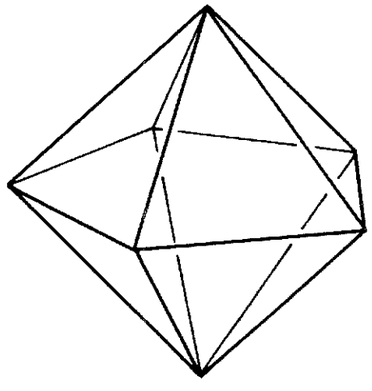
Prisma über di-*n*-Seit (siehe **Figur 5.24** für $n = 5$).

$D\mathcal{F}_n$: di-*n*-Seit-Dipyramide

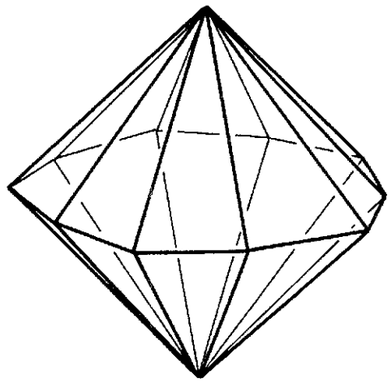
Doppelpyramide über di-*n*-Seit (siehe **Figur 5.24** für $n = 5$ und **Tabellen 5.2abc** für $n = 3, 4, 6$).

$D\mathcal{B}_n$:

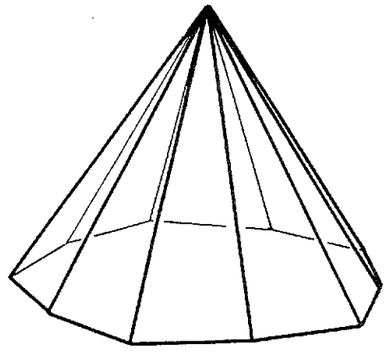
Offene Pyramide oder offenes Prisma über di-*n*-Seit: *offene di-n-Seit-Pyramide* bzw. *offenes di-n-Seit-Prisma* (siehe **Tabellen 5.2abc** für $n = 3, 4, 6$).



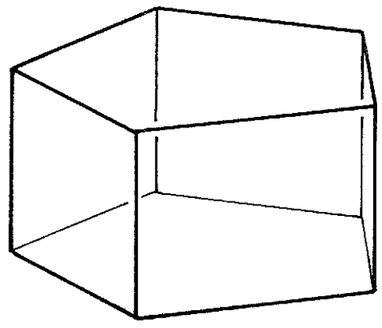
5-Dipyramide (DC_5)



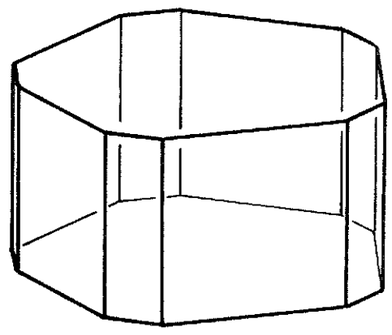
di-5-Seit-Dipyramide ($D\mathcal{F}_5$)



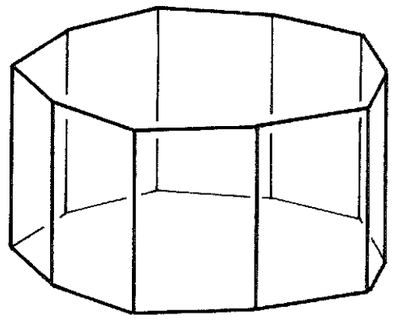
di-5-Seit-Pyramide



5-Prisma (C_5)



di-5-Eck-Prisma ($\mathcal{F}_5$)



di-5-Seit-Prisma

Figur 5.24: *Einfache Flächen- und Punktformen von Diedersystemen*

$\mathcal{D}_n$: *n*-Antiprisma — Polyeder mit zwei in parallelen Ebenen senkrecht übereinanderliegenden *n*-Ecken, die um den Winkel $360°/2n$ verdreht sind. Alle übrigen Flächen sind gleichschenklige Dreiecke (siehe **Figur 5.20** für $n = 5$ und **Figur 5.39c** für $n = 4$).

$\mathcal{E}_n$: Schiefes *n*-Antiprisma — Polyeder mit zwei in parallelen Ebenen senkrecht übereinanderliegenden *n*-Ecken, die um einen Winkel α, mit $\alpha < 360°/n$ und $\alpha \neq 360°/2n$, gegeneinander verdreht sind (siehe **Figur 5.20** für $n = 5$, $\alpha = 20°$ und **Figur 5.40b** für $n = 8$).

$\mathcal{G}_n$: Abgeschnittenes *n*-Antiprisma — Polyeder mit zwei in parallelen Ebenen senkrecht übereinander liegenden di-*n*-Ecken, die um einen Winkel $360°/2n$ verdreht sind. Alle übrigen Flächen sind nicht reguläre Vierecke. – Dieses Polyeder erhält man auch durch beidseitiges Abschneiden eines *n*-Antiprismas, parallel zu beiden Flächen, in welchen die *n*-Ecke liegen (siehe **Figur 5.20** für $n = 5$ und **Figur 5.39b** für $n = 4$).

$D\mathcal{D}_n$: *n*-Streptoeder — Auch *n-Antidipyramide* genannt. Dieses Polyeder entsteht durch Flächenkombination von zwei offenen *n*-Pyramiden mit derselben Achse, die um den Winkel $360°/2n$ gegeneinander verdreht sind (siehe **Figur 5.20** für $n = 5$, **Tabelle 5.2c** für $n = 3$ [Rhomboeder] und **Figur 5.39a** für $n = 4$).

$D\mathcal{E}_n$: *n*-Trapezoeder — Dieses Polyeder entsteht durch Flächenkombination von zwei offenen *n*-Pyramiden mit derselben Achse, die um einen Winkel α mit $\alpha < 360°/n$ und $\alpha \neq 360°/2n$ gegeneinander verdreht sind (siehe **Figur 5.20** für $n = 5$, $\alpha = 20°$, **Tabellen 5.2abc** für $n = 3, 4, 6$ und **Figur 5.40a** für $n = 8$).

$D\mathcal{G}_n$: *n*-Skalenoeder — Dieses Polyeder entsteht durch Flächenkombination von zwei offenen di-*n*-Seit-Pyramiden mit derselben Achse, die um den Winkel $360°/2n$ gegeneinander verdreht sind (siehe **Figur 5.20** für $n = 5$, **Tabelle 5.2c** für $n = 3$ und **Figur 5.39a** für $n = 4$).

Die nicht in den Tabellen 5.2abc abgebildeten kristallographischen Diederformen findet man aufgelistet in den Tabellen 5.4 und 5.5a.

TABELLE 5.13: *Flächen- und Punktformen der Diedersysteme ($N \geq 1$)*

FLÄCHENFORMEN						***PUNKTFORMEN***				
Name	***Flächen***	***Ecken***	***Polyeder***	***Kanten***	***freie Parameter***	***Name***	***Ecken***	***Flächen***	***Polyeder***	***Kombination aus Flächenformen;*** *Parallelschnitt von:*
offene *n*-Pyramide	n	1	$(D\mathcal{A}_n)$	n	0	*n*-Eck	n	1	$(\mathcal{A}_n)$	
offene di-*n*-Seit-Pyramide	$2n$	1	$(D\mathcal{B}_n)$	$2n$	2	di-*n*-Eck	$2n$	1	$(\mathcal{B}_n)$	
n-Dipyramide	$2n$	$n+2$	DC_n	$3n$	1	*n*-Prisma	$2n$	$n+2$	C_n	offenes *n*-Prisma
di-*n*-Seit-Dipyramide	$4n$	$2n+2$	$D\mathcal{F}_n$	$6n$	2	di-*n*-Eck-Prisma	$4n$	$2n+2$	$\mathcal{F}_n$	offenes di-*n*-Eck-Prisma
offenes *n*-Prisma	n		$(D\mathcal{A}_n)$	n	0	*n*-Eck in *O*	n	1	$(\mathcal{A}_n)$	
offenes di-*n*-Seit-Prisma	$2n$		$(D\mathcal{B}_n)$	$2n$	2	di-*n*-Eck in *O*	$2n$	1	$(\mathcal{B}_n)$	
n-Streptoeder	$2n$	$2n+2$	$D\mathcal{D}_n$	$4n$	1	*n*-Antiprisma	$2n$	$2n+2$	$\mathcal{D}_n$	*n*-Streptoeder
n-Trapezoeder	$2n$	$2n+2$	$D\mathcal{E}_n$	$4n$	2	schiefes *n*-Antiprisma	$2n$	$2n+2$	$\mathcal{E}_n$	*n*-Trapezoeder
n-Skalenoeder	$4n$	$2n+2$	$D\mathcal{G}_n$	$6n$	2	abgeschnittenes *n*-Antiprisma	$4n$	$2n+2$	$\mathcal{G}_n$	*n*-Skalenoeder oder *n*-Streptoeder

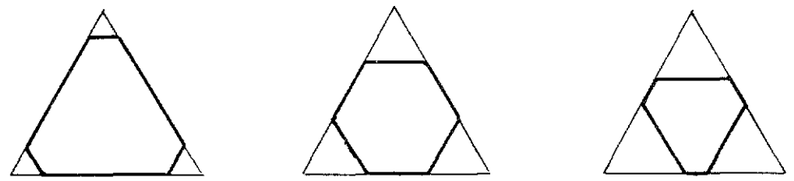
TABELLE 5.14: *Einfache Flächen- und Punktformen des 4N-gonalen Systems (N ≥ 1)*

SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*		*PUNKTFORMEN*		
					Name	*Polyeder*	*Name*	*Polyeder*	*Flächen-kombination*
$n = 4N$	$4n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	VII	di-n-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_n$	di-n-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_n$	$(V_2^p + V_2^p) / \|\|$
	$2n$	$D_{½nd} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{½n}$	$D_{½nd} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{½n}$	VII_2^U	n/2-Skalenoeder	$D\mathcal{G}_{n/2}$	abgeschnittenes n/2-Antiprisma	$\mathcal{G}_{n/2}$	$VII_4^{II} / \|\|$
	$2n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	VII_2^h	offene di-n-Seit-Pyramide	$(D\mathcal{B}_n)$	di-n-Eck	$(\mathcal{B}_n)$	
	$2n$	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	VII_2^e	n-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_n$	schiefes n-Antiprisma	$\mathcal{E}_n$	$VII_2^e / \|\|$
	$2n$	$C_{nh} \equiv \mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	VII_2^p	n-Dipyramide	DC_n	n-Prisma	C_n	$V_2^p / \|\|$
	$2n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	V	offenes di-n-Seit-Prisma	$(D\mathcal{B}_n)$	di-n-Eck in O	$(\mathcal{B}_n)$	
	n	$S_n \equiv \mathbf{C}_n \mathbf{C}_{½n}$	$D_{½nd} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{½n}$	VII_4^{II}	n/2-Streptoeder	$D\mathcal{D}_{n/2}$	n/2-Antiprisma	$\mathcal{D}_{n/2}$	$VII_4^{II} / \|\|$
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	VII_4	offene n-Pyramide	$(D\mathcal{A}_n)$	n-Eck	$(\mathcal{A}_n)$	
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	V_2^p	offenes n-Prisma	$(D\mathcal{A}_n)$	n-Eck in O	$(\mathcal{A}_n)$	

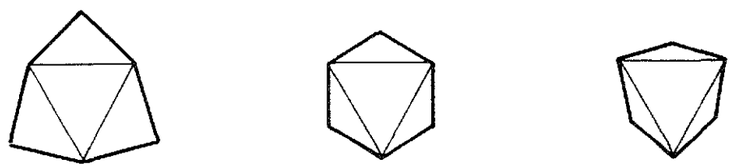
Die nicht planaren Punktformen können durch *Flächenkombination*, durch *Abstumpfung* von Flächenformen, erzeugt werden, insbesondere dient dazu ein Paar paralleler Schnittebenen senkrecht zur Hauptachse der Symmetrie. In den Tabellen 5.14 und 5.15 wird dies gekennzeichnet durch $\|$. Diese Form ist eine Flächenform des Lagetyps VII der Symmetrieklasse mit genau einem Inversionszentrum $\bar{1}$; sie heißt in der Kristallographie *Parralleloeder* oder *Pinakoid* (Tabellen 5.2abc).

Man beachte, daß unter den *einfachen* Flächen- und Punktformen der Diedersysteme keine geschlossenen Pyramiden und weder offene und geschlossene di-n-Eck-Pyramiden sowie di-n-Eck-Dipyramiden noch di-n-Seite, geschlossene di-n-Seit-Pyramiden sowie geschlossene di-n-Seit-Prismen vorkommen.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei noch erwähnt, daß man in Analogie zu den Ableitungen von Hemiedern und Tetartoedern aus Holoedern bei Punktgruppen-Flächenformen auch bei Punktgruppen-Punktformen entsprechende Ableitungen von «Hemigonen» und «Tetartogonen» aus den «Hologonen» durchführen kann. So ist etwa das n-Prisma und das schiefe n-Antiprisma ein paramorphes bzw. enantiomorphes Hemigon des di-n-Prismas. (Für weitere Ausführungen dazu, mit ganz anderer Terminologie, siehe Brückner [1900], Kapitel E.)



Figur 5.25a: *Abstumpfung eines n-Ecks (n = 3): di-3-Eck ($\mathcal{B}_3$)*

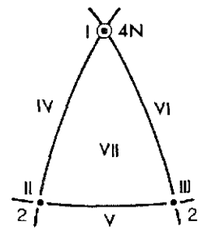
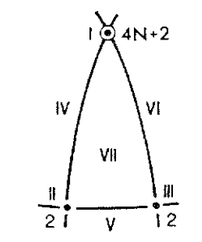
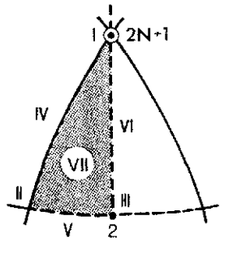


Figur 5.25b: *Ausknickung eines n-Ecks (n = 3): di-3-Seit*

TABELLE 5.15: *Einfache Flächen- und Punktformen des (4N+2)-gonalen und des (2N+1)-gonalen Systems (N ≥ 1)*

SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende Symmetrie*	*Eigen-symmetrie*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*			*PUNKTFORMEN*			
					Name	*Polyeder*	*Figur*	*Name*	*Polyeder*	*Figur*	*Flächen-kombination*
$n = 4N + 2$	$4n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	VII	di-n-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_n$		di-n-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_n$		$(V_2^p + V_2^p) / \|\|$
	$2n$	$D_{\frac{1}{2}nh} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{\frac{1}{2}n}$	$D_{\frac{1}{2}nh} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{\frac{1}{2}n}$	VII_2^{II}	di-n/2-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_{n/2}$		di-n/2-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_{n/2}$		$[(V_2^p + V_2^p) / \|\|]_2^{II}$
	$2n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	VII_2^h	offene di-n-Seit-Pyramide	$(D\mathcal{B}_n)$		di-n-Eck	$(\mathcal{B}_n)$		
	$2n$	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	VII_2^e	n-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_n$		schiefes n-Antiprisma	$\mathcal{E}_n$		$VII_2^e / \|\|$
	$2n$	$C_{nh} \equiv \mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	VII_2^p	n-Dipyramide	DC_n		n-Prisma	C_n		$V_2^p / \|\|$
	$2n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	V	offenes di-n-Seit-Prisma	$(D\mathcal{B}_n)$		di-n-Eck in O	$(\mathcal{B}_n)$		
	n	$C_{\frac{1}{2}nh} \equiv \mathbf{C}_n\mathbf{C}_{\frac{1}{2}n}$	$D_{\frac{1}{2}nh} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{\frac{1}{2}n}$	VII_4^{II}	n/2-Dipyramide	$DC_{n/2}$		n/2-Prisma	$C_{n/2}$		$[V_2^p / \|\|]_2^{II}$
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	VII_4	offene n-Pyramide	$(D\mathcal{A}_n)$		n-Eck	$(\mathcal{A}_n)$		
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	V_2^p	offenes n-Prisma	$(D\mathcal{A}_n)$		n-Eck in O	$(\mathcal{A}_n)$		
$n = 2N + 1$	$4n$	$D_{nd} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	$D_{nd} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	VII	n-Skalenoeder	$D\mathcal{G}_n$	5.20	abgeschnittenes n-Antiprisma	$\mathcal{G}_n$	5.20	$VII_2^p / \|\|$
	$2n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	VII_2^h	offene di-n-Seit-Pyramide	$(D\mathcal{B}_n)$		di-n-Eck	$(\mathcal{B}_n)$		
	$2n$	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	VII_2^e	n-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_n$	5.20	schiefes n-Antiprisma	$\mathcal{E}_n$	5.20	$VII_2^e / \|\|$
	$2n$	$C_{ni} \equiv \mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	$D_{nd} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	VII_2^p	n-Streptoeder	$D\mathcal{D}_n$	5.20	n-Antiprisma	$\mathcal{D}_n$	5.20	$VII_2^p / \|\|$
	$2n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_{2n}\mathbf{D}_n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_{2n}\mathbf{D}_n$	V_2^e	offenes di-n-Seit-Prisma	$(D\mathcal{B}_n)$		di-n-Eck in O	$(\mathcal{B}_n)$		
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{C}_n$	VII_4	offene n-Pyramide	$(D\mathcal{A}_n)$		n-Eck	$(\mathcal{A}_n)$		
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_{2n}\mathbf{D}_n$	V_4	offenes n-Prisma	$(D\mathcal{A}_n)$		n-Eck in O	$(\mathcal{A}_n)$		

TABELLE 5.16: *Einfache Punktformen der Diedersysteme bezüglich aller Lagetypen ($N \geq 1$ und $n \geq 3$)*

				Lagetyp							*Lagetypendreieck der Holoedrie*
SYSTEM	***Erzeugende Gruppen***		***Punktformen***	**VII**	**IV**	**VI**	**V**	**II**	**III**	**I**	
n = 4N	**n/m mm**	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{F}_n$	C_n	C_n	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{n}}$ 2m	$D_{1/2nd} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{1/2n}$	Hemieder II. Art	$\mathcal{G}_{n/2}$	C_n	$\mathcal{D}_{n/2}$	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	nmm	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_1$	
	n22	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_n$	C_n	C_n	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	n/m	$C_{nh} \equiv \mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	C_n	C_n	C_n	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{n}}$	$S_n \equiv \mathbf{C}_n \mathbf{C}_{1/2n}$	Tetartoeder II. Art	$\mathcal{D}_{n/2}$	$\mathcal{D}_{n/2}$	$\mathcal{D}_{n/2}$	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	Tetartoeder I. Art	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_1$	
n = 4N+2	**n/m mm**	$D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{F}_n$	C_n	C_n	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{n}}$ 2m	$D_{1/2nh} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{D}_{1/2n}$	Hemieder II. Art	$\mathcal{F}_{n/2}$	$C_{n/2}$	C_n	$\mathcal{B}_{n/2}$ in O	$\mathcal{A}_{n/2}$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	nmm	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_1$	
	n22	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_n$	C_n	C_n	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	n/m	$C_{nh} \equiv \mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	C_n	C_n	C_n	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{n}}$	$C_{1/2nh} \equiv \mathbf{C}_n \mathbf{C}_{1/2n}$	Tetartoeder II. Art	$C_{n/2}$	$C_{n/2}$	$C_{n/2}$	$\mathcal{A}_{n/2}$ in O	$\mathcal{A}_{n/2}$ in O	$\mathcal{A}_{n/2}$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	Tetartoeder I. Art	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_1$	
n = 2N+1	**$\bar{\mathbf{n}}$ 2/m**	$D_{nd} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{G}_n$	$\mathcal{D}_n$	C_{2n}	$\mathcal{B}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	nm	$C_{nv} \equiv \mathbf{D}_n \mathbf{C}_n$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_{2n}$	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_1$	
	n2	$D_n \equiv \mathbf{D}_n$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_n$	$\mathcal{D}_n$	C_n	$\mathcal{B}_n$ in O	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	$\bar{\mathbf{n}}$	$C_{ni} \equiv \mathbf{C}_n \times \mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	$\mathcal{D}_n$	$\mathcal{D}_n$	$\mathcal{D}_n$	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_{2n}$ in O	$\mathcal{A}_2$	
	n	$C_n \equiv \mathbf{C}_n$	Tetartoeder	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_n$ in O	$\mathcal{A}_1$	

5.6 *Kontinuierlicher Zusammenhang von Punktgruppenpolyedern*

In diesem Abschnitt wird an die Betrachtungen des Abschnitts 5.1 sowie des Abschnitts 3.4 angeknüpft. Es wird von den Symmetriegruppen ausgegangen und nach dem inneren kontinuierlichen Zusammenhang der durch diese Gruppen erzeugbaren Flächen- und Punktformen, insbesondere der polyedrischen Formenklassen, gefragt.

Rückblick und Ausgangspunkt

Wird eine Ebene oder ein Punkt einer Punktsymmetriegruppe unterworfen, so bewegt sich dieses Element auf einer Bahn, bestehend aus endlich vielen Stationen. Für die Gruppen des ikosaedrischen und des kubischen Systems ergeben sich im Falle einer Ebenenbahn durch endlich viele Ebenen eingehüllte konvexe Körper und im Falle einer Punktbahn durch endlich viele Eckpunkte bestimmte konvexe Körper, eben symmetrische Polyeder. Man sagt, daß diese Elemente (Ebene und Punkt) diese Polyeder *erzeugen*, das heißt *erzeugende Elemente* der jeweiligen Gruppenbahnen sind.

Je nach der Lage dieser Ebenen bzw. Punkte relativ zu den Symmetrieelementen der Gruppe, insbesondere den Symmetrieachsen, ergeben sich ganz verschiedenartige Polyeder. Eine Klassifizierung der verschiedenen Lagetypen wurde im Abschnitt 5.1 vorgenommen: sie läuft im wesentlichen darauf hinaus, daß man bezüglich der größten Gruppe (Holoedrie) des entsprechenden Symmetriegruppensystems die Ebenen bzw. Punkte danach unterscheidet, ob sie senkrecht auf bzw. in den (drei verschiedenartigen) Symmetrieachsen liegen, ob sie auf Symmetrieebenen zwischen je zwei Achsen liegen oder ob sie auf keiner Symmetrieebene, das heißt zwischen je drei Achsen liegen. Letzteres ist der allgemeine Lagetyp VII, die ersten drei umfassen die Lagetypen I, II, III und die «Zwischenlagen» die Lagetypen IV, V, VI. Für das kubische System siehe die Figur 5.1a zusammen mit der Figur 3.13 und den Tabellen 3.4 und 3.6 und für das Ikosaedersystem die Figur 5.14a zusammen mit der Figur 5.17 und Tabelle 5.8.

Die Polyeder mit erzeugenden Ebenen bzw. Punkten der Lagetypen I, II, III sind bis auf Ähnlichkeit untereinander äquivalent, da die Lagen der entsprechenden Elemente bezüglich des Symmetriegerüstes eindeutig festgelegt sind; daraus ergeben sich drei Polyederklassen ohne freie Parameter, das heißt *nulldimensionale Polyedermannigfaltigkeiten*.

Bei den Lagetypen IV, V und VI, bei welchen die die Gruppenbahnen erzeugenden Ebenen bzw. Punkte auf Symmetrieebenen zwischen je zwei Achsen liegen, gibt es vermöge der freien Wahl der Lage innerhalb desselben Typs eine einparametrige kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Polyedern, die untereinander nicht ähnlichkeitsäquivalent sind, aber alle zur selben Klasse, bestimmt durch denselben Lagetyp, gehören. Dies ergibt drei Polyederklassen mit je einem freien Parameter, das heißt drei *eindimensionale Polyedermannigfaltigkeiten*.

Beim Lagetyp VII, bei welchem die erzeugenden Ebenen bzw. Punkte auf keiner Symmetrieebene liegen, besteht die entsprechende Polyederklasse aus einer zweiparametrigen kontinuierlichen Mannigfaltigkeit von Polyedern, das heißt, ist eine *zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeit*.

Diese Überlegungen können ohne Schwierigkeiten auf die Untergruppen der größten Gruppe (Holoedrie) des betrachteten Symmetriegruppensystems, das heißt auf die Hemiedrien und Tetartoedrien, ausgedehnt werden. Das Lagetypendreieck wird dabei festgehalten, die Lagetypen erhalten jedoch zusätzliche Markierungen, je nachdem, welche Untergruppen in Betracht kommen (Abschnitt 5.1).

Zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich des Lagetypendreiecks

Wandert man mit den erzeugenden Ebenen bzw. Punkten innerhalb des Lagetypendreiecks bezüglich einer Symmetriegruppe herum, so erhält man eine wohlbestimmte Polyedermannigfaltigkeit, innerhalb welcher alle Polyeder kontinuierlich ineinander übergeführt werden können und dabei jeweils genau einer Klasse angehören, welche durch die genannten Lagetypen der erzeugenden Elemente festgelegt ist. Das Innere des Lagetypendreiecks bezüglich einer der fünf Gruppen des kubischen Systems oder einer der zwei Gruppen des Ikosaedersystems repräsentieren zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeiten, die jeweiligen Seiten und Ecken ein- bzw. nulldimensionale Polyedermannigfaltigkeiten. Die mit einem Lagetypendreieck verknüpfte kontinuierliche Polyedermannigfaltigkeit ist also zweidimensional und wird durch eindimensionale und nulldimensionale Polyedermannigfaltigkeiten berandet. Diese zweidimensionalen berandeten Polyedermannigfaltigkeiten im Bereiche eines Lagetypendreiecks sowie deren Verknüpfungen bilden den Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

In den **Figuren 5.27, 5.28** und **5.30 bis 5.34** findet man im Bereich der entsprechenden Lagetypendreiecke Repräsentanten aus den zweidimensionalen berandeten Polyedermannigfaltigkeiten sowohl der Flächenformen wie der Punktformen *aller* Gruppen des Ikosaedersystems und des kubischen Systems. Das Ziel der folgenden Untersuchungen liegt darin, die für die Holoedrie der jeweiligen Systeme gefundene zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeit im Bereich des entsprechenden Lagetypendreiecks mit den dazugehörigen Polyedermannigfaltigkeiten anderer Gruppen desselben Systems in Zusammenhang zu bringen.

Eine genaue Betrachtung der eindimensionalen Ränder der zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich eines Lagetypendreiecks wird ans Licht bringen, daß diese in vielen Fällen übereinstimmen und deshalb die zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten nahtlos zusammengesetzt oder «verklebt» werden können. Eine solche Verknüpfung der verschiedenen zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten führt schließlich zu einer einzigen Mannigfaltigkeit von Polyedern, welche *alle* Polyederklassen des ikosaedrischen und des kubischen Systems umfaßt (**Figur 5.36ab**).

Stimmen bestimmte null-, ein- oder zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeiten bezüglich zweier verschiedener Lagetypen überein, so werden die entsprechenden Lagetypen *äquivalent* genannt.

Man beachte, daß man es bei den den Lagetypen entsprechenden Polyedermannigfaltigkeiten bereits mit Klassen von ähnlichkeitsäquivalenten Klassen von Polyedern zu tun hat. Zur Vereinfachung der Darstellung werden letztere Klassen einfach nur als «Polyeder» bezeichnet. Anschaulich entspricht dies der Betrachtung von Ebenen- bzw. Punktbahnen auf einer ein für allemal fest gewählten Sphäre mit bestimmtem Radius um «den» invarianten Punkt der jeweiligen Punktgruppe.

Praktischer Hinweis: Die einzelnen Polyeder in den folgenden Figuren sind sehr klein; man erhält etwas übersichtlichere Figuren, wenn man die hier reproduzierten Vorlagen mit einem Kopierapparat um 200% auf das Format A3 vergrößert.

Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyeder des Ikosaedersystems

Es wird mit dem Ikosaedersystem begonnen, da dort die Verhältnisse am übersichtlichsten sind. Zunächst gibt das Lagetypendreieck der Figur 5.14a die sieben möglichen Lagetypen relativ zur vollen Symmetriegruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ des Ikosaeders wieder. Die entsprechenden sieben Polyederklassen sind in Tabelle 5.9 festgehalten. **Figur 5.27ab** zeigt Repräsentanten aus den zweidimensionalen kontinuierlichen Polyedermannigfaltigkeiten der Flächen- und Punktformen im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Ikosaedergruppe.

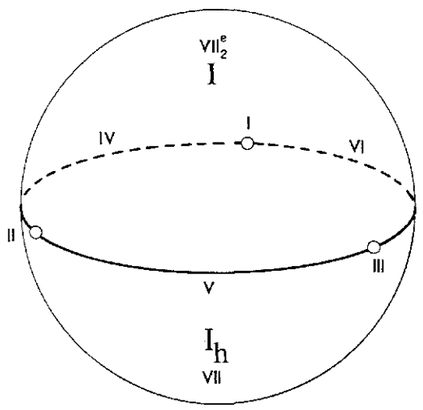
Die volle Ikosaedergruppe besitzt nur eine einzige Untergruppe, die nicht irgendeinem der Diedersysteme angehört, die sogenannte *Ikosaederdrehgruppe* $I \equiv \mathbf{I}$. Sie ist eine Untergruppe vom Index 2 in $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ und enantiomorph, da sie keine Spiegelung enthält (Abschnitt 5.4). **Figur 5.28ab** zeigt einige Repräsentanten aus der zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeit im Bereich des entsprechenden Lagetypendreiecks. Beim Lagetyp VII_2^5 erzeugt diese Gruppe als Flächenform den Pentagon-60flächner und als Punktform das abgeschrägte Dodekaeder (Tabelle 5.9).

Für die übrigen Lagetypen ergibt sich, daß die Untergruppe $I \equiv \mathbf{I}$ für denselben Lagetyp jeweils dieselben Polyederklassen erzeugt wie die volle Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$. Dies bedeutet für die Flächen- und Punktlagetypen bzw. die entsprechenden Polyederklassen (Tabelle 5.9), daß folgende Äquivalenzen gelten:

$$\mathrm{I}_2^e \equiv \mathrm{I},\ \mathrm{II}_2^e \equiv \mathrm{II},\ \mathrm{III}_2^e \equiv \mathrm{III},\ \mathrm{IV}_2^e \equiv \mathrm{IV},\ \mathrm{V}_2^e \equiv \mathrm{V},\ \mathrm{VI}_2^e \equiv \mathrm{VI}.$$

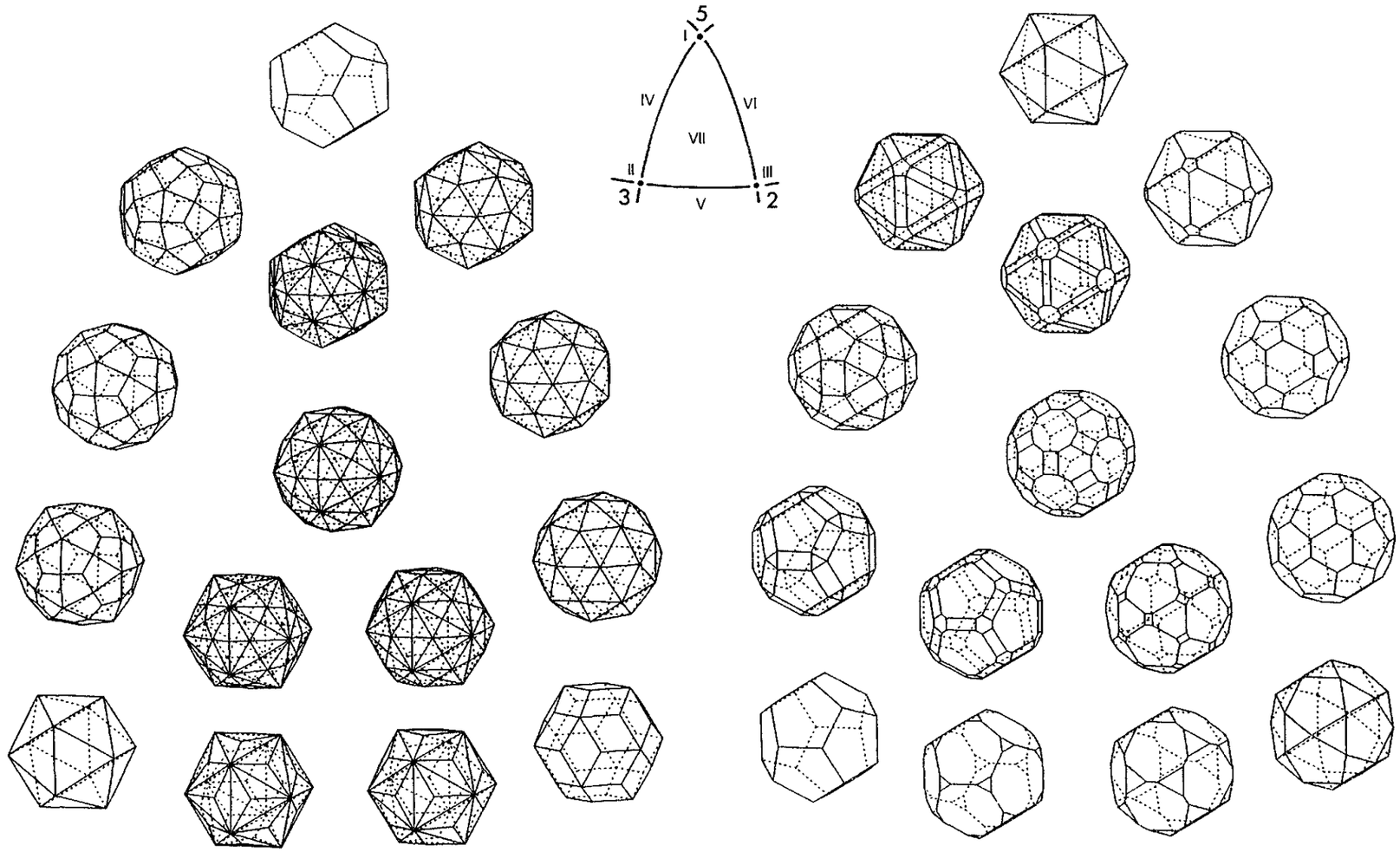
Daraus folgt, daß die *Ränder* der beiden zweidimensionalen kontinuierlichen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich der Lagetypendreiecke der beiden Gruppen des Ikosaedersystems übereinstimmen. Hingegen entsprechen dem Innern des Lagetypendreiecks die Polyederklasse mit Lagetyp VII (6-Pyramidenikosaeder bzw. Ikosidodekaederstumpf) und die Polyederklasse mit Lagetyp VII_2^e (Pentagon-60flächner bzw. abgeschrägtes Dodekaeder).

Verknüpft man die beiden zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten miteinander, indem man ihre Ränder zusammenklebt (identifiziert), und bläst dann das ganze Gebilde zu einer Sphäre auf, so erhält man **Figur 5.26**. Hier erscheint der Rand der beiden Lagetypendreiecke als horizontaler Großkreis der Sphäre, der durch die den Lagetypen I, II und III entsprechenden Punkte unterteilt wird in Segmente, die den Lagetypen IV, V und VI entsprechen. – Jede zu dieser sphärischen Darstellung topologisch äquivalente Figur, das heißt durch Verzerren ohne Zerreißen («Gummi-Geometrie») aus der gegebenen Figur erzeugbare Figur, ist zu dieser gleichwertig.



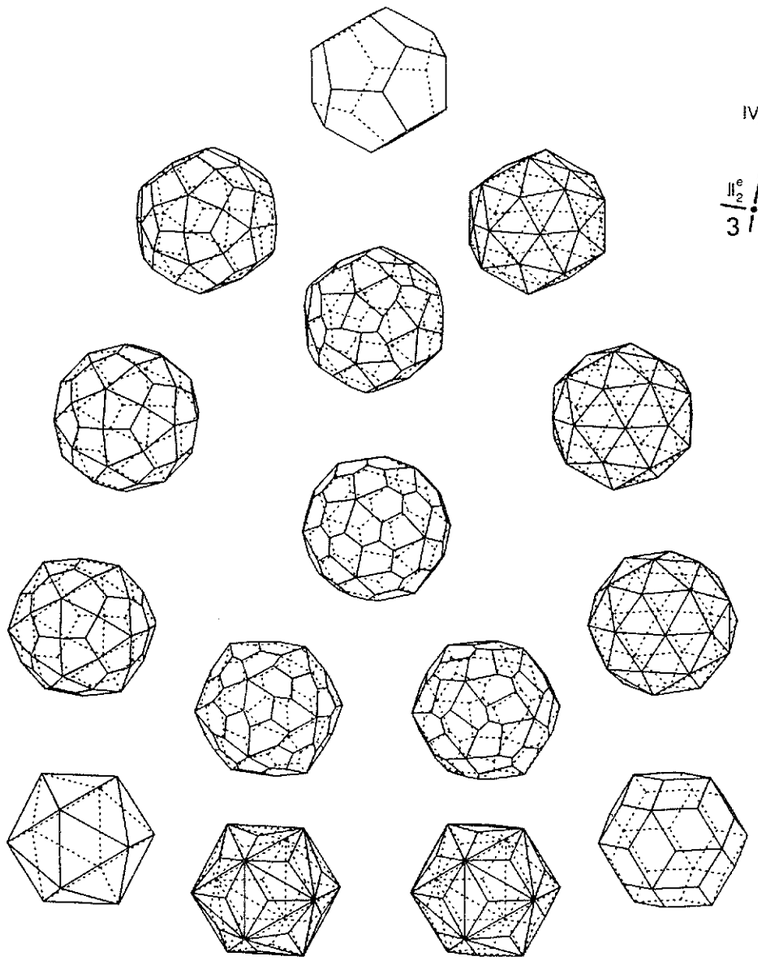
Figur 5.26: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Lagetypendreiecke bezüglich der zwei Gruppen des Ikosaedersystems*

Figur 5.26 zeigt, wie man alle (hier durch Punkte auf der Sphäre repräsentierte) Polyeder des Ikosaedersystems kontinuierlich ineinander überführen kann durch entsprechende Variation der Flächen- bzw. Punktlage. Den konstanten, einfach oder zweifach variablen Lagen entsprechen dabei bestimmte Punkte, Kurven bzw. Flächenstücke auf der Sphäre. Die Überschreitung eines solchen Punktes bzw. eines solchen Kurvensegmentes bedeutet den Übertritt von einem Lagetyp zu einem anderen und damit von einer Polyederklasse zu einer andern. Die entsprechenden Teile der Sphäre sind in Figur 5.26 mit den dazugehörigen Lagetypen markiert. Damit kann diese Figur sowohl für Flächenformen wie für Punktformen (das heißt für die isoedrischen wie für die isogonalen Polyederklassen) verwendet werden.

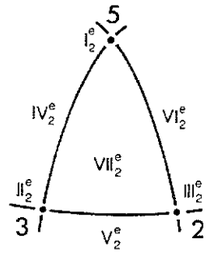


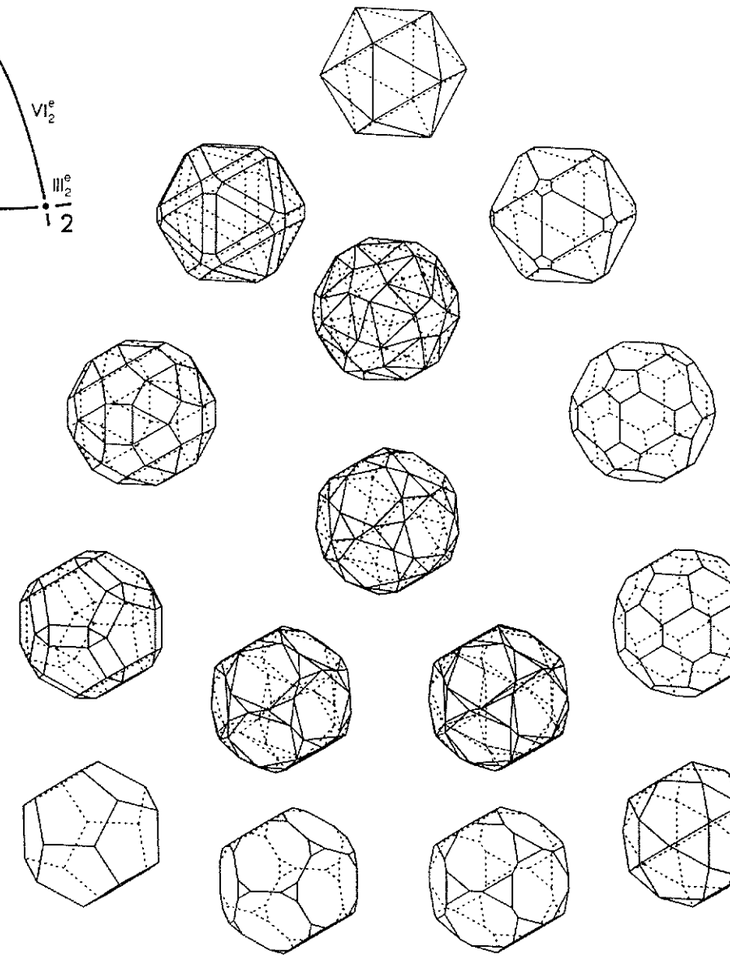
Figur 5.27a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ (Holoedrie des Ikosaedersystems)*

Figur 5.27b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ (Holoedrie des Ikosaedersystems)*



Figur 5.28a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Ikosaederdrehgruppe $I \equiv \mathbf{I}$ (enantiomorphe Hemiedrie des Ikosaedersystems)*





Figur 5.28b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Ikosaederdrehgruppe $I \equiv \mathbf{I}$ (enantiomorphe Hemiedrie des Ikosaedersystems)*

Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyeder des kubischen Systems

Es folgt die Entwicklung der kontinuierlichen Darstellung aller 15 Polyederklassen der Gruppen des kubischen Systems. Die Situation ist hier etwas komplizierter, aber nicht grundsätzlich anders als beim Ikosaedersystem.

In den **Figuren 5.30**, **5.31**, **5.32**, **5.33** und **5.34** sind für alle Gruppen des kubischen Systems Repräsentanten aus den zweidimensionalen kontinuierlichen Polyedermannigfaltigkeiten der Flächen- und Punktformen, das heißt der isoedrischen und isogonalen Polyeder, im Bereich der entsprechenden Lagetypendreiecke dargestellt.

Ein Blick auf diese Figuren und/oder auf die Tabellen 5.1 und 5.3 im Abschnitt 5.3 zeigt, daß die Untergruppen vom Index 2 der Holoedrie des kubischen Systems $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ auch bei gleichbleibender Lage nicht immer zu neuen Flächen- oder Punktformen führen. Insbesondere gelten für die Lagetypen relativ zu den Gruppen des kubischen Systems folgende Äquivalenzen (für die benutzten Symbole, siehe Abschnitt 5.1):

Invariable Lagen:
$$\mathrm{I} \equiv \mathrm{I}_2^{\mathrm{h}} \equiv \mathrm{I}_2^{\mathrm{e}} \equiv \mathrm{I}_2^{\mathrm{p}} \equiv \mathrm{I}_4$$
$$\mathrm{II} \equiv \mathrm{II}_2^{\mathrm{e}} \equiv \mathrm{II}_2^{\mathrm{p}}$$
$$\mathrm{III} \equiv \mathrm{III}_2^{\mathrm{h}} \equiv \mathrm{III}_2^{\mathrm{e}} \equiv \mathrm{III}_2^{\mathrm{p}} \equiv \mathrm{III}_4$$

Einfach variable Lagen:
$$\mathrm{IV} \equiv \mathrm{IV}_2^{\mathrm{e}} \equiv \mathrm{IV}_2^{\mathrm{p}}$$
$$\mathrm{V} \equiv \mathrm{V}_2^{\mathrm{c}} \equiv \mathrm{V}_2^{\mathrm{p}}$$
$$\mathrm{VI} \equiv \mathrm{VI}_2^{\mathrm{h}} \equiv \mathrm{VI}_2^{\mathrm{e}}$$

Dies bedeutet, daß die diesen Lagetypen entsprechenden null- und eindimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten (Ecken und Seiten des Lagetypendreiecks) übereinstimmen und bei der Zusammensetzung der zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereiche der Lagetypendreiecke bezüglich der verschiedenen Gruppen miteinander identifiziert werden können.

Für das Innere des Lagetypendreiecks, das heißt für die Lagetypen

$$\mathrm{VII},\ \mathrm{VII}_2^{\mathrm{h}},\ \mathrm{VII}_2^{\mathrm{p}},\ \mathrm{VII}_2^{\mathrm{e}},\ \mathrm{VII}_4,$$

sind die entsprechenden zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten für alle fünf Gruppen des kubischen Systems verschieden.

Die Zusammensetzung dieser zweidimensionalen kontinuierlichen Polyedermannigfaltigkeiten soll wieder mit Hilfe einer Sphäre durchgeführt werden. Auf dieser werden die Ecken und Seiten des Lagetypendreiecks der Holoedrie $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ als horizontaler Großkreis repräsentiert, der folglich durch die den Lagetypen I, II und III entsprechenden Punkte in die den Lagetypen IV, V und VI entsprechenden Kurvensegmente gegliedert wird (**Figur 5.29a**).

Für die Verteilung der übrigen Repräsentanten der Polyederklassen geht aus den obigen Äquivalenzen der Lagetypen folgendes hervor:

(1) Die Repräsentanten der Polyederklasse vom Lagetyp VII (Holoeder) sowie diejenigen des Lagetyps $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{e}}$ (enantiomorphe Hemieder) treffen sich auf den Kurvenstücken IV, V, VI und in den Punkten I, II, III.

(2) Die Repräsentanten der Polyederklassen vom Lagetyp VII (Holoeder) sowie die Polyederklassen vom Typ $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{e}}$ und $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{p}}$ (enantiomorphe und paramorphe Hemieder) treffen sich auf den Kurvenstücken IV und V, welche den Punkt II enthalten. Die Repräsentanten der Polyederklasse vom Lagetyp $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{h}}$ (hemimorphe Hemieder) treffen sich auf dem Kurvenstück VI mit den Klassen der enantiomorphen Hemieder und der Holoeder.

(3) Die Repräsentanten aller Klassen von Hemiedern und Tetartoedern treffen sich mit den Holoedern in den Punkten I und III.

Daraus folgt zunächst, daß die Ränder der zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten vom Lagetyp VII und $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{e}}$ übereinstimmen und folglich die entsprechenden Lagetypendreiecke an den ganzen horizontalen Großkreis angrenzen. Dagegen grenzen die zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten vom Lagetyp $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{p}}$ (hemimorphe und paramorphe Hemieder) nur an die Kurvenstücke VI bzw. IV und V (**Figur 5.29a**).

Für die im kubischen System auftretende Tetartoedrie gelten außer den bereits angeführten die folgenden Äquivalenzen für die Lagetypen (Tabelle 5.1):

Invariable Lagen: $\mathrm{II}_4 \equiv \mathrm{II}_2^{\mathrm{h}}$

Einfach variable Lagen: $\mathrm{IV}_4 \equiv \mathrm{IV}_2^{\mathrm{h}}$, $\mathrm{V}_4 \equiv \mathrm{V}_2^{\mathrm{h}}$, $\mathrm{VI}_4 \equiv \mathrm{VI}_2^{\mathrm{p}}$.

Daraus folgt, zusammen mit den weiter oben angeführten Äquivalenzen:

(4) Die den einfach variablen Lagen entsprechenden Kurvenstücke $\mathrm{IV}_2^{\mathrm{h}}$, $\mathrm{V}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{p}}$ fallen mit keinem der Kurvenstücke IV, V und VI zusammen. Dabei treffen sich die Kurvenstücke $\mathrm{V}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{p}}$ in III, die Kurvenstücke $\mathrm{IV}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{p}}$ in I und die Kurvenstücke $\mathrm{IV}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{V}_2^{\mathrm{h}}$ in $\mathrm{II}_2^{\mathrm{h}}$.

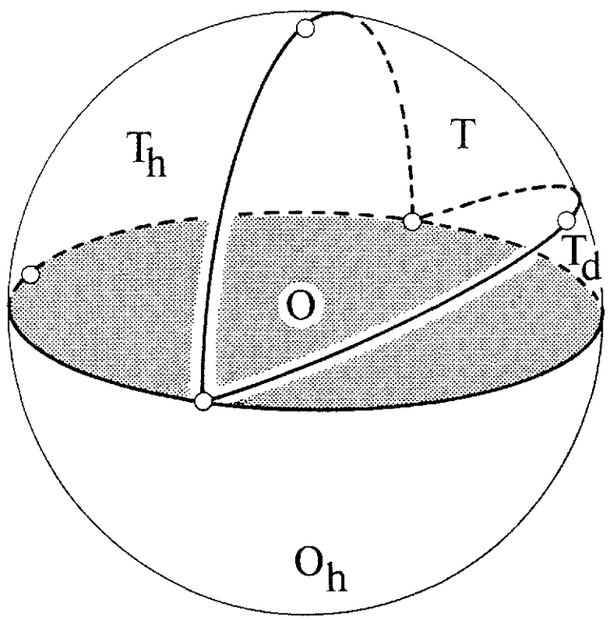
(5) Die Repräsentanten der Klasse der Tetartoeder grenzen an die Kurvenstücke $\mathrm{IV}_2^{\mathrm{h}}$, $\mathrm{V}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{p}}$, das heißt, die Repräsentanten der Klasse der paramorphen Hemieder grenzen in $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{p}}$ an die Tetartoeder und die Repräsentanten der Klasse der hemimorphen Hemieder grenzen in $\mathrm{IV}_2^{\mathrm{h}}$, $\mathrm{II}_2^{\mathrm{h}}$ und $\mathrm{V}_2^{\mathrm{h}}$ an die Tetartoeder.

In **Figur 5.29a** sind alle Verknüpfungen der Lagetypendreiecke der fünf Gruppen des kubischen Systems zusammengefaßt. Man beachte, daß hier sowohl die Sphäre wie die ganze Ebene des Großkreises I-II-III dazugehört. Auch spielen die konkreten Maßverhältnisse wiederum keine Rolle, sondern nur der gegenseitige (topologische) Zusammenhang der Punkte, Kurven und Flächenstücke.

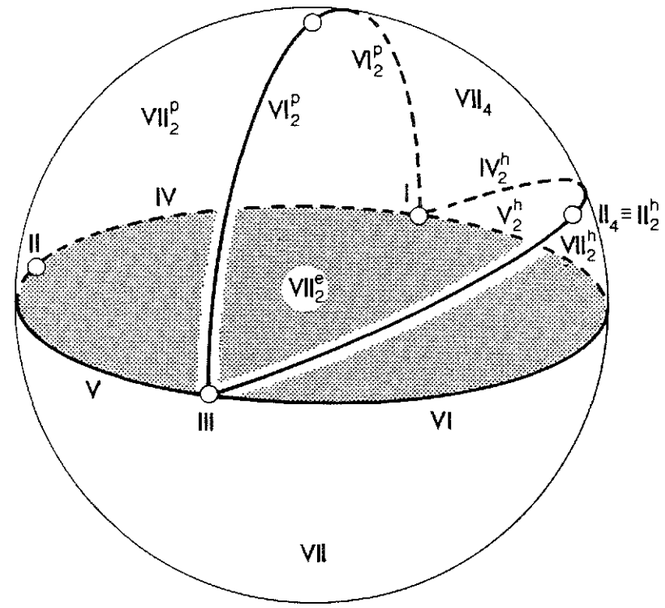
Figur 5.29b zeigt die entsprechende Verteilung der fünf Gruppen des kubischen Systems auf die fünf kontinuierlich zusammenhängenden Lagetypendreiecke.

Durch Variation der Flächen- bzw. Punktlagen innerhalb eines Typs und darüber hinaus können alle Polyeder kontinuierlich ineinander übergeführt werden. Das Überschreiten eines Punktes (konstante Lagetypen) oder eines Kurvenstückes (einfach variable Lagetypen) oder der Übergang von einem Flächenstück ins andere (zweifach variable Lagetypen) bedeutet einen Übertritt von einem Lagetyp in einen anderen und damit von einer Polyederklasse in eine andere.

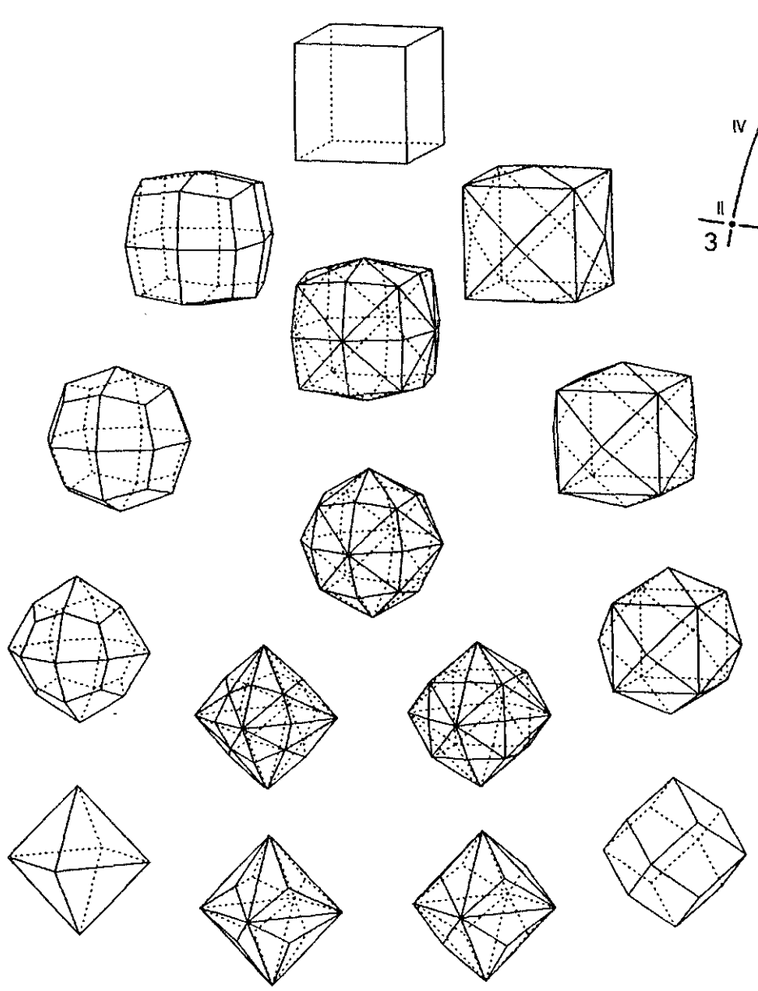
Man beachte, daß die Verhältnisse der **Figuren 5.29ab** sowohl für die isoedrischen wie die isogonalen Polyeder des kubischen Systems gelten, da Lagetypen und nicht konkrete Polyederklassen markiert wurden.



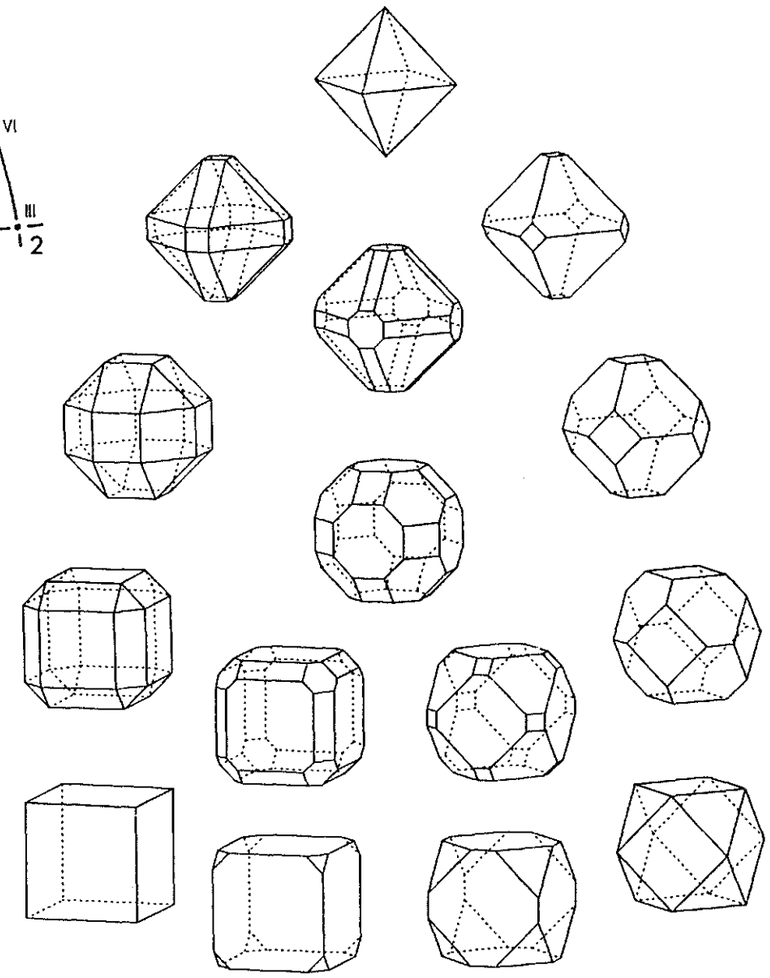
Figur 5.29a: *Verteilung der fünf Symmetriegruppen des kubischen Systems auf die Lagetypendreiecke*



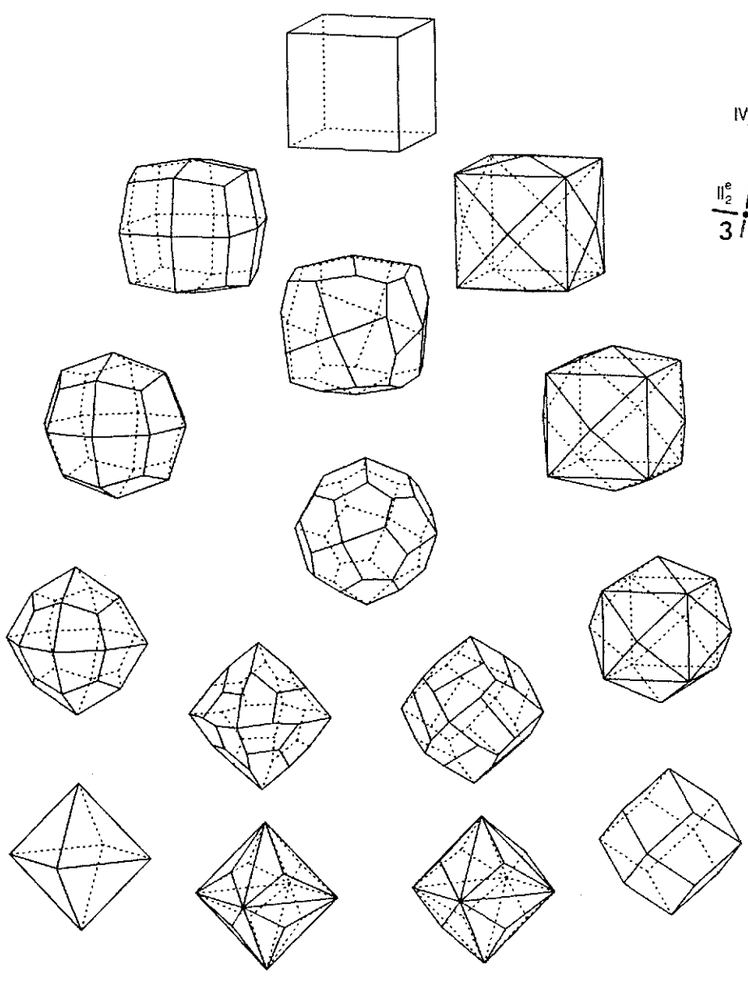
Figur 5.29b: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Lagetypendreiecke bezüglich der fünf Gruppen des kubischen Systems*

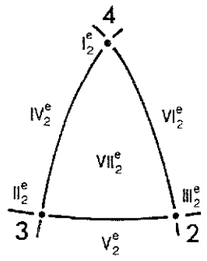


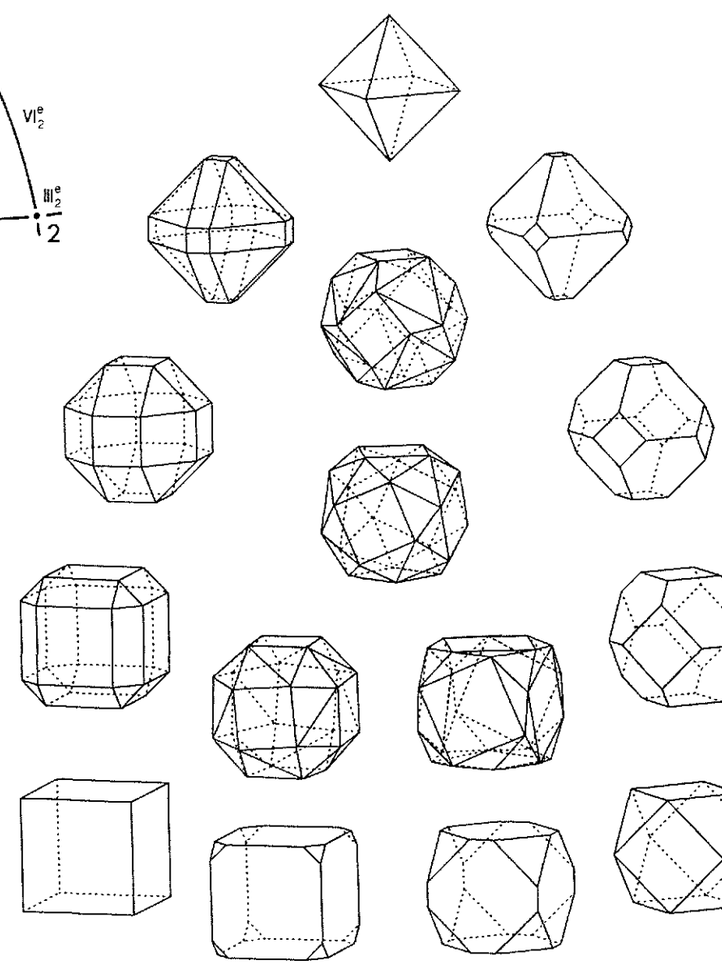
Figur 5.30a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ (Holoedrie des kubischen Systems)*



Figur 5.30b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ (Holoedrie des kubischen Systems)*

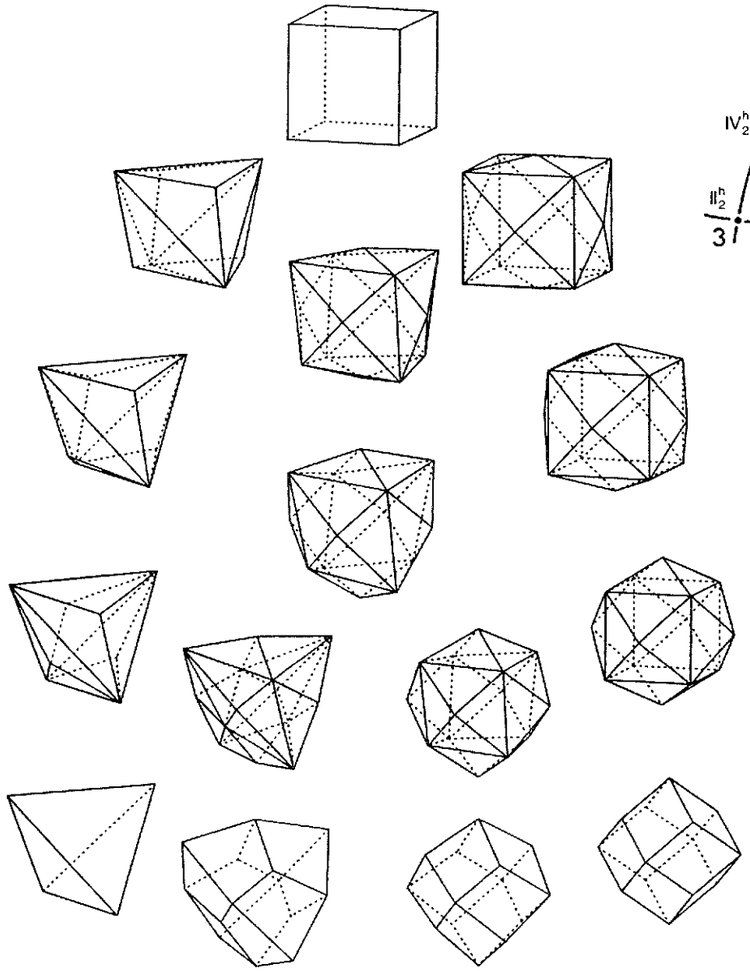


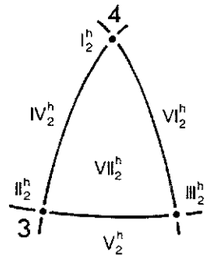




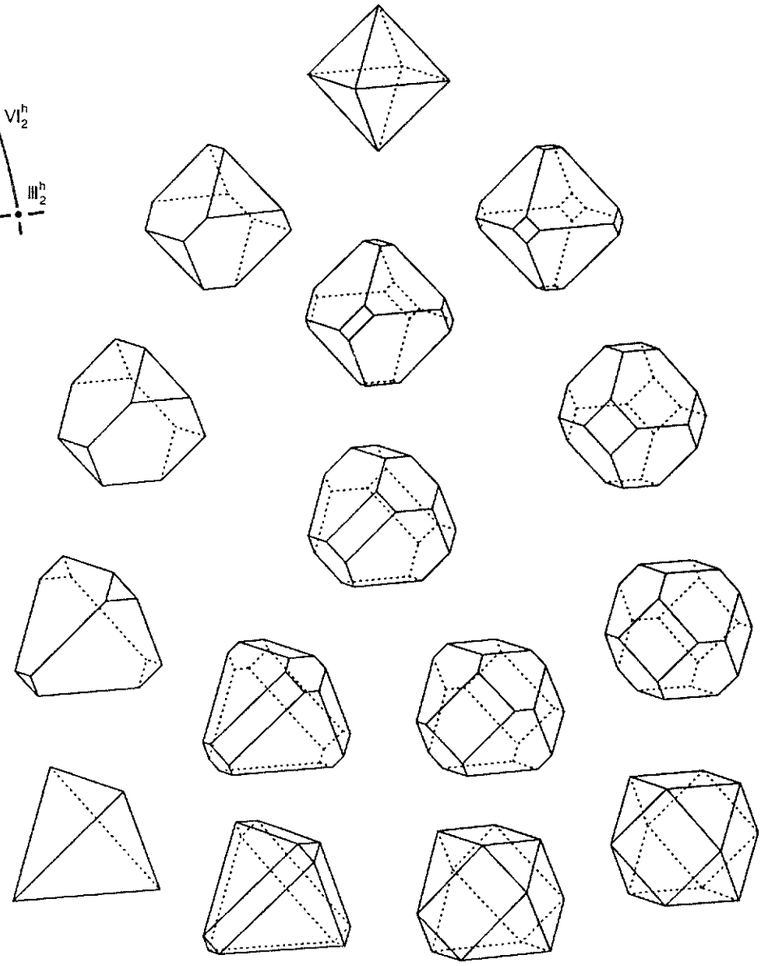
Figur 5.31a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Oktaederdrehgruppe $O \equiv \mathbf{O}$ (enantiomorphe Hemiedrie des kubischen Systems)*

Figur 5.31b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Oktaederdrehgruppe $O \equiv \mathbf{O}$ (enantiomorphe Hemiedrie des kubischen Systems)*

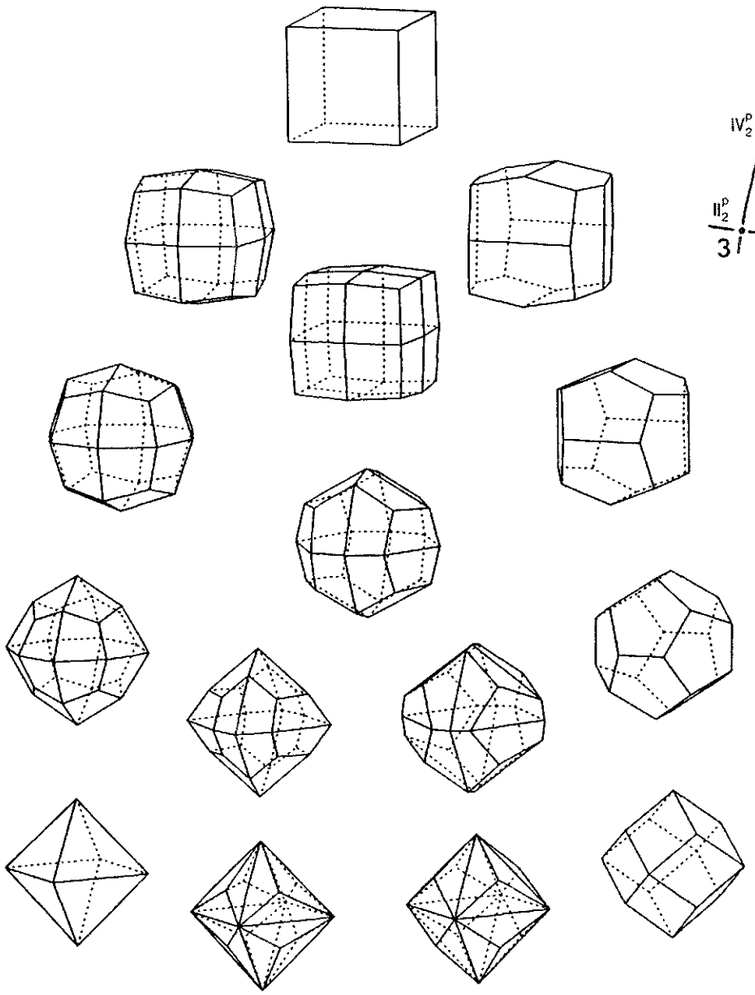


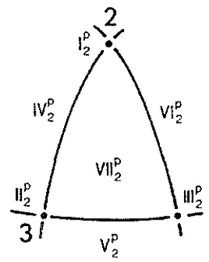


Figur 5.32a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Tetraedergruppe $T_d \equiv$* **OT** *(hemimorphe Hemiedrie des kubischen Systems)*

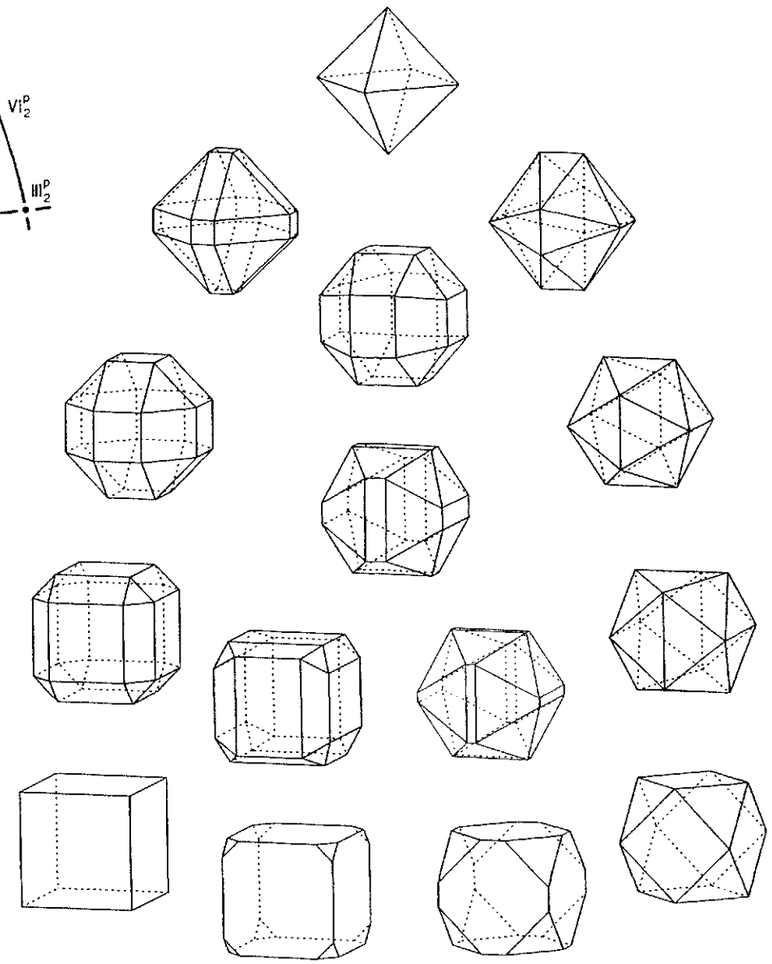


Figur 5.32b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Tetraedergruppe $T_d \equiv$* **OT** *(hemimorphe Hemiedrie des kubischen Systems)*

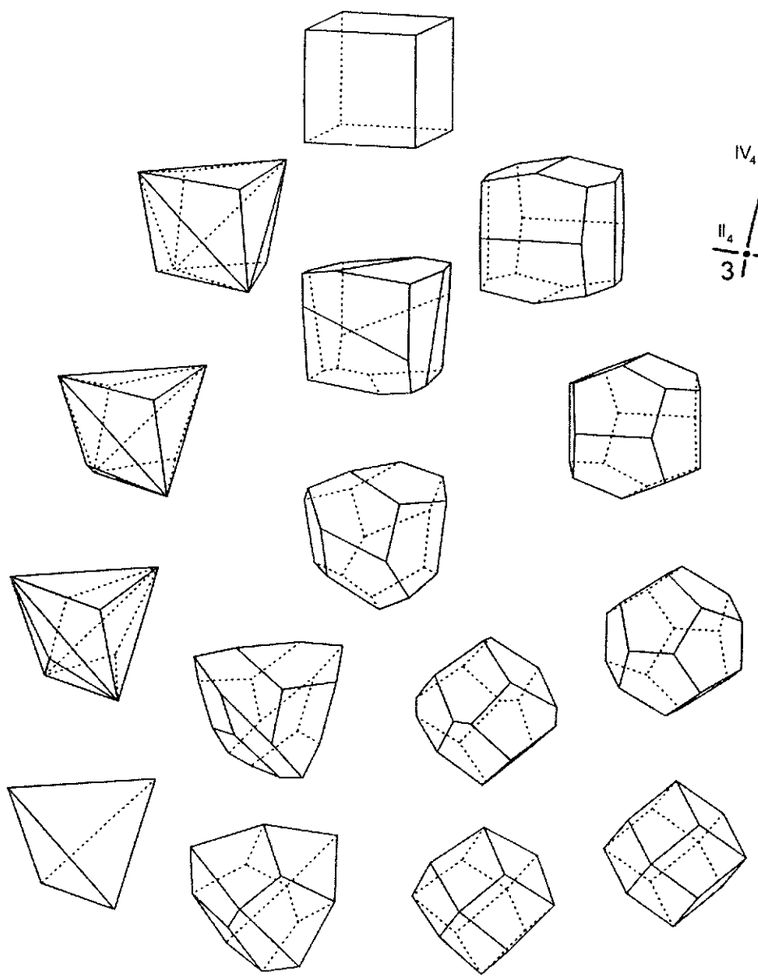


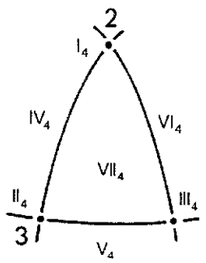


Figur 5.33a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Gruppe $T_h \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{Z}$ (paramorphe Hemiedrie des kubischen Systems)*

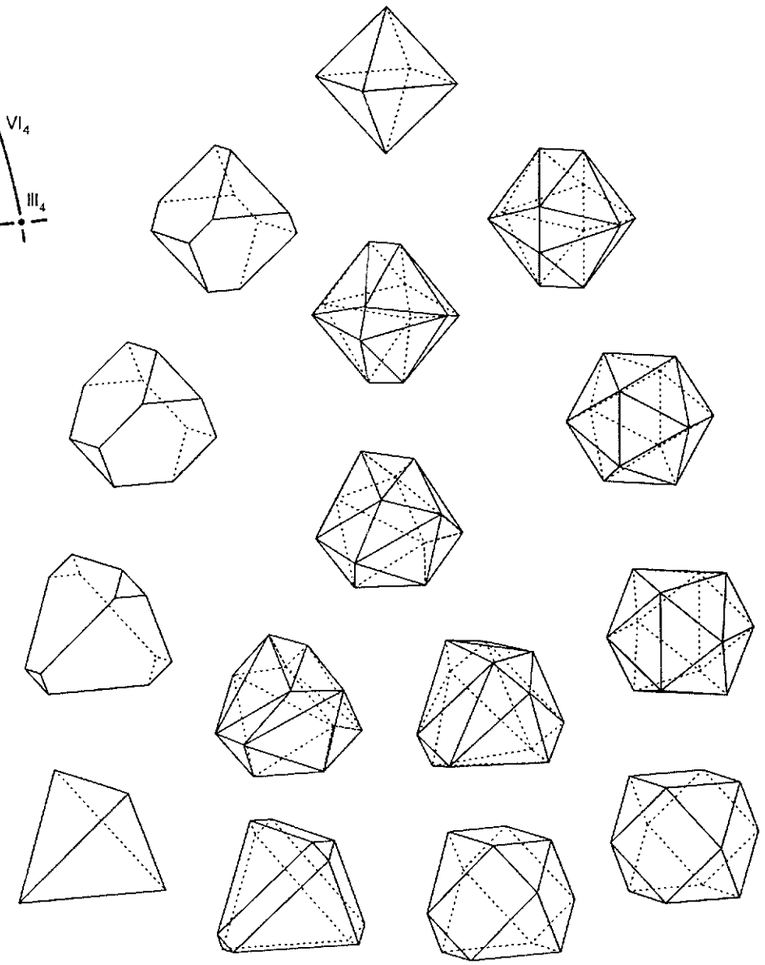


Figur 5.33b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Gruppe $T_h \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{Z}$ (paramorphe Hemiedrie des kubischen Systems)*





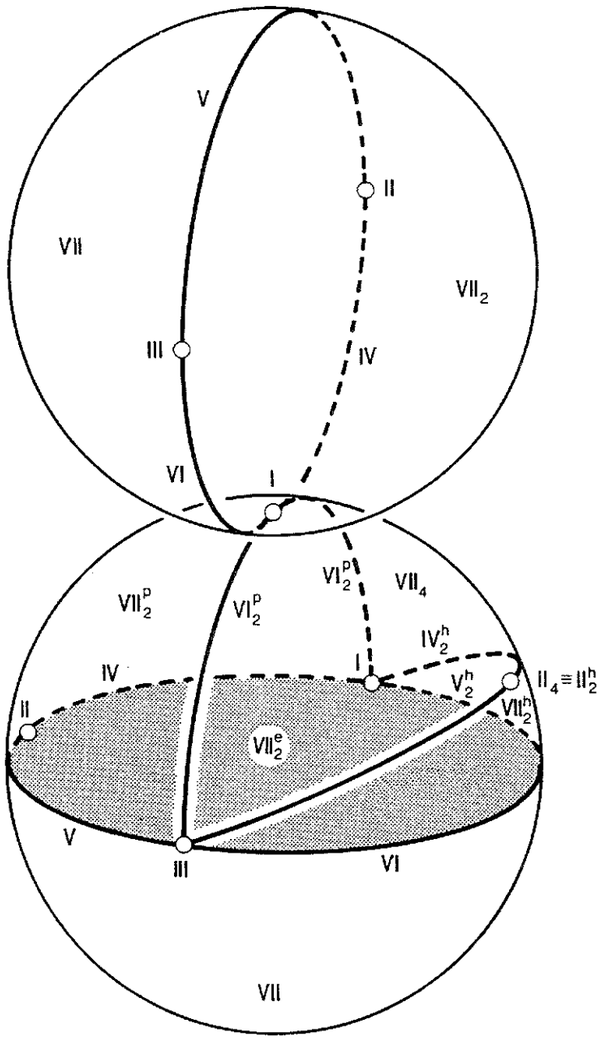
Figur 5.34a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Tetraederdrehgruppe $T \equiv \mathbf{T}$ (Tetartoedrie des kubischen Systems)*



Figur 5.34b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Tetraederdrehgruppe $T \equiv \mathbf{T}$ (Tetartoedrie des kubischen Systems)*

IKOSAEDERSYSTEM

KUBISCHES SYSTEM



Figur 5.35: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Lagetypendreiecke bezüglich der zwei Gruppen des Ikosaedersystems und der fünf Gruppen des kubischen Systems*

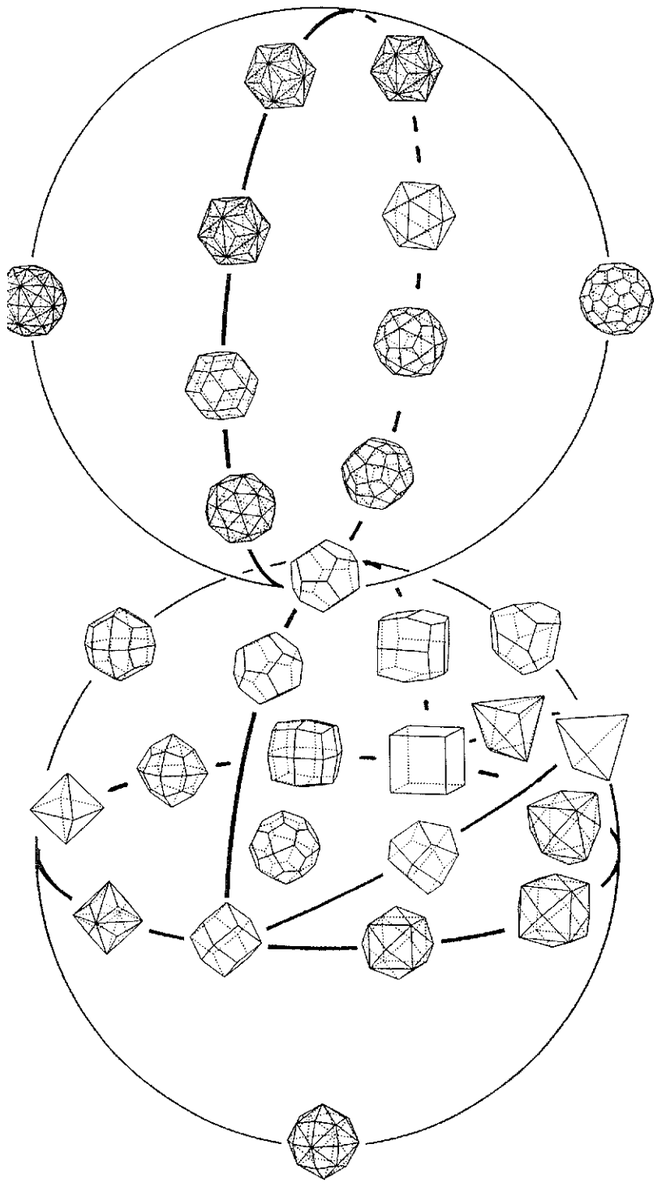
Zusammenfassung: Die Polyedermannigfaltigkeiten des kubischen Systems und des Ikosaedersystems

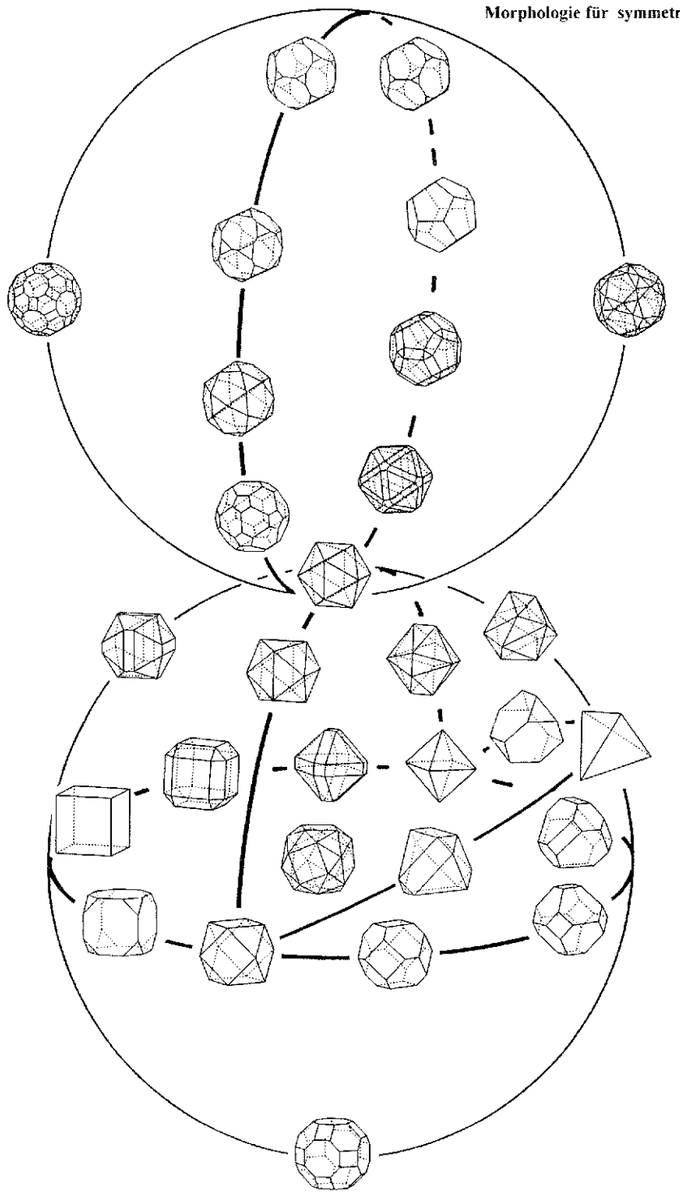
Auf der Kurve mit dem Lagetyp VI$_2^p$ liegt auch das reguläre Dodekaeder bzw. reguläre Ikosaeder. Dies bedeutet, daß die isoedrischen und isogonalen Polyeder des Ikosaedersystems und des kubischen Systems kontinuierlich über das Dodekaeder bzw. Ikosaeder zusammenhängen. Eine diesbezügliche Zusammenfügung der oben entwickelten Darstellungen des kontinuierlichen Zusammenhangs der Polyederklassen beider Gruppen zeigt **Figur 5.35**. Man beachte dabei, daß die Markierungen der Lagetypen nur für die dazugehörigen Gruppen definiert sind. Schließlich zeigen die **Figuren 5.36ab** einige Repräsentanten der isoedrischen bzw. isogonalen Polyedermannigfaltigkeiten.

Nächste Seite:

Figur 5.36a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich der Lagetypendreiecke des Ikosaedersystems und des kubischen Systems*

Figur 5.36b: *Repräsentanten von Punktformen (isogonale Polyeder) im Bereich der Lagetypendreiecke des Ikosaedersystems und des kubischen Systems*





Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyeder der Diedersysteme

Die folgenden allgemeinen Betrachtungen beruhen insbesondere auf den Tabellen 5.13 bis 5.16 sowie den entsprechenden Spezialfällen in den Tabellen 5.2abc, 5.5b und 5.17.

Eine erste Analyse von Tabelle 5.16 zeigt, daß in den Zeilen der hemimorphen Hemieder sowie der Tetartoeder (I. Art) keine Polyeder vorkommen. Sie können also für eine Darstellung des kontinuierlichen Zusammenhangs von *Polyeder*klassen unberücksichtigt bleiben. Im weiteren kommen in den Zeilen der paramorphen Hemieder und der Tetartoeder II. Art keine Polyederklassen mit zwei Parametern vor, das heißt, hier gibt es keine zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten. Damit bleiben für die drei Diedersysteme höchstens drei zweidimensionale Polyedermannigfaltigkeiten übrig, nämlich diejenigen der Holoeder, der Hemieder II. Art und der enantiomorphen Hemieder. Die folgenden Untersuchungen bestehen darin, diese zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten zusammen mit den eindimensionalen Mannigfaltigkeiten geeignet zu verknüpfen.

Anstatt Lagetypen werden hier direkt Polyederklassen gemäß den oben im Abschnitt 5.5 eingeführten Bezeichnungen angegeben. Da die Zusammenhangsverhältnisse für Flächenformen genau dieselben sind, werden nur Punktformen angeführt. Um zu den Flächenformen zu kommen, braucht man bloß gemäß Tabelle 5.13 die Punktpolyeder durch die entsprechenden dualen Polyeder zu ersetzen und den Bezeichnungen der Polyeder ein *D* voranzusetzen.

Das Prinzip der kontinuierlichen Verknüpfung der verschiedenen Polyedermannigfaltigkeiten ist im wesentlichen dasselbe wie für das Ikosaedersystem und das kubische System, so daß die Ausführungen hier kürzer ausfallen können. Der Anschaulichkeit halber wird auf die (umkehrbare) Eindeutigkeit verzichtet: Gewissen Klassen von Punkt- bzw. Flächenformen, das heißt den entsprechenden Lagetypen, werden manchmal mehrere Punkte als Repräsentanten zugeordnet. Dies ist aus den folgenden Figuren ohne weiteres ersichtlich. Es wird mit einem Beispiel begonnen und dann zu den allgemeinen Fällen übergegangen.

Oktagonales System

Die Gruppen und Symmetrieoperationen des oktagonalen Systems sind in Tabelle 5.12b explizit angeführt. Eine Übersicht der Flächen- und Punktformen sowie ihre Verteilung auf die verschiedenen Lagetypen geben die folgenden Tabellen.

TABELLE 5.17: *Einfache Flächen- und Punktformen des oktagonalen Systems.* Hier sind die im oktagonalen System vorkommenden Flächen- und Punktformen angeführt. Diese Tabelle ist ein Spezialfall von Tabelle 5.14.

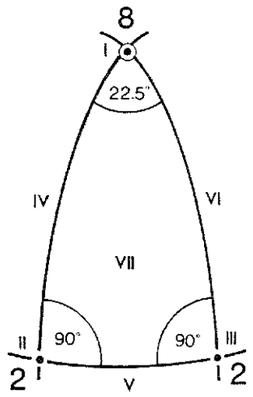
TABELLE 5.18: *Einfache Formen des oktagonalen Systems bezüglich aller Lagetypen.* Diese Tabelle zeigt die Punktformen für alle Lagetypen im oktagonalen System. Diese Tabelle ist ein Spezialfall von Tabelle 5.16 und liegt der folgenden Ableitung der Zusammenhangsverhältnisse der Polyeder des oktagonalen Systems zugrunde.

Die **Figuren 5.38**, **5.39a**, **5.40a** zeigen für die Gruppen $D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8\times\mathbf{Z}$, $D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$ und $D_8 \equiv \mathbf{D}_8$ des oktagonalen Systems einige Repräsentanten aus der kontinuierlichen Mannigfaltigkeit von Flächenformen im Lagetypendreieck gemäß **Figur 5.37**.

Die Punktformen sind für die Gruppe $D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8\times\mathbf{Z}$ nicht dargestellt, da die entsprechenden Polyedermannigfaltigkeiten keine interessanten Polyederklassen enthalten: auf der linken und rechten Kante des Lagetypendreiecks (Lagetyp IV und VI) sind 8-Prismen (C_8), auf der unteren Kante (Lagetyp V) di-8-Ecke in O ($\mathcal{B}_8$) und in der Mitte (Lagetyp VII) di-8-Eck-Prismen ($\mathcal{T}_8$).

Die Punktformen der Gruppe $D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$ enthalten als einzige interessante Polyederklasse abgeschnittene 4-Antiprismen ($\mathcal{G}_4$) im Lagetyp $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{II}}$ (**Figur 5.39b**) und 4-Antiprismen ($\mathcal{D}_4$) im Lagetyp $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{II}}$ (**Figur 5.39c**).

Die Klassen der Punktformenpolyeder der Gruppe $D_8 \equiv \mathbf{D}_8$ enthalten außer 8-Prismen (C_8) im Lagetyp $\mathrm{IV}_2^{\mathrm{c}}$ und $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{c}}$ nur noch schiefe 8-Antiprismen ($\mathcal{E}_8$) im Lagetyp $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{c}}$, von denen es jeweils zwei enantiomorphe Paare gibt (**Figur 5.40b**).



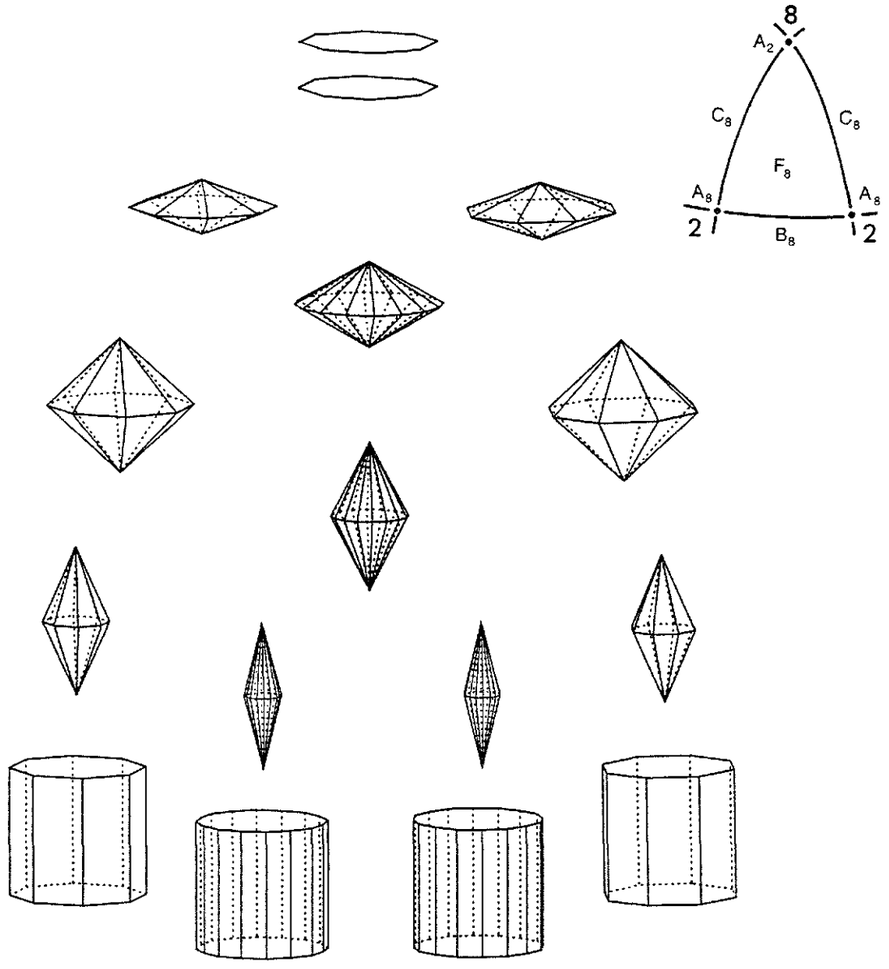
Figur 5.37: *Lagetypendreieck des oktagonalen Systems*

TABELLE 5.17: *Einfache Flächen- und Punktformen des oktagonalen Systems*

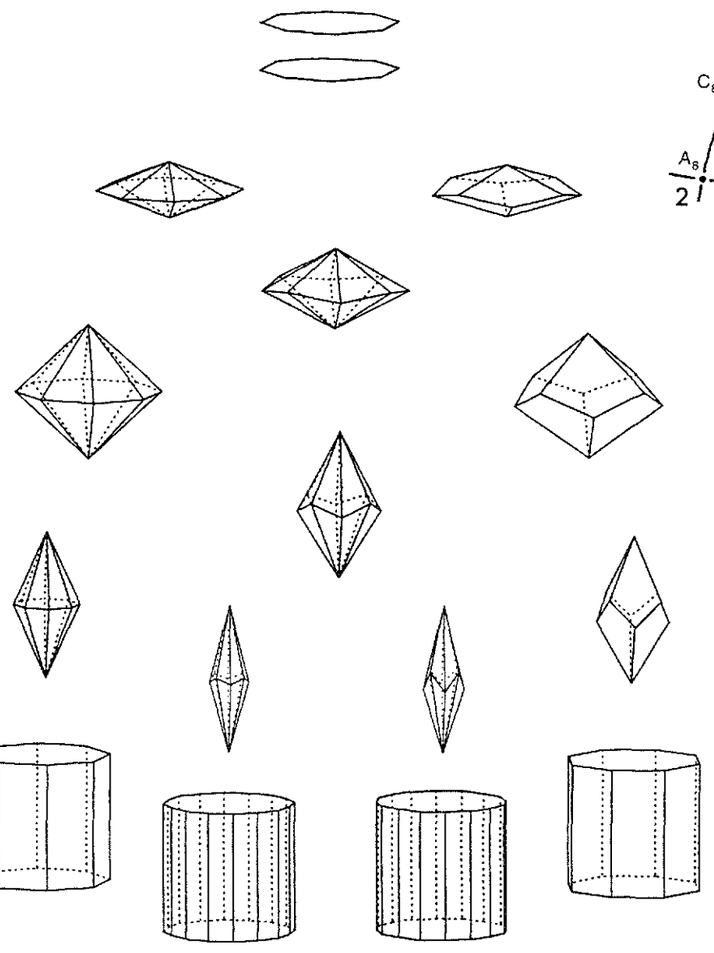
SYSTEM	*Ordnung*	*Erzeugende symmetrie*	*Eigen-Symmetrie*	*Lagetyp*	*FLÄCHENFORMEN*		*PUNKTFORMEN*		
					Name	*Polyeder*	*Name*	*Polyeder*	*Flächen-kombination*
$8 = 4 \cdot 2$	32	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$	VII	di-8-Seit-Dipyramide	$D\mathcal{F}_8$	di-8-Eck-Prisma	$\mathcal{F}_8$	$(V_2^p + V_2^p)/\|\|$
	16	$D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$	$D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$	VII_2^{II}	4-Skalenoeder	$D\mathcal{G}_4$	abgeschnittenes 4-Antiprisma	$\mathcal{G}_4$	VII_4^{II} / ||
	16	$C_{8v} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{C}_8$	$C_{8v} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{C}_8$	VII_2^h	offene di-8-Seit-Pyramide	$(D\mathcal{B}_8)$	di-8-Eck	$(\mathcal{B}_8)$	
	16	$D_8 \equiv \mathbf{D}_8$	$D_8 \equiv \mathbf{D}_8$	VII_2^e	8-Trapezoeder	$D\mathcal{E}_8$	schiefes 8-Antiprisma	$\mathcal{E}_8$	VII_2^e / ||
	16	$C_{8h} \equiv \mathbf{C}_8 \times \mathbf{Z}$	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$	VII_2^p	8-Dipyramide	$D\mathcal{C}_8$	8-Prisma	$\mathcal{C}_8$	V_2^p / ||
	16	$C_{8v} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{C}_8$	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$	V	offenes di-8-Seit-Prisma	$(D\mathcal{B}_8)$	di-8-Eck in O	$(\mathcal{B}_8)$	
	8	$S_8 \equiv \mathbf{C}_8\mathbf{C}_4$	$D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$	VII_4^{II}	4-Streptoeder	$D\mathcal{D}_4$	4-Antiprisma	$\mathcal{D}_4$	VII_4^{II} / ||
	8	$C_8 \equiv \mathbf{C}_8$	$C_{8v} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{C}_8$	VII_4	offene 8-Pyramide	$(D\mathcal{A}_8)$	8-Eck	$(\mathcal{A}_8)$	
	8	$C_8 \equiv \mathbf{C}_8$	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$	V_2^p	offenes 8-Prisma	$(D\mathcal{A}_8)$	8-Eck in O	$(\mathcal{A}_8)$	

TABELLE 5.18: *Einfache Punktformen des oktagonalen Systems bezüglich aller Lagetypen*

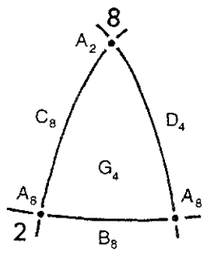
				Lagetyp						
SYSTEM	*Erzeugende Gruppen*		*Punktformen*	VII	IV	VI	V	II	III	I
$8 = 4 \cdot 2$	**8/m mm**	$D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$	Holoeder	$\mathcal{J}_8$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{B}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_2$
	$\bar{\mathbf{8}}$ **2m**	$D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$	Hemieder II. Art	$\mathcal{G}_4$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{D}_4$	$\mathcal{B}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_2$
	8mm	$C_{8v} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{C}_8$	Hemimorphe Hemieder	$\mathcal{B}_8$	$\mathcal{A}_8$	$\mathcal{A}_8$	$\mathcal{B}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_1$
	822	$D_8 \equiv \mathbf{D}_8$	Enantiomorphe Hemieder	$\mathcal{E}_8$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{B}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_2$
	8/m	$C_{8h} \equiv \mathbf{C}_8 \times \mathbf{Z}$	Paramorphe Hemieder	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_2$
	$\bar{\mathbf{8}}$	$S_8 \equiv \mathbf{C}_8\mathbf{C}_4$	Tetartoeder II. Art	$\mathcal{D}_4$	$\mathcal{D}_4$	$\mathcal{D}_4$	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_2$
	8	$C_8 \equiv \mathbf{C}_8$	Tetartoeder I. Art	$\mathcal{A}_8$	$\mathcal{A}_8$	$\mathcal{A}_8$	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_8$ in O	$\mathcal{A}_1$

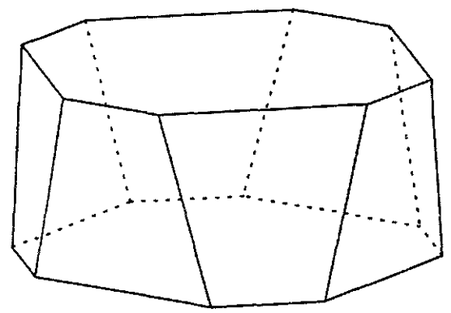


Figur 5.38: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der vollen Diedergruppe* $D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$ *(Holoedrie des oktagonalen Systems)*

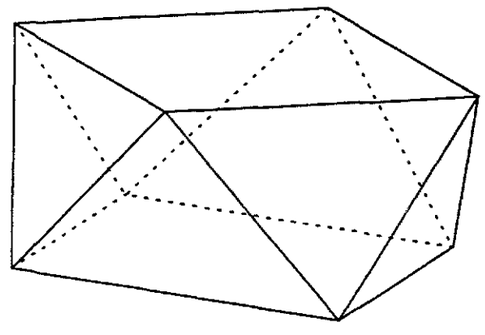


Figur 5.39a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Gruppe $D_{4d} \equiv \mathbf{D_8D_4}$ (Hemiedrie II. Art im oktagonalen System)*

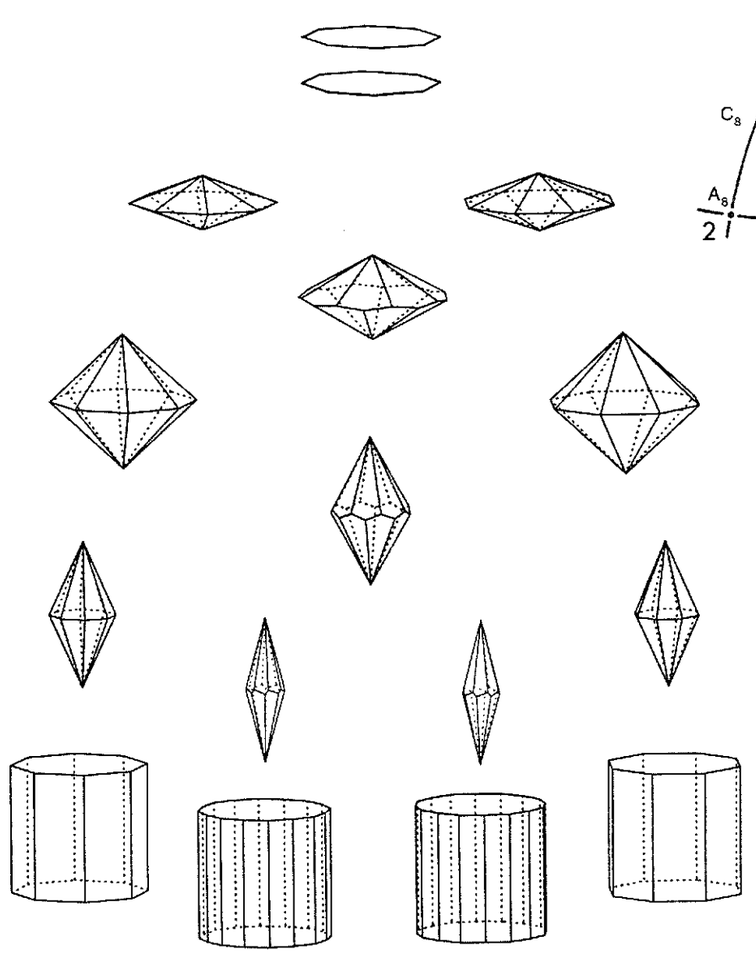


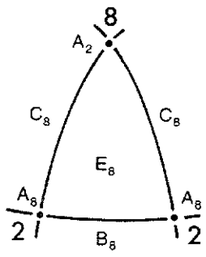


Figur 5.39b: *Abgeschnittenes 4-Antiprisma (G_4): Punktform des Lagetyps* $\mathrm{VII}_2^{\mathrm{II}}$ *bezüglich der Gruppe $D_{4d} \equiv \mathbf{D_8D_4}$ (Hemiedrie II. Art im oktagonalen System)*

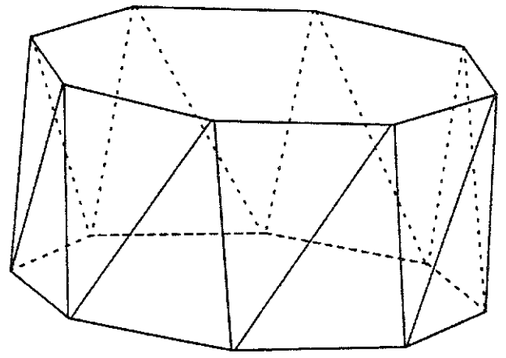


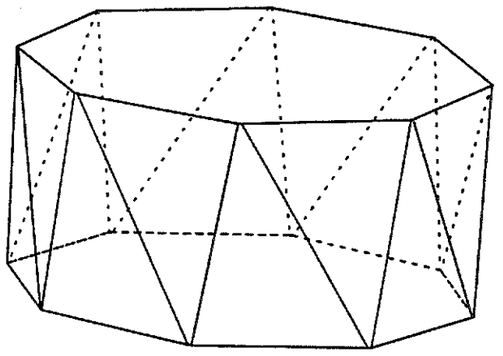
Figur 5.39c: *4-Antiprisma (D_4): Punktform des Lagetyps* $\mathrm{VI}_2^{\mathrm{II}}$ *im Lagetypendreieck der Gruppe $D_{4d} \equiv \mathbf{D_8D_4}$(Hemiedrie II. Art im oktagonalen System)*





Figur 5.40a: *Repräsentanten von Flächenformen (isoedrische Polyeder) im Bereich des Lagetypendreiecks der Gruppe* $D_8 \equiv \mathbf{D}_8$ *(enantiomorphe Hemiedrie des oktagonalen Systems)*



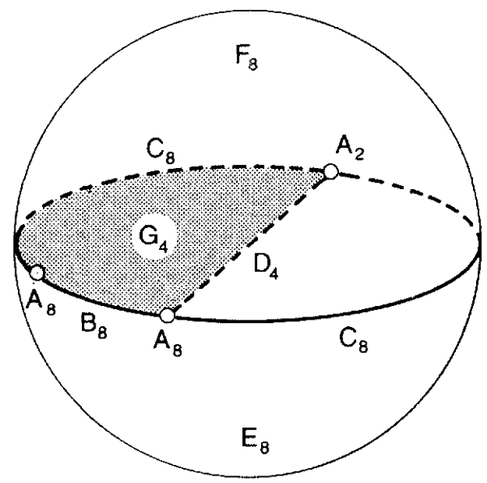


Figur 5.40b: *Enantiomorphe schiefe 8-Antiprismen (*$\mathfrak{E}_8$*): Punktformen des Lagetyps* VII_2^e *im Lagetypendreieck bezüglich der Gruppe* $D_8 \equiv \mathbf{D}_8$ *(enantiomorphe Hemiedrie des oktagonalen Systems)*

Hier folgt schließlich der kontinuierliche Zusammenhang der fünf Polyederklassen des oktagonalen Systems. Der zum Großkreis einer Sphäre ausgedehnte Rand des Lagetypendreiecks der Holoedrie $D_{8h} \equiv \mathbf{D}_8 \times \mathbf{Z}$ des oktagonalen Systems enthält die Punkte $\mathcal{A}_8$ (8-Eck) und $\mathcal{A}_2$ (2-Eck), welche diesen in die Kurvenstücke $\mathcal{C}_8$ (8-Prismen) und $\mathcal{B}_8$ (di-8-Ecke in O) gliedern (**Figur 5.41**).

Der Rand des Lagetypendreiecks für die enantiomorphe Hemiedrie $D_8 \equiv \mathbf{D}_8$ stimmt mit diesem Rand überein. Folglich lassen sich die entsprechenden zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich der Lagetypendreiecke dieser zwei Gruppen, die Holoeder $\mathcal{F}_8$ (di-8-Eck-Prismen) und die enantiomorphen Hemieder $\mathcal{E}_8$ (schiefe 8-Antiprismen), über diesen Rand zusammenfügen.

Hingegen besitzt das Lagetypendreieck der Hemiedrie II. Art $D_{4d} \equiv \mathbf{D}_8\mathbf{D}_4$ nur zwei mit den Seiten des Lagetypendreiecks der Holoedrie übereinstimmende Seiten. Insbesondere grenzt die eindimensionale Polyedermannigfaltigkeit $\mathcal{D}_4$ (4-Antiprismen) nur an diese Hemieder II. Art $\mathcal{G}_4$ (abgeschnittene 4-Antiprismen). Die Polyederklasse $\mathcal{C}_8$ (8-Prismen) ist nur einfach variabel und wird dementsprechend nur durch ein Kurvenstück repräsentiert.



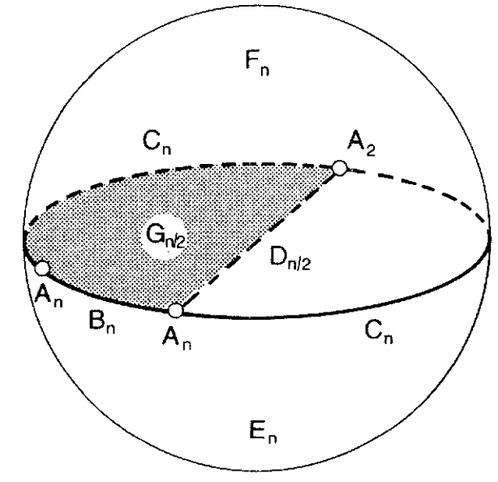
Figur 5.41: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyederklassen des oktagonalen Systems*

4N-gonales System

Der zum Großkreis einer Sphäre ausgedehnte Rand des Lagetypendreiecks der Holoedrie $D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$ des 4N-gonalen Systems enthält die Punkte $\mathcal{A}_n$ (n-Eck) und $\mathcal{A}_2$ (2-Eck), welche diesen in die Kurvenstücke $\mathcal{C}_n$ (n-Prismen) und $\mathcal{B}_n$ (di-n-Ecke in O) gliedern (**Figur 5.42**).

Der Rand des Lagetypendreiecks für die enantiomorphe Hemiedrie $D_n \equiv \mathbf{D}_n$ stimmt mit diesem Rand überein. Folglich lassen sich die entsprechenden zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich der Lagetypendreiecke dieser zwei Gruppen, die Holoeder $\mathcal{F}_n$ (di-n-Eck-Prismen) und die enantiomorphen Hemieder $\mathcal{E}_n$ (schiefe n-Antiprismen), über diesen Rand zusammenfügen.

Hingegen besitzt das Lagetypendreieck der Hemiedrie II. Art $D_{½nd} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{½n}$ nur zwei mit den Seiten des Lagetypendreiecks der Holoedrie übereinstimmende Seiten ($\mathcal{C}_n$ und $\mathcal{B}_n$). Insbesondere grenzt die eindimensionale Polyedermannigfaltigkeit $\mathcal{D}_{n/2}$ (n/2-Antiprismen) nur an diese Hemieder II. Art $\mathcal{G}_{n/2}$ (abgeschnittene n/2-Antiprismen). Die Polyederklasse $\mathcal{C}_n$ (n-Prismen) ist nur einfach variabel und wird dementsprechend nur durch ein Kurvenstück repräsentiert.



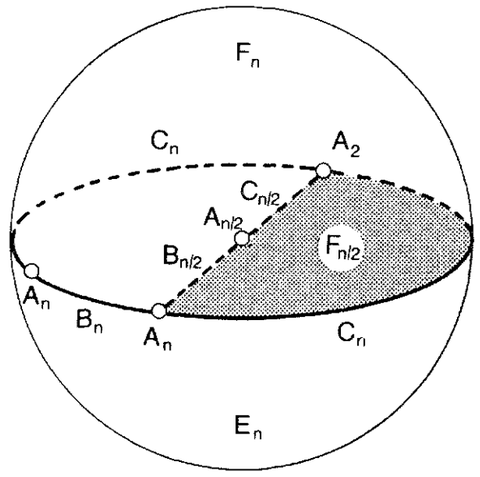
Figur 5.42: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyederklassen des 4N-gonalen Systems*

(4N+2)-gonales System

Der zum Großkreis einer Sphäre ausgedehnte Rand des Lagetypendreiecks der Holoedrie $D_{nh} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$ des (4N+2)-gonalen Systems enthält wie beim 4N-gonalen System die Punkte $\mathcal{A}_n$ (n-Eck) und $\mathcal{A}_2$ (2-Eck), welche diesen in die Kurvenstücke $\mathcal{C}_n$ (n-Prismen) und $\mathcal{B}_n$ (di-n-Ecke in O) gliedern (**Figur 5.43**).

Der Rand des Lagetypendreiecks für die enantiomorphe Hemiedrie $D_n \equiv \mathbf{D}_n$ stimmt mit diesem Rand überein. Folglich lassen sich die entsprechenden zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich der Lagetypendreiecke dieser zwei Gruppen, die Holoeder $\mathcal{F}_n$ (di-n-Eck-Prismen) und die enantiomorphen Hemieder $\mathcal{E}_n$ (schiefe n-Antiprismen), über diesen Rand zusammenfügen.

Hingegen besitzt das Lagetypendreieck der Hemiedrie II. Art $D_{½nh} \equiv \mathbf{D}_n\mathbf{D}_{½n}$ nur eine mit den Seiten des Lagetypendreiecks der Holoedrie übereinstimmende Seite ($\mathcal{C}_n$). Insbesondere grenzen die eindimensionalen Polyedermannigfaltigkeit $\mathcal{B}_{n/2}$ (di-n/2-Ecke) und $\mathcal{C}_{n/2}$ (n/2-Prismen) nur an diese Hemieder II. Art $\mathcal{F}_{n/2}$ (di-n/2-Eck-Prismen). Die Polyederklasse $\mathcal{C}_n$ (n-Prismen) ist nur einfach variabel und wird dementsprechend nur durch ein Kurvenstück repräsentiert.



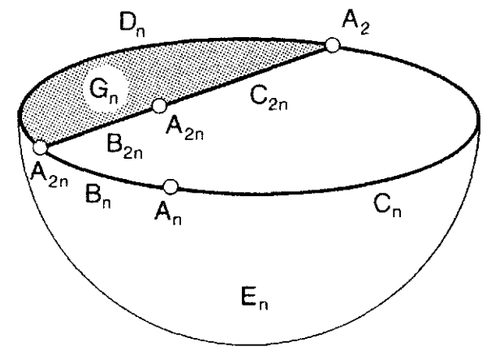
Figur 5.43: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyederklassen des (4N+2)-gonalen Systems*

(2N+1)-gonales System

Der zum Großkreis einer Sphäre ausgedehnte Rand des Lagetypendreiecks der Holoedrie $D_{nd} \equiv \mathbf{D}_n \times \mathbf{Z}$ enthält die Punkte $\mathcal{A}_n$ (n-Eck), $\mathcal{A}_{2n}$ ($2n$-Eck) und $\mathcal{A}_2$ (2-Eck), welche diesen in die Kurvenstücke $\mathcal{D}_n$ (n-Antiprismen), $\mathcal{B}_n$ (di-n-Ecke in O) und $\mathcal{C}_n$ (n-Prismen) gliedern (**Figur 5.44**).

Der Rand des Lagetypendreiecks für die enantiomorphe Hemiedrie $D_n \equiv \mathbf{D}_n$ stimmt mit diesem Rand nur im Lagetyp IV_2^e, das heißt in der eindimensionalen Polyedermannigfaltigkeit $\mathcal{D}_n$ (n-Antiprismen) überein. Die entsprechenden zweidimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten im Bereich der Lagetypendreiecke dieser zwei Gruppen, die Holoeder $\mathcal{G}_n$ (abgeschnittene n-Antiprismen) und die enantiomorphen Hemieder $\mathcal{E}_n$ (schiefe n-Antiprismen), lassen sich also nur über diesen Rand ($\mathcal{D}_n$) zusammenfügen.

Die übrigen eindimensionalen Polyedermannigfaltigkeiten bilden offene Ränder



Figur 5.44: *Kontinuierlicher Zusammenhang der Polyederklassen des (2N+1)-gonalen Systems*

5.7 *Flächen- und Eckenkombinationen von Polyedern*

Die als Ebenen- und Punktbahnen von Symmetriegruppen mit Fixpunkt erzeugbaren Polyeder, die sogenannten Flächenformen oder Punktformen, *isoedrische* bzw. *isogonale* Polyeder genannt, sind vermöge dieser Erzeugung in ihrer gegenseitigen Raumorientierung wohlbestimmt. Die relative Orientierung der im folgenden betrachteten *Kombinationen* von solchen Polyedern ist also durch deren jeweilige Erzeugungen vermöge bestimmter Punktsymmetriegruppen eindeutig festgelegt. Dies bedeutet, daß die an einer Kombination beteiligten Polyeder durch deren Lage*typen* allein charakterisiert werden können, wie in den Tabellen 5.20 und 5.21 gezeigt.

Die Kombination von Polyedern im hier gemeinten Sinne erzeugt wieder konvexe Polyeder. «Kombinationen» von Polyedern in polyedrische Gebilde, die selbst keine Polyeder im Sinne von Abschnitt 5.2 sind, heißen *Polyederzusammensetzungen* oder *Polyederverbände* (englisch: *compounds*); siehe dazu Abschnitt 5.9.

Flächenkombinationen von Polyedern

Die *Flächenkombination* zweier Flächenformen oder isoedrischer Polyeder zu einem symmetrischen Polyeder geschieht durch gegenseitige Abstumpfung oder Abschneidung von Ecken und/oder Kanten des einen Polyeders durch die Flächen des anderen Polyeders (Abschnitt 5.2). Man bildet also den *konvexen Kern* der Flächen der an einer Flächenkombination beteiligten Polyeder. Damit dieses *Flächenkombinationspolyeder* eine Eigensymmetriegruppe hat, also die Gesamtheit seiner Flächen unter einer Symmetriegruppe invariant ist, müssen die erzeugenden Gruppen der beiden Polyeder entweder identisch sein, im Untergruppenverhältnis stehen oder eine gemeinsame nichttriviale Untergruppe besitzen.

Ein anschauliches Verständnis der bei einer Flächenkombination vorkommenden Operationen kann dadurch gewonnen werden, daß sie als Prozesse aufgefaßt werden. Am Anfang sind die beiden zu kombinierenden Polyeder «ineinander», das heißt, das eine liegt ganz im Innern des anderen, ohne daß sie sich in irgendwelchen Elementen berühren oder schneiden. Danach wird entweder das innere Polyeder «ausgedehnt» oder das äußere «geschrumpft», bis es zur «Begegnung» der beiden Polyeder kommt.

In **TABELLE 5.19a** sind die bei der Flächenkombination isoedrischer Polyeder vorkommenden Operationsprozesse angegeben. Hier und in den Tabellen 5.20 und 5.21 bedeuten n-Ecke nicht Polygone in der Ebene, sondern Ecken von Polyedern mit n Kanten. Mit «Ausdehnung» und «Schrumpfung» sind Ausdehnungen bzw. Schrumpfungen der entsprechenden Inkugeln der isoedrischen Polyeder gemeint.

Mannigfaltige Beispiele für diese Operationen findet man in den **Figuren 5.46a** und **5.47a** und den dazugehörigen linken Seiten der Tabellen 5.20 und 5.21. Das der Numerierung der Polyederreihen zugrunde liegende Schema ist jeweils oben in der Mitte der Figuren 4.46ab und 4.47ab angegeben.

Die Flächenkombination von drei und mehr isoedrischen Polyedern kann als eine fortgesetzte Flächenkombination zweier solcher Polyeder aufgefaßt werden.

Wie im Abschnitt 5.3 über Flächenkombinationsformen ausgeführt wurde, müssen drei Arten von Flächenkombinationen isoedrischer Polyeder unterschieden werden, je nachdem, ob die beteiligten Polyeder unabhängig, abhängig oder gar nicht relativ zueinander in der Größe variiert werden können.

Jedes isogonale Polyeder kann als Flächenkombination von drei oder weniger isoedrischen Polyedern aufgefaßt werden (siehe die Tabellen 5.3, 5.9, 5.14, 5.15). Daraus folgt, daß die Flächenkombinationen zweier oder mehrerer isogonaler Polyeder äquivalent ist zu einer Flächenkombination mehrerer isoedrischer Polyeder.

Zwei Flächenkombinationen isogonaler Polyeder sind *äquivalent*, das heißt gehören derselben Klasse an, wenn sie aus Repräsentanten derselben isogonalen Polyederklassen und auf dieselbe Art kombiniert sind.

Eckenkombinationen von Polyedern

Die *Eckenkombination* zweier Punktformen oder isogonaler Polyeder zu einem symmetrischen Polyeder geschieht durch gegenseitige Knickung von Flächen und/oder Kanten des einen Polyeders durch die Ecken des anderen Polyeders. Man bildet also die *konvexe Hülle* der Eckpunkte der an einer Eckenkombination beteiligten Polyeder. Damit dieses *Eckenkombinationspolyeder* eine Eigensymmetriegruppe hat, also die Gesamtheit seiner Ecken unter einer Symmetriegruppe invariant ist, müssen die erzeugenden Gruppen der beiden Polyeder entweder identisch sein, im Untergruppenverhältnis stehen oder eine gemeinsame nichttriviale Untergruppe besitzen.

Wie bei den Flächenkombinationen werden die Eckenkombinationen prozessual aufgefaßt und das entsprechende Kombinationspolyeder schrittweise aus «Ausdehnungen» bzw. «Schrumpfungen» der beteiligten Polyeder entstehend gedacht.

In **TABELLE 5.19b** sind die bei der Eckenkombination isogonaler Polyeder vorkommenden Operationsprozesse näher ausgeführt. Mit «Ausdehnung» und «Schrumpfung» sind Ausdehnungen bzw. Schrumpfungen der entsprechenden Umkugeln der isogonalen Polyeder gemeint.

Mannigfaltige Beispiele für diese Operationen findet man in den **Figuren 5.46b** und **5.47b** und den dazugehörigen rechten Seiten der Tabellen 5.20 und 5.21. Das der Numerierung der Polyederreihen zugrunde liegende Schema ist jeweils oben in der Mitte der Figuren 4.46ab und 4.47ab angegeben.

Die Eckenkombination von drei und mehr isogonalen Polyedern kann als eine fortgesetzte Eckenkombination zweier solcher Polyeder aufgefaßt werden.

Für die Eckenkombinationen isogonaler Polyeder müssen ebenso *drei Arten von Kombinationen* unterschieden werden, je nachdem, ob die beteiligten Polyeder unabhängig, abhängig oder gar nicht relativ zueinander in der Größe variiert werden können.

(1) Eckenkombination oder *Knickung* der Flächen und/oder Kanten eines Polyeders durch die Ecken eines anderen Polyeders, wobei die relative Größe der Polyeder unabhängig voneinander variiert werden kann. Sie wird gekennzeichnet durch den Divisionsstrich /. *Beispiel*: Das 4-Pyramidenhexaeder ist ein durch die Ecken eines Oktaeders in seinen Flächen geknicktes Hexaeder, geschrieben II / I.

(2) Ist die relative Größe der eckenkombinierten Polyeder variierbar, aber nicht unabhängig voneinander, so wird die entsprechende Kombination durch ⊕ gekennzeichnet. *Beispiel*: Der Deltoid-24flächner entsteht durch eine Ausknickung der Flächen und Kanten des Oktaeders durch die Ecken eines Hexaeders bzw. Kuboktaeders. Sobald die noch beliebig wählbare Knickung des Oktaeders durch die Hexaederecken oder Kuboktaederecken vollzogen ist, ist die weitere Knikkung durch das dritte Polyeder eindeutig bestimmt. Das so entstehende Polyeder wird gekennzeichnet durch I ⊕ II ⊕ III.

(3) Falls die relative Größe der eckenkombinierten Polyeder überhaupt nicht variierbar, also fix ist, so wird die entsprechende Kombination gekennzeichnet mit +. *Beispiel*: Das Rhombendodekaeder ist ein in bestimmter Weise durch die Ecken eines Hexaeders in seinen Flächen geknicktes Oktaeder, geschrieben I + II.

Jedes isoedrische Polyeder kann als Eckenkombination von drei oder weniger isogonalen Polyedern aufgefaßt werden. Man muß dazu nur die in den Tabellen 5.3, 5.9, 5.14 und 5.15 angeführten Flächenkombinationen zur Gewinnung isogonaler Polyeder aus der Kombination isoedrischer Polyeder als Eckenkombinationen von isogonalen Polyedern zur Gewinnung der entsprechenden isoedrischen Polyeder interpretieren. Die dabei in Frage kommenden Lagetypen und Kombinationsarten bleiben genau dieselben (siehe dazu die folgende Diskussion der Kombinationsreihendreiecke). Daraus folgt, daß die Eckenkombinationen zweier oder mehrerer isoedrischer Polyeder äquivalent ist zu einer Eckenkombination mehrerer isogonaler Polyeder.

Zwei Eckenkombinationen isoedrischer Polyeder sind *äquivalent*, das heißt gehören derselben Klasse an, wenn sie aus Repräsentanten derselben isoedrischen Polyederklassen und auf dieselbe Art kombiniert sind.

Kombinationen von Polyedern mit variablen und invariablen Lagetypen

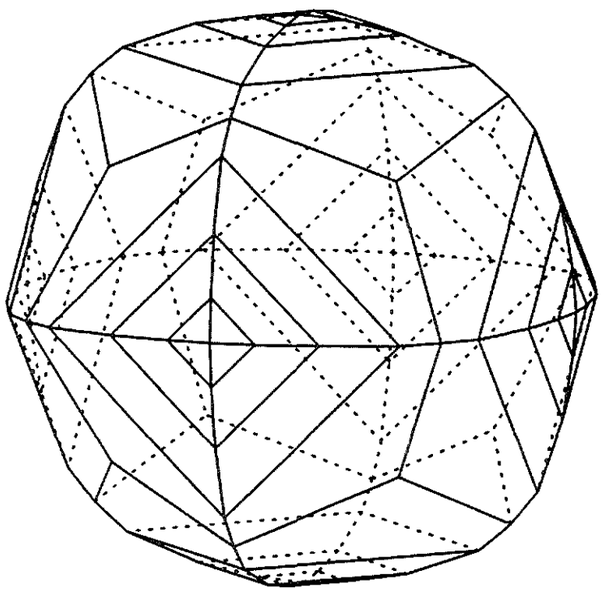
Bei Flächen- oder Eckenkombinationen von isoedrischen bzw. isogonalen Polyedern mit invariablen Lagetypen I, II, III kann derselbe Lagetyp für die beteiligten Kombinationspolyeder nicht mehrfach auftreten. Deshalb läßt sich ein vollständiger Überblick aller Klassen solcher Kombinationspolyeder aufstellen. Dies wird weiter unten anhand des Flächen- und Eckenkombinationsreihendreiecks gezeigt. Diese Einschränkung gilt nicht für die Flächen- oder Eckenkombinationen von isoedrischen bzw. isogonalen Polyedern mit einfach oder zweifach variablen Flächenlagen (Lagetypen IV, V, VI bzw. VII). Dort können im Prinzip beliebig (aber endlich) viele Polyeder desselben Lagetyps, aber mit verschiedenen Lageparametern miteinander kombiniert werden.

Die folgenden Figuren zeigen das Prinzip einer solchen iterierbaren Kombination. In **Figur 5.45a** ist eine Flächenkombination von vier in ihren Parametern verschiedenen Deltoid-24flächnern (Flächenlagetyp IV) dargestellt. Hier werden die in den drei Hauptrichungen liegenden Ecken des innersten und «steilsten», das heißt «oktaedrischen» Deltoid-24flächners durch die vier Flächen einer 4-er Ecke des nächsten, weiter außen liegenden Deltoid-24flächners abgestumpft. Die weiter außen liegenden Deltoid-24flächner haben immer «flachere» Flächenneigungen, sie werden immer «hexaedrischer» (siehe dazu die Polyederreihe auf der linken Seite des Lagetypendreiecks von Figur 5.30a).

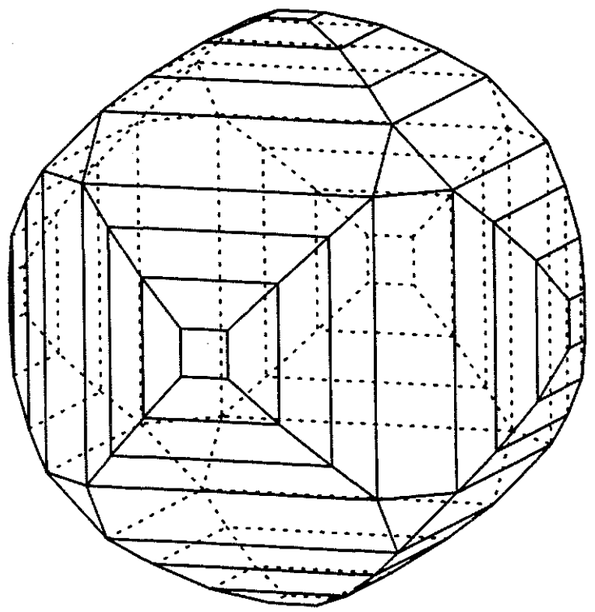
In **Figur 5.45b** ist eine Eckenkombination von vier in ihren Parametern verschiedenen Rhombenkuboktaedern (Punktlagetyp IV) dargestellt. Hier werden die in den drei Hauptrichtungen liegenden quadratischen Flächen des innersten Rhombenkuboktaeders fortgesetzt durch die vier Punkte der quadratischen Flächen der nächsten, weiter außen liegenden Rhombenkuboktaeder geknickt. Das innerste Rhombenkuboktaeder ist «hexaedrisch» und die weiter außen liegenden Rhombenkuboktaeder werden immer «oktaedrischer» (siehe dazu die Polyederreihe auf der linken Seite des Lagetypendreiecks von Figur 5.31b).

Flächenkombinationsreihendreieck

Das Flächenkombinationsreihendreieck gibt eine vollständige Übersicht aller Klassen von Flächenkombinationspolyedern aus isoedrischen Polyedern der vollen Oktaedergruppe und der vollen Ikosaedergruppe mit den invariablen Lagetypen I, II und III. Für die volle Oktaedergruppe sind dies das Hexaeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder und für die volle Ikosaedergruppe das Pentagondodekaeder, Ikosaeder und der Rhomben-30flächner. Die erzeugenden Gruppen der an diesen Kombinationen beteiligten Polyeder sind identisch.



Figur 5.45a: *Vierfache Flächenkombination eines Deltoid-24flächners*

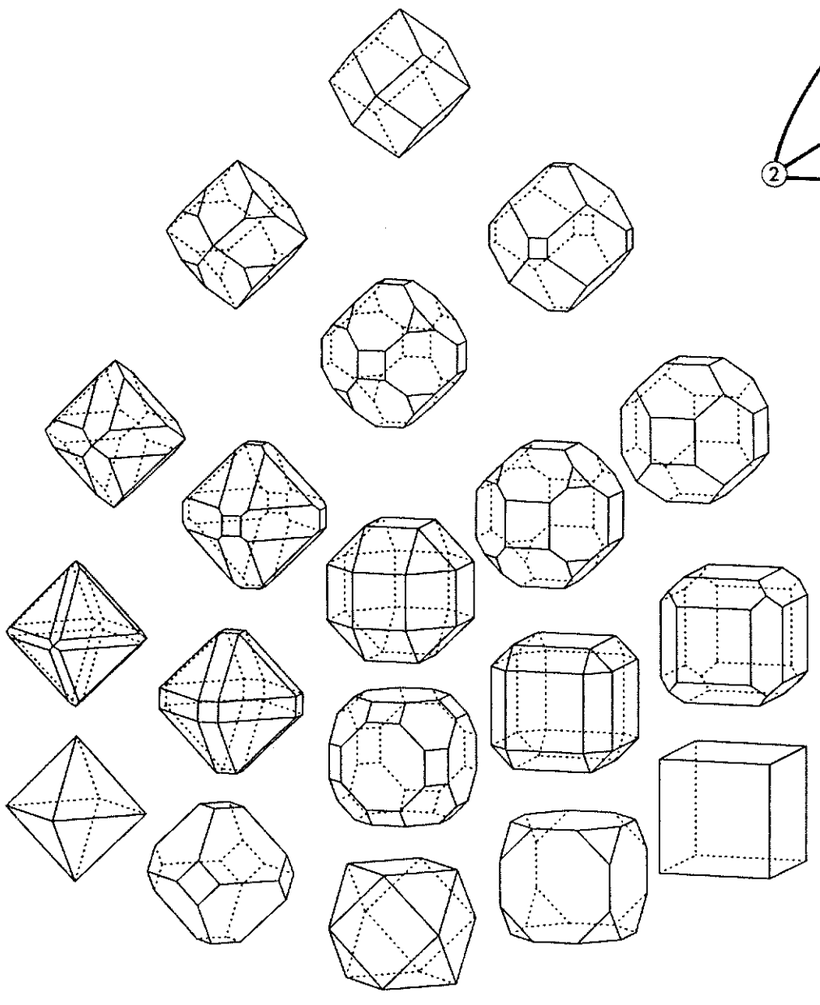


Figur 5.45b: *Vierfache Eckenkombination eines Rhombenkuboktaeders*

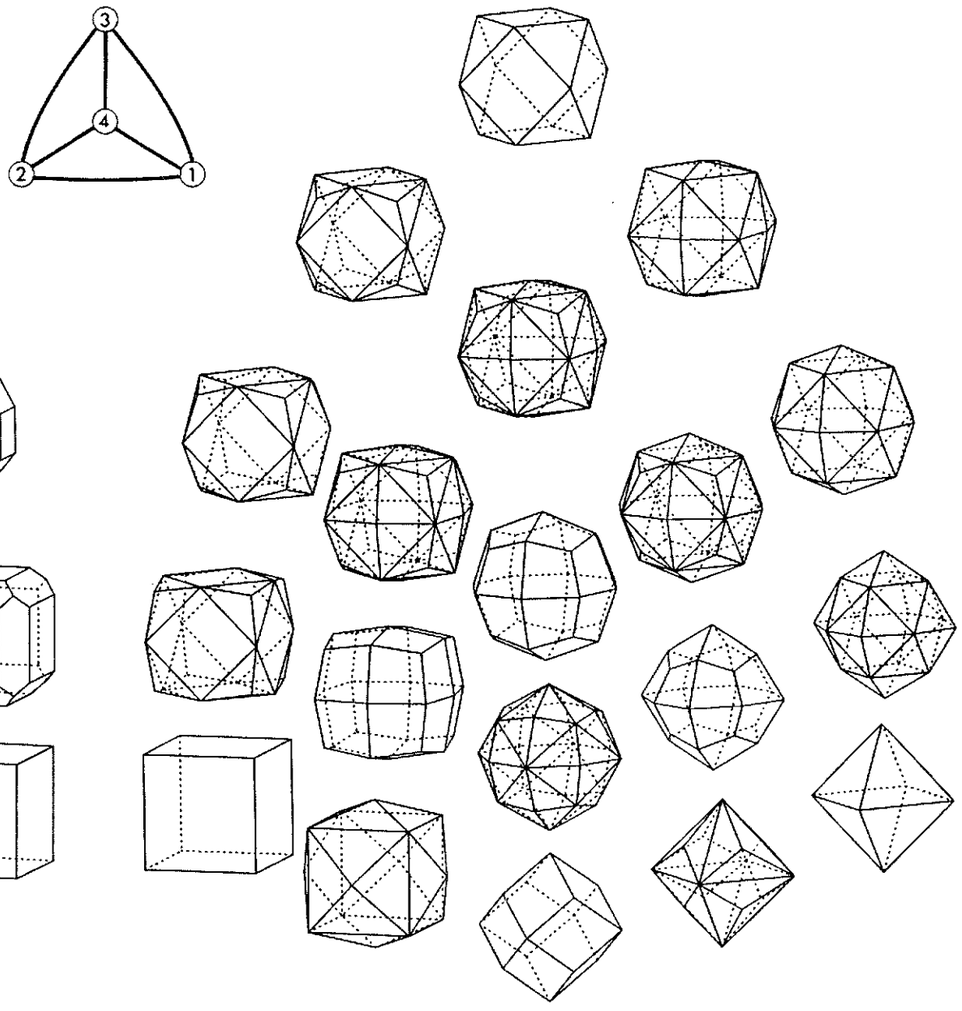
TABELLE 5.19a: ***Flächenkombinationen isoedrischer Polyeder***	**TABELLE 5.19b:** ***Eckenkombinationen isogonaler Polyeder***
Abstumpfung von Kanten des Polyeders $\mathcal{P}$ durch Flächen des Polyeders Q, wobei die Flächen von $\mathcal{P}$ fest bleiben und Q schrumpft. *Dies ist äquivalent zu*: *Hebung von Kanten* des Polyeders $\mathcal{P}$ in Flächen des Polyeders Q, wobei die Flächen von Q fest bleiben und $\mathcal{P}$ sich ausdehnt.	*Ausknickung von Kanten* des Polyeders $\mathcal{P}$ durch Ecken des Polyeders Q, wobei die Ecken von $\mathcal{P}$ fest bleiben und Q sich ausdehnt. *Dies ist äquivalent zu*: *Abknickung von Kanten* des Polyeders $\mathcal{P}$ in Ecken des Polyeders Q, wobei die Ecken von Q fest bleiben und $\mathcal{P}$ schrumpft.
Abstumpfung von n-Ecken des Polyeders $\mathcal{P}$ durch Flächen des Polyeders Q, wobei die Flächen von $\mathcal{P}$ fest bleiben und Q schrumpft. *Dies ist äquivalent zu*: *Hebung von n-Ecken* des Polyeders $\mathcal{P}$ in Flächen des Polyeders Q, wobei die Flächen von Q fest bleiben und $\mathcal{P}$ sich ausdehnt.	*Hebung von n-Pyramiden* auf n-Flächen des Polyeders $\mathcal{P}$ in Ecken des Polyeders Q, wobei die Ecken von $\mathcal{P}$ fest bleiben und Q sich ausdehnt. *Dies ist äquivalent zu*: *Abknickung von n-Pyramiden* des Polyeders $\mathcal{P}$ in Ecken des Polyeders Q, wobei die Ecken von Q fest bleiben und $\mathcal{P}$ schrumpft.

TABELLE 5.20 : *Geometrische Operationen bei den Polyederreihen im Flächenkombinationsdreieck und Eckenkombinationsdreieck der vollen Oktaedergruppe*

Polyederreihe	*Geometrische Operation(en) im FLÄCHENKOMBINATIONS-REIHENDREIECK*	*Lagetypen der Kombinations-polyeder*	*Geometrische Operation(en) im ECKENKOMBINATIONS-REIHENDREIECK*	*Lagetypen der Kombinationspolyeder der Dualformen*
1 → (1–2)	Abstumpfung der 8 3-Ecken des Hexaeders durch Oktaederflächen: Hexaeder → Hexaederstumpf → Kuboktaeder	I → I/II → I+II	Hebung von 3-Pyramiden auf Oktaederflächen in Hexaederecken: Oktaeder → 3-Pyramidenoktaeder → Rhombendodekaeder	II → V → III
(1–2) → 1	Hebung der 6 4-Ecken des Oktaeders in Hexaederflächen: Oktaeder → Oktaederstumpf → Kuboktaeder	II → II/I → I+II	Hebung von 4-Pyramiden auf Hexaederflächen in Oktaederecken: Hexaeder → 4-Pyramidenhexaeder → Rhombendodekaeder	I → VI → III
1 → 3	Abstumpfung der 12 Kanten des Hexaeders durch Rhombendodekaederflächen	I → I/III → III	Ausknickung der 12 Kanten des Oktaeders an Kuboktaederecken	II → II+IV → I+II
3 → 1	Hebung der 6 4-Ecken des Rhombendodekaeders in Hexaederflächen	III → III/I → I	Hebung von 4-Pyramiden auf den 6 4-Flächen des Kuboktaeders in Oktaederecken	I+II → IV+II → II
2 → 3	Hebung der 12 Kanten des Oktaeders in Rhombendodekaederflächen	II → II/III → III	Abknickung der 12 Kanten des Hexaeders an Kuboktaederecken	I → I+IV → I+II
3 → 2	Abstumpfung der 8 3-Ecken des Rhombendodekaeders durch Oktaederflächen	III → III/II → II	Hebung von 3-Pyramiden auf den 8 3-Flächen des Kuboktaeders in Hexaederecken	I+II → IV+I → I
1 → 4	Abstumpfung der 8 3-Ecken und 12 Kanten des Hexaeders durch Oktaederflächen bzw. Rhombendodekaederflächen	I → I/(II/III) → I⊕II⊕III	Hebung von 8 3-Ecken in den 8 3-Flächen und Ausknickung der 12 Kanten des Oktaeders in Hexaederecken bzw. Kuboktaederecken	II → IV
2 → 4	Hebung der 6 4-Ecken und 12 Kanten des Oktaeders in Hexaederflächen bzw. Rhombendodekaederflächen	II → II/(I/III) → I⊕II⊕III	Hebung von 6 4-Ecken in den 6 4-Flächen und Abknickung der 12 Kanten des Hexaeders in Oktaederecken bzw. Kuboktaederecken	I → IV
3 → 4	Hebung der 8 3-Ecken und 6 4-Ecken des Rhombendodekaeders in Kuboktaederflächen: Rhombendodekaeder → «Rhombendodekaederstumpf» → Rhombenkuboktaeder	III → III/(I+II) → I⊕II⊕III	Hebung von 3-Pyramiden und 4-Pyramiden auf den 8 3-Flächen und 6 4-Flächen des Kuboktaeders in Rhombendodekaederecken: Kuboktaeder → «Pyramidenkuboktaeder» → Deltoid-24flächner	I+II → IV+IV → IV
(1–2) → 4	Hebung der 12 4-Ecken des Kuboktaeders in Rhombendodekaederflächen: Kuboktaeder → Kuboktaederstumpf → Rhombenkuboktaeder	I+II → (I+II)/III → I⊕II⊕III	Hebung von 12 4-Pyramiden auf den Rhombendodekaederflächen in Kuboktaederecken: Rhombendodekaeder → 6-Pyramidenoktaeder → Deltoid-24flächner	III → VII → IV



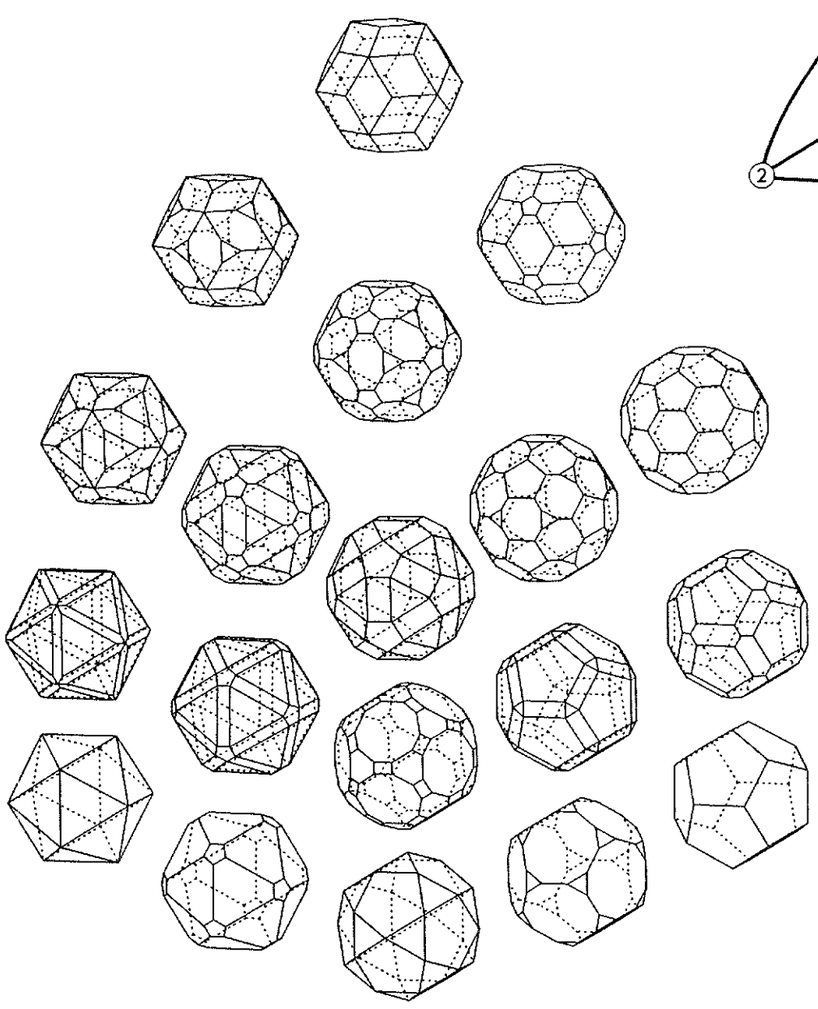
Figur 5.46a: *Flächenkombinationsreihendreieck der invariablen isoedrischen Polyeder der vollen Oktaedergruppe*



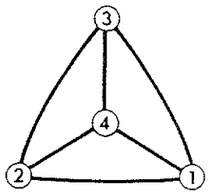
Figur 5.46b: *Eckenkombinationsreihendreieck der invariablen isogonalen Polyeder der vollen Oktaedergruppe*

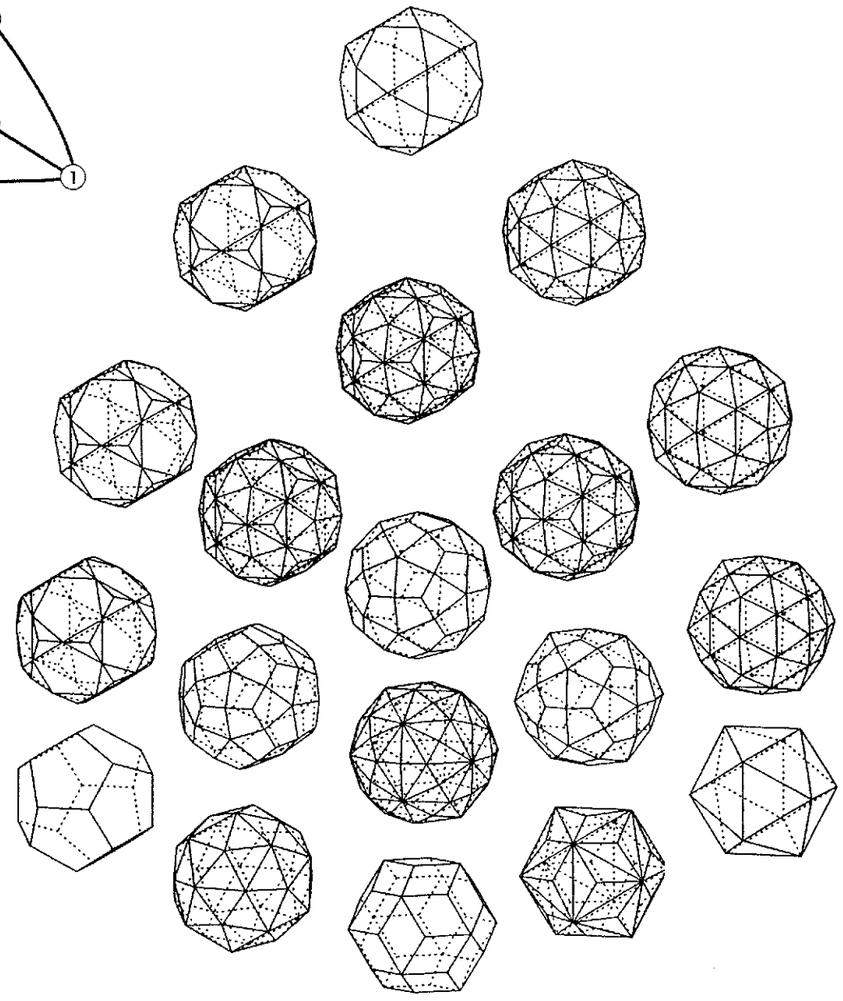
TABELLE 5.21: *Geometrische Operationen bei den Polyederreihen im Flächenkombinationsdreieck und Eckenkombinationsdreieck der vollen Ikosaedergruppe*

Polyederreihe	*Geometrische Operation(en) im FLÄCHENKOMBINATIONS-REIHENDREIECK*	*Lagetypen der Kombinationspolyeder*	*Geometrische Operation(en) im ECKENKOMBINATIONS-REIHENDREIECK*	*Lagetypen der Kombinationspolyeder der Dualformen*
1 → (1–2)	Abstumpfung der 20 3-Ecken des Dodekaeders durch Ikosaederflächen: Dodekaeder → Dodekaederstumpf → Ikosidodekaeder	I → I/II → I+II	Hebung von 3-Pyramiden auf Ikosaederflächen in Dodekaederecken: Ikosaeder → 3-Pyramidenikosaeder → Rhomben-30flächner	II → V → III
(1–2) → 1	Hebung der 12 5-Ecken des Ikosaeders in Dodekaederflächen: Ikosaeder → Ikosaederstumpf → Ikosidodekaeder	II → II/I → I+II	Hebung von 5-Pyramiden auf Dodekaederflächen in Ikosaederecken: Dodekaeder → 5-Pyramidendodekaeder → Rhomben-30flächner	I → VI → III
1 → 3	Abstumpfung der 30 Kanten des Dodekaeders durch Rhomben-30flächnerflächen	I → I/III → III	Ausknickung der 30 Kanten des Ikosaeders in Ikosidodekaederecken	II → II+IV → I+II
3 → 1	Hebung der 12 5-Ecken des Rhomben-30flächners in Dodekaederflächen	III → III/I → I	Hebung von 5-Pyramiden auf den 12 5-Flächen des Ikosidodekaeders in Ikosaederecken	I+II → IV+II → II
2 → 3	Hebung der 30 Kanten des Ikosaeders in Rhomben-30flächnerflächen	II → II/III → III	Abknickung der 30 Kanten des Dodekaeders an Ikosidodekaederecken	I → I+IV → I+II
3 → 2	Abstumpfung der 20 3-Ecken des Rhomben-30flächners durch Ikosaederflächen	III → III/II → II	Hebung von 3-Pyramiden auf den 20 3-Flächen des Ikosidodekaeders in Dodekaederecken	I+II → IV+I → I
1 → 4	Abstumpfung der 20 3-Ecken und 30 Kanten des Dodekaeders durch Ikosaederflächen bzw. Rhomben-30flächnerflächen	I → I/(II/III) → I⊕II⊕III	Hebung von 20 3-Ecken in den 20 3-Flächen und Ausknickung der 30 Kanten des Ikosaeders in Dodekaederecken bzw. Ikosidodekaederecken	II → IV
2 → 4	Hebung der 12 5-Ecken und 30 Kanten des Ikosaeders in Dodekaederflächen bzw. Rhomben-30flächnerflächen	II → II/(I/III) → I⊕II⊕III	Hebung von 12 5-Ecken in den 12 5-Flächen und Abknickung der 30 Kanten des Dodekaeders in Ikosaederecken bzw. Ikosidodekaederecken	I → IV
3 → 4	Hebung der 20 3-Ecken und 12 5-Ecken des Rhomben-30flächners in Ikosidodekaederflächen: Rhomben-30flächner → «Rhomben-30flächnerstumpf» → Rhombenikosidodekaeder	III → III/(I+II) → I⊕II⊕III	Hebung von 3-Pyramiden und 5-Pyramiden auf den 20 3-Flächen und den 12 5-Flächen des Ikosidodekaeders in Rhomben-30flächnerecken: Ikosidodekaeder → «Pyramidenikosidodekaeder» → Deltoid-60flächner	I+II → IV+IV → IV
(1–2) → 4	Hebung der 30 4-Ecken des Ikosidodekaeders in Rhomben-30flächnerflächen: Ikosidodekaeder → Ikosidodekaederstumpf → Rhombenikosidodekaeder	I+II → (I+II)/III → I⊕II⊕III	Hebung von 30 4-Pyramiden auf den Rhomben-30flächnerflächen in Ikosidodekaederecken: Rhomben-30flächner → 6-Pyramidenikosaeder → Deltoid-60flächner	III → VII → IV



Figur 5.47a: *Flächenkombinationsreihendreieck der invariablen isoedrischen Polyeder der vollen Ikosaedergruppe*





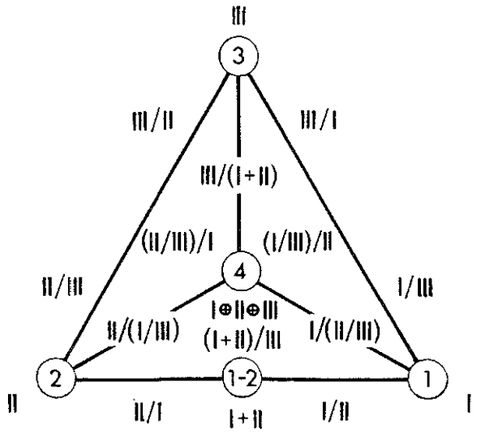
Figur 5.47b: *Eckenkombinationsreihendreieck der invariablen isogonalen Polyeder der vollen Ikosaedergruppe*

TABELLE 5.20 und 5.21: *Geometrische Operationen im Flächenkombinationsreihendreieck*. Hier sind die in den **Figuren 5.46a und 5.47a** abgebildeten Flächenkombinationen im einzelnen beschrieben. Die erste Kolonne gibt die entsprechende Polyederreihe an und die zweite Kolonne die für diese Reihen relevanten geometrischen Operationen und Polyederklassen. Alle in diesen Tabellen angeführten speziellen Operationen sind entweder gleich einer der in Tabelle 5.19a angeführten Operationen oder Zusammensetzungen derselben. Hier bedeuten *n*-Ecke nicht Polygone in der Ebene, sondern Ecken von Polyedern mit *n* Kanten.

In der dritten Kolonne werden die jeweils entstehenden Kombinationspolyeder mit der in den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 eingeführten Symbolik für die Flächenlagetypen und deren Kombinationsarten festgehalten.

Eckenkombinationsreihendreieck

Das Eckenkombinationsreihendreieck gibt eine vollständige Übersicht aller Klassen von Eckenkombinationspolyedern aus isogonalen Polyedern der vollen Oktaedergruppe und der vollen Ikosaedergruppe mit den invariablen Lagetypen I, II und III. Für die volle Oktaedergruppe sind dies das Oktaeder, Hexaeder und Kuboktaeder und für die volle Ikosaedergruppe das Ikosaeder, Pentagondodekaeder und Ikosidodekaeder. Die erzeugenden Gruppen der an diesen Kombinationen beteiligten Polyeder sind identisch.



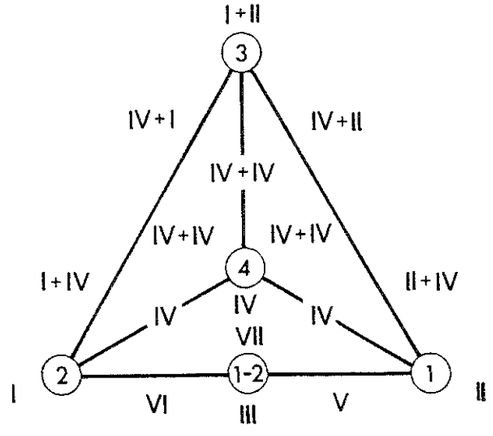
Figur 5.48: *Kombinationsreihendreieck*

TABELLE 5.20 und 5.21: *Geometrische Operationen im Eckenkombinationsreihendreieck*. Hier sind die in den **Figuren 5.46b und 5.47b** abgebildeten Eckenkombinationen im einzelnen beschrieben. Die erste Kolonne gibt die entsprechende Polyederreihe an und die vierte Kolonne die für diese Reihen relevanten geometrischen Operationen. Alle in diesen Tabellen angeführten speziellen Operationen sind entweder gleich einer der in Tabelle 5.19b angeführten Operationen oder Zusammensetzungen derselben.

In der dritten Kolonne werden die jeweils entstehenden Kombinationspolyeder im Sinne der weiter oben eingeführten Symbolik für die Arten von Eckenkombinationen festgehalten.

Kombinationsreihendreieck

In **Figur 5.48** sind die für das Flächen- und Eckenkombinationsreihendreieck geltenden Eigenschaften zusammenfassend dargestellt, insbesondere die Lagetypen und Kombinationsarten der beteiligten isoedrischen bzw. isogonalen Polyeder. Hier zeigt sich die Fruchtbarkeit der Lagetypen- und Kombinationsartensymbolik, da diese vom Unterschied isoedrischer und isogonaler Polyeder unabhängig ist.



Figur 5.49: *Dualformendreieck*

Dualformendreieck

Der Aufbau des Flächenkombinationsreihendreiecks und des Eckenkombinationsreihendreiecks wurde dual durchgeführt. Man beachte allerdings, daß die sich in den Tabellen 5.20 und 5.21 entsprechenden Operationen beim Flächenkombinationsreihendreieck und dem Eckenkombinationsreihendreieck nicht in jedem einzelnen Falle streng zueinander dual sind. Dies hängt damit zusammen, daß die Polyederreihen auf verschiedene Weise konstruiert wurden. Es liegen jedoch zu den jeweiligen dualen Operationen äquivalente Operationen vor, die garantieren, daß die resultierenden Polyeder tatsächlich zueinander dual sind (siehe dazu die äquivalenten Operationen in Tabelle 5.19). Damit ergibt sich, daß die an derselben Stelle stehenden Polyeder in den jeweiligen Kombinationsreihendreiecken isoedrischer und isogonaler Polyeder zueinander dual sind.

Man beachte, daß etwa die Polyeder des zum Flächenkombinationsreihendreieck dualen Eckenkombinationsreihendreiecks keine Flächenkombinationsformen der drei Polyeder in den Ecken des letzteren Dreiecks sind. Dies hängt damit zusammen, daß die Flächenkombinationen der Dualformen zweier isoedrischer Polyeder $\mathcal{P}$ und Q im allgemeinen nicht mit den Dualformen der Flächenkombinationsformen von $\mathcal{P}$ und Q zusammenfallen.

Dagegen lassen sich die Dualformen von flächenkombinierten isoedrischen Polyedern auch als Flächenkombinationspolyeder auffassen und nicht nur, wie bisher, als eckenkombinierte isogonale Polyeder. Umgekehrt lassen sich die Dualformen der eckenkombinierten isogonalen Polyeder auch als Eckenkombinationspolyeder auffassen und nicht nur, wie bisher, als flächenkombinierte isoedrische Polyeder. Die letzte, fünfte Kolonne der Tabellen 5.20 und 5.21 gibt die entsprechenden Kombinationen an. Sie sind in **Figur 5.49** zusammenfassend dargestellt.

Struktur von Kombinationsreihendreieck und Dualformendreieck

Aus **Figur 5.48** liest man zum Beispiel ab, daß Dualformen von flächen- bzw. eckenkombinierten isoedrischen oder isogonalen Polyedern wieder isoedrisch bzw. isogonal sein können. Dies hat die interessante Konsequenz, daß im Kombinationsreihendreieck zusammen mit dem entsprechenden Dualdreieck alle Polyederklassen der sieben Lagetypen vorkommen. Dies läßt sich unmittelbar aus den Figuren 5.48 und 5.49 ablesen. Umgekehrt können Dualformen von isoedrischen oder isogonalen Polyedern Flächen- bzw. Eckenkombinationsformen sein.

So gehören etwa im Flächenkombinationsdreieck der vollen Oktaedergruppe (Figur 5.46a) die Polyeder der Reihe **1–2** (Hexaeder, Hexaederstumpf, Kuboktaeder, Oktaederstumpf, Oktaeder) alle zu den isogonalen Polyedern, ebenso alle Polyeder auf dem Rand und innerhalb des Dreiecks **1–2–4**, insbesondere das in der Mitte stehende Rhombenkuboktaeder. Alle übrigen Polyeder sind reine Kombinationen, das heißt, sie gehören keiner der Klassen isoedrischer oder isogonaler Polyeder an. Innerhalb der Dreiecke **2–3–4** und **1–4–3** befinden sich Varianten eines einzigen Polyeders, das sinngemäß «Rhombendodekaederstumpf» genannt wird.

Beim dazugehörigen Dualformendreieck sind die Polyeder in den Ecken des Dreiecks **1–2–4** (Oktaeder, Hexaeder, Deltoid-24flächner) sowie auf dem Rand desselben, insbesondere in der Reihe **1–2**, einfache Flächenformen (isoedrische Polyeder), ebenso die Polyeder innerhalb des Dreiecks **1–2–4** (6-Pyramidenoktaeder). Diese lassen sich alle auch als Flächenkombinationen isoedrischer Polyeder auffassen. Innerhalb der Dreiecke **2–3–4** und **1–4–3** befinden sich Varianten eines Polyeders, das sinngemäß «Pyramidenkuboktaeder» genannt wird. Dies ist eine reine Kombinationsform.

Zusammenfassend gilt für den Aufbau des Kombinationsreihendreiecks: Beim Flächen- oder Eckenkombinationsreihendreieck befinden sich innerhalb und auf dem Rand des Dreiecks **1–2–4** nur isogonale bzw. isoedrische Polyeder. Denn die entsprechenden Dualformen sind isoedrisch bzw. isogonal. Dies zeigt sich daran, daß innerhalb und auf dem Rand des Teildreiecks **1–2–4** des Dualformendreiecks (Figur 5.49) nur einfache Lagetypen vorkommen. Alle übrigen Polyeder des Kombinationsreihendreiecks sind reine Kombinationsformen, wobei alle Polyeder innerhalb der Teildreiecke **2–3–4** und **1–4–3** Varianten einer einzigen Klasse von Kombinationspolyedern sind.

Zwei *reine Kombinationspolyeder*, das heißt Kombinationspolyeder, die weder isoedrisch noch isogonal sind, sind *äquivalent*, gehören derselben Klasse an, wenn sie aus Repräsentanten derselben Polyederklasse kombiniert sind.

Mit dieser Definition gibt es bei den Kombinationsformen aus invariablen Polyedern bezüglich der vollen Oktaedergruppe und der vollen Ikosaedergruppe sowohl im Flächen- wie im Eckenkombinationsdreieck je 3 Klassen von reinen Kombinationsformen, insgesamt also 12 Klassen.

Da es bei den Diedergruppen keine geschlossenen bzw. nicht planaren Flächen- oder Punktformen, das heißt Polyeder, gibt ohne freie Parameter, sind die oben genannten Klassen zugleich alle Klassen von reinen Kombinationsformen bezüglich Polyedern mit invariablen Lagetypen für alle Punktsymmetriegruppen.

5.8 *Klassifizierung von symmetrischen Polyedern*

Die allgemeinste Klasse von *konvexen* Polyedern, die bereits betrachtet wurden, sind die *symmetrischen Polyeder*, das heißt Polyeder mit einer Eigensymmetriegruppe (siehe dazu und zum folgenden auch Abschnitt 5.2). Alle hier betrachteten Symmetriegruppen sind nichttriviale Punktgruppen, das heißt Gruppen, welche nicht mit der Identität **I** zusammenfallen. Es folgt eine Reihe von Definitionen verschiedener Polyederklassen und eine Diskussion einiger Beziehungen (ohne Beweise) zwischen diesen Klassen. Das Resultat wird in Tabelle 5.25 zusammengefaßt. Sie sollte immer wieder konsultiert werden, falls der Überblick zu verschwinden droht.

Die Menge der Flächen und Ecken eines symmetrischen Polyeders zerfallen notwendigerweise in disjunkte (elementfremde) Klassen, die jeweils eine Flächen- bzw. Eckenbahn bezüglich der Eigensymmetriegruppe bilden. Gibt es k verschiedene Flächenklassen (Flächenbahnen) und m verschiedene Eckenklassen (Eckenbahnen), so nennt man diese Polyeder *k-isoedrisch* und *m-isogonal*. Für $k = 1$ und $m = 1$ schreibt man wie weiter oben einfach *isoedrisch* und *isogonal*.

Symmetrische konvexe Polyeder

- Eigensymmetriegruppe
- k-isoedrisch und m-isogonal, $k \geq 1$ und $m \geq 1$

Isoedrische und isogonale konvexe Polyeder und deren Teilklassen

Die Klassen der isoedrischen und isogonalen Polyeder bilden die wichtigsten Teilklassen der Klasse der symmetrischen Polyeder. Für die Anzahl der Klassen bedeutet **N**, daß es abzählbar unendlich viele gibt.

Isoedrische konvexe Polyeder
(Punktgruppen-Flächenpolyeder; gleichflächig, flächentransitiv, flächenäquivalent)

Definition:

- Alle Flächen sind symmetrieäquivalent: sie haben denselben Lagetyp

Eigenschaften:

- Es gibt eine Inkugel
- m-isogonal, $m \leq 3$

Klassen: $(5 + 3 \cdot \mathbf{N}) + (13 + 2 \cdot \mathbf{N}) + 5$

Isogonale konvexe Polyeder
(Punktgruppen-Punktpolyeder; (gleicheckig, eckentransitiv, eckenäquivalent)

Definition:

- Alle Ecken sind symmetrieäquivalent: sie haben denselben Lagetyp

Eigenschaften:

- Es gibt eine Umkugel
- k-isoedrisch, $k \leq 3$

Klassen: $(5 + 3 \cdot \mathbf{N}) + (13 + 2 \cdot \mathbf{N}) + 5$

Die symmetrieäquivalenten Flächen und Ecken bei isoedrischen bzw. isogonalen Polyedern brauchen weder regulär noch kongruent zu sein.

Im Abschnitt 5.2 wurden zwei (Klassen von ähnlichkeitsäquivalenten) Polyeder mit derselben Eigensymmetrie als *äquivalent* bezeichnet, wenn ihre Flächen bzw. Ecken denselben Lagetyp haben. Entsprechend diesem Lagetyp gibt es je $7, 9 + 2 \cdot \mathbf{N}$, $7 + 3 \cdot \mathbf{N}$ Polyeder*klassen* mit bzw. 0, 1, 2 freien Parametern, je nachdem, ob dieser Typ I, II, III (invariable Lagen) bzw. IV, V, VI (einfach variable Lagen) bzw. VII (zweifach variable Lagen) ist. Diese Klassen verteilen sich wie folgt auf die Symmetriegruppen: Oktaedergruppe: 15, Ikosaedergruppe: 8, Diedergruppen: $5 \cdot \mathbf{N}$.

Wie aus den Tabellen 5.3, 5.9, 5.14 und 5.15 hervorgeht, sind die isogonalen Polyeder Flächenkombinationen von höchstens drei isoedrischen Polyedern. Aus Abschnitt 5.7 hat sich ergeben, daß die isoedrischen Polyeder Eckenkombinationen von höchstens drei isogonalen Polyedern sind.

TABELLEN 5.22 und 5.23: *Klassen von isoedrischen und isogonalen Polyedern.* Die Anzahl der *freien Parameter* ist für jede isoedrische und isogonale Polyederklasse aufgelistet. Weiter ist die Anzahl der **F**lächen, **E**cken und **K**anten angegeben sowie die verschiedenen Flächenarten.

Dabei sind *Deltoide*, auch gleichschenklige *Drachenvierecke* genannt, Vierecke, welche spiegelsymmetrisch sind bezüglich einer Diagonalen. *Rhomben* oder Rauten sind Vierecke, welche symmetrisch sind bezüglich beider Diagonalen sowie bezüglich ihres Mittelpunktes; sie sind demnach Parallelogramme mit gleichlangen Seiten. *Gleichschenklige Trapeze* haben zwei parallele Seiten und sind symmetrisch bezüglich einer ihrer Mittellinien. *Reguläre* n-Ecke sind gleichseitige und gleichwinklige n-Ecke oder n-Seite. Mit *schiefen* n-Ecken sind nicht reguläre n-Ecke gemeint.

Für die konkreten Symmetrieeigenschaften sowie die Lagetypen dieser Polyeder wird auf die **TABELLEN 5.3**, **5.9**, **5.14** und **5.15** verwiesen. Dort sind auch die meisten geläufigen Namen dieser Polyeder angegeben.

TABELLE 5.22: *Klassen von isoedrischen und isogonalen konvexen Polyedern, welche* ***keine*** *dualarchimedischen bzw. archimedischen Repräsentanten enthalten*

ISOEDRISCHE POLYEDERKLASSEN							*ISOGONALE POLYEDERKLASSEN*					
Name	***F***	***Flächenarten***	***E***	***Figur***	***K***	*freie Parameter*	***Name***	***E***	***F***	***Flächenarten***	***Br***	***RC/ GS***
Irreguläres Pentagondodekaeder	12	12 schiefe 5-Ecke	20	5.10	30	1	Irreguläres Ikosaeder	12	20	8 reguläre 3-Ecke 12 gleichschenklige 3-Ecke	14	J, K
Disdodekaeder	24	24 schiefe 4-Ecke	26	5.10	48	2	Irreguläres Rhombenkuboktaeder	24	26	6 Rechtecke 8 reguläre 3-Ecke 12 gleichschenklige Trapeze	15	U
Hexakistetraeder	24	24 schiefe 3-Ecke	14	5.10	36	2	Irreguläres abgestumpftes Oktaeder	24	14	6 Rechtecke 4+4 di-3-Ecke	17	X
Deltoiddodekaeder	12	12 Deltoide	14	5.10	24	1	Irreguläres Kuboktaeder	12	14	6 Rechtecke 4+4 reguläre 3-Ecke	18	I
Tetraedrisches Pentagondodekaeder	12	12 schiefe 5-Ecke	20	5.10	30	2	Abgeschrägtes Tetraeder	12	20	4+4 reguläre 3-Ecke 12 schiefe 3-Ecke	19	R
di-n-Seit-Dipyramiden ($n \geq 2$)	$4n$	$4n$ schiefe 3-Ecke	$2n$+2		$6n$	2 (n fest)	di-n-Eck-Prisma	$4n$	$2n$+2	n+n Rechtecke 2 di-n-Ecke	2	$\mathcal{F}_n$
n-Skalenoeder ($n \geq 2$)	$4n$	$4n$ schiefe 3-Ecke	$2n$+2		$6n$	2 (n fest)	abgeschnittenes n-Antiprisma	$4n$	$2n$+2	$2n$ gleichschenklige Trapeze 2 di-n-Ecke	5	$\mathcal{G}_n$
n-Trapezoeder ($n > 2$)	$2n$	$2n$ schiefe 4-Ecke	$2n$+2		$4n$	2 (n fest)	schiefes n-Antiprisma	$2n$	$2n$+2	$2n$ schiefe 3-Ecke 2 reguläre n-Ecke	6	$\mathcal{E}_n$
2-Trapezoeder	4	4 schiefe 4-Ecke	4		6	2	schiefes 2-Antiprisma	4	4	4 schiefe 4-Ecke	7	$\mathcal{E}_2$

In der Spalte «Br» steht die Nummer des entsprechenden isogonalen Polyeders in Brückner [1900], Kapitel E, § 114–118. Die isoedrischen Polyeder haben dort dieselbe Nummer. Die Spalte «RC/GS» bezieht sich auf die Bezeichnung der isogonalen Polyeder in Robertson/Carter [1970] und Grünbaum/Shepard [1981]. Die Figurennummern beziehen sich auf die isoedrischen *und* isogonalen Polyederklassen.

Man beachte, daß man die *Klassen* von isoedrischen und isogonalen Polyedern sorgfältig unterscheiden muß von den *halbregulären Repräsentanten* einiger dieser Klassen, eben den dualarchimedischen bzw. archimedischen Polyedern. Letztere bilden nur Klassen von ähnlichkeitsäquivalenten Polyedern, das heißt, es gibt keine (anderen) freien Parameter als die Größe.

Die *Flächenarten der archimedischen Polyederklassen* erhält man aus den Flächenarten der isogonalen Polyederklassen, wenn man die Rechtecke durch Quadrate, die schiefen oder gleichschenkligen 3-Ecke durch reguläre 3-Ecke und die di-n-Ecke durch reguläre $2n$-Ecke ersetzt.

Daraus erhält man auch die «uniforme» Notation: Da alle Ecken von archimedischen Polyedern symmetrieäquivalent sind, braucht man nur die in einer beliebigen Ecke aneinanderstoßenden regulären n-Ecke der Reihe nach anzugeben. So stoßen in einer Rhombenikosidodekaederecke (Tabelle 5.23) ein 3-Eck an ein 4-Eck, dieses an ein 5-Eck und letzteres wieder an ein 4-Eck; so ergibt sich die Notation (3.4.5.4).

Tritt ein n-Eck m-mal hintereinander auf, so schreibt man n^m.

In den **TABELLEN 5.3** und **5.9** ist in der Spalte «Polyeder» jeweils mit «DA» bzw. «A» angegeben, ob die entsprechenden isoedrischen bzw. isogonalen Polyederklassen halbreguläre Repräsentanten enthalten. Mit «P» werden die regulären platonischen Polyeder gekennzeichnet.

TABELLE 5.22 enthält nur diejenigen Polyederklassen, von welchen es keine halbregulären Repräsentanten gibt. Man beachte, daß das 2-Trapezoeder und das schiefe 2-Antiprisma derselben Polyederklasse angehören.

TABELLE 5.23 enthält die übrigen isoedrischen und isogonalen Klassen von Polyedern. Die aus der Theorie der uniformen Polyeder (siehe unten) herstammende Notation der archimedischen Repräsentanten isogonaler Polyederklassen ist in der letzten Spalte unter «uniform» angeführt. (Im Falle des Ikosidodekaeders und des Kuboktaeders fallen diese Repräsentanten mit den entsprechenden Klassen zusammen, da der Parameter gleich 0 ist.) Hier bedeuten die großen Zahlen diejenigen n, für welche es reguläre n-Ecke als Flächen gibt, und die Exponenten geben an, wie viele n-Ecke der entsprechenden Art sich in einer Ecke treffen. Man beachte, daß das 2-Streptoeder und das 2-Antiprisma derselben Polyederklasse angehören.

Die sogenannten (metrisch) *dualhalbregulären* oder *dualarchimedischen Polyeder* (DA) sind bezüglich ihrer Ecken hochsymmetrische Repräsentanten einiger Klassen von isoedrischen Polyedern. Sie werden deshalb hier auch *isoedrische eckenreguläre Polyeder* genannt.

Entsprechend sind die sogenannten (metrisch) *halbregulären Polyeder* oder *archimedischen Polyeder* (A) bezüglich ihrer Flächenpolygone hochsymmetrische Repräsentanten einiger Klassen von isogonalen Polyedern. Man nennt sie deshalb auch *isogonale flächenreguläre Polyeder*. Sie werden manchmal auch *catalanische Polyeder* genannt.

Bei allen diesen Polyedern kommen jeweils mehrere Arten von regulären Ecken bzw. Flächen vor.

Isoedrische eckenreguläre konvexe Polyeder

(catalanisch, dualarchimedisch, dualhalbregulär, flächenäquivalent eckenregulär, konvex dualsemiregulär, konvex flächenuniform)

- Alle Flächen symmetrieäquivalent
- Alle Ecken regulär

Klassen: $(13 + 2 \cdot \mathbf{N}) + 5$

Isogonale flächenreguläre konvexe Polyeder

(archimedisch, halbregulär, eckenäquivalent flächenregulär, konvex semiregulär, konvex [ecken]uniform

- Alle Ecken symmetrieäquivalent
- Alle Flächen regulär

Klassen: $(13 + 2 \cdot \mathbf{N}) + 5$

Wegen der Regularität aller Flächen sind die Kanten der archimedischen Polyeder alle kongruent.

Die sogenannten *quasiregulären* oder *halbsymmetrischen Polyeder* sind Polyeder mit symmetrieäquivalenten Kanten. Diese besitzen eine Kantenkugel. Sie heißen auch *kantenreguläre*, *kantenäquivalente* oder *isotoxale Polyeder*. Sie umfassen neben den platonischen Polyedern die folgenden symmetrischen Polyeder: Kuboktaeder, Ikosidodekaeder, Rhombendodekaeder, Rhomben-30flächner.

Quasireguläre konvexe Polyeder
(halbsymmetrisch, isotoxal,
kantenäquivalent, kantenregulär)

- Alle Kanten sind symmetrieäquivalent.

Klassen: 4 + 5

Die 5 (metrisch) *regulären Polyeder*, die sogenannten Platonischen Körper (Tetraeder, Würfel oder Hexaeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder), bilden echte Teilklassen sowohl der archimedischen wie der dualarchimedischen Polyeder. Sie sind zugleich die einzigen Polyeder, die sowohl dualhalbregulär wie halbregulär sind.

Reguläre konvexe Polyeder
(Platonische Körper)

- Alle Ecken und Flächen sind regulär und kongruent.

Klassen: 5

Es gibt also gemäß den Tabellen 5.22 und 5.23 insgesamt 23 Klassen plus 5 eindimensionale diskrete Scharen $(5 \cdot \mathbf{N})$ von isogonalen bzw. isoedrischen Polyedern. Darunter befinden sich als reguläre und halbreguläre Repräsentanten die 5 platonischen Körper und die jeweils 13 Klassen plus 2 eindimensionale diskrete Scharen $(2 \cdot \mathbf{N})$ von (ähnlichkeitsäquivalenten) Klassen umfassenden archimedischen bzw. dualarchimedischen Polyeder.

Die *regulären Polyeder* sind sowohl isogonal wie isoedrisch. Dies trifft jedoch auch noch für zwei weitere Polyeder zu: das tetragonale und das orthorhombische *Disphenoid* (auch tetragonales bzw. orthorhombisches Tetraeder; siehe Tabelle 5.4).

Eine Teilklasse der halbregulären Polyeder bilden die *enantiomorphen Polyeder*. Diese haben keine Symmetrieebenen: abgeschrägter Würfel (cubus simus, snub cube), abgeschrägtes Dodekaeder (dodecaedron simum, snub dodecahedron), Pentagon-24flächner, Pentagon-60flächner.

TABELLE 5.23: *Klassen von isoedrischen und isogonalen konvexen Polyedern, welche dualarchimedische bzw. archimedische Repräsentanten enthalten*

ISOEDRISCHE POLYEDERKLASSEN mit eckenregulären (dualarchimedischen) Repräsentanten					*K*	*freie Para-meter*	*ISOGONALE POLYEDERKLASSEN mit flächenregulären (archimedischen) Repräsentanten*						
Name	*F*	*Flächenarten*	*E*	*Figur*			*Name*	*E*	*F*	*Flächenarten*	*Br*	*RC/ GS*	*Uniform*
6-Pyramidenikosaeder	120	120 schiefe 3-Ecke	62	5.18	180	2	Ikosidodekaederstumpf	120	62	30 Rechtecke 20 di-3-Ecke 12 di-5-Ecke	23	W	(4.6.10)
Deltoid-60flächner	60	60 Deltoide	62	5.18	120	1	Rhombenikosidodekaeder	60	62	30 Rechtecke 20 gleichschenklige 3-Ecke 12 reguläre 5-Ecke	24	P	(3.4.5.4)
5-Pyramidendodekaeder	60	60 schiefe 3-Ecke	32	5.18	90	1	Ikosaederstumpf	60	32	20 di-3-Ecke 12 reguläre 5-Ecke	20	O	(5.6^2)
Rhomben-30flächner	30	30 Rhomben	32	5.18	60	0	Ikosidodekaeder	30	32	20 reguläre 3-Ecke 12 reguläre 5-Ecke	21	F	$(3.5)^2$
3-Pyramidenikosaeder	60	60 gleichschenklige 3-Ecke	32	5.18	90	1	Dodekaederstumpf	60	32	20 reguläre 3-Ecke 12 di-5-Ecke	22	Q	(3.10^2)
Pentagon-60flächner	60	60 schiefe 5-Ecke	92	5.18	150	2	Abgeschrägtes Dodekaeder	60	92	60 schiefe 3-Ecke 20 reguläre 3-Ecke 12 reguläre 5-Ecke	25	T	$(3^4.5)$
Pentagon-24flächner	24	24 schiefe 5-Ecke	38	5.10	60	2	Abgeschrägtes Hexaeder	24	38	24 schiefe 3-Ecke 8 reguläre 3-Ecke 6 Quadrate	13	S	$(3^4.4)$
6-Pyramidenoktaeder	48	48 schiefe 3-Ecke	26	5.10	72	2	Kuboktaederstumpf	48	26	12 Rechtecke 8 di-3-Ecke 6 di-4-Ecke	11	V	(4.6.8)
Deltoid-24flächner	24	24 Deltoide	26	5.10	48	1	Rhombenkuboktaeder	24	26	12 Rechtecke 8 reguläre 3-Ecke 6 Quadrate	12	M	(3.4^3)
4-Pyramidenhexaeder	24	24 gleichschenklige 3-Ecke	14	5.10	36	1	Oktaederstumpf	24	14	8 di-3-Ecke 6 Quadrate	8	L	(4.6^2)
Rhombendodekaeder	12	12 Rhomben	14	5.10	24	0	Kuboktaeder	12	14	8 reguläre 3-Ecke 6 Quadrate	9	C	$(3.4)^2$
3-Pyramidenoktaeder	24	24 gleichschenklige 3-Ecke	14	5.10	36	1	Hexaederstumpf	24	14	8 reguläre 3-Ecke 6 di-4-Ecke	10	N	(3.8^2)
3-Pyramidentetraeder	12	12 gleichschenklige 3-Ecke	8	5.10	18	1	Tetraederstumpf	12	8	4 reguläre 3-Ecke 4 di-3-Ecke	16	H	(3.6^2)
n-Dipyramiden ($n > 2$)	$2n$	$2n$ gleichschenklige 3-Ecke	n+2		$3n$	1 ($n$fest)	n-Prisma	$2n$	n+2	n Rechtecke 2 reguläre n-Ecke	1	C_n	$(4^2.n)$
n-Streptoeder ($n > 2$)	$2n$	$2n$ Deltoide	$2n$+2		$4n$	1 ($n$fest)	n-Antiprisma	$2n$	$2n$+2	$2n$ gleichschenklige 3-Ecke 2 reguläre n-Ecke	3	$\mathcal{D}_n$	$(3^3.n)$
2-Streptoeder	4	4 gleichschenklige 3-Ecke	4	T 5.2a	6	1	2-Antiprisma	4	4	4 gleichschenklige 3-Ecke	4	$\mathcal{D}_2$	

Kombinationspolyeder

Aus der großen Abteilung der nicht isogonalen und nicht isoedrischen symmetrischen Polyeder können nur mit starken Zusatzbedingungen überschaubare Klassen herausgefiltert werden. Diese Polyeder sind k-isoedrisch und m-isogonal mit $k > 1$ und $m > 1$. Den entsprechenden k Flächenbahnen und m Eckenbahnen liegt je eine einfache (symmetrische) Flächen- bzw. Punktform im Sinne von Abschnitt 5.2 zugrunde. Da diese Formen nach Voraussetzung alle durch ein und dieselbe Symmetriegruppe, die Eigensymmetrien des symmetrischen Polyeders, erzeugt werden können, handelt es sich bei diesen Polyedern um Flächenkombinationen aus k isoedrischen Polyedern bzw. Eckenkombinationen aus m isogonalen Polyedern. In diesem Sinne bilden die isoedrischen und isogonalen Polyeder eine *Basis* für alle symmetrischen Polyeder. Da die isoedrischen Polyeder durch Eckenkombination aus isogonalen Polyedern und die isogonalen Polyeder durch Flächenkombination aus isoedrischen Polyedern gewonnen werden können (Abschnitt 5.7), kann das Basissystem entweder auf die isoedrischen oder auf die isogonalen Polyeder reduziert werden.

Beschränkt man sich auf die Kombination von Repräsentanten derjenigen drei Polyederklassen, welche keinen freien Parameter, das heißt den Lagetyp I, II oder III haben, so ergeben sich für die volle Oktaedergruppe und die volle Ikosaedergruppe sowie für die beiden Fälle von Kombinationen je 3 Klassen reiner Kombinationspolyeder, total also 12 Klassen (Abschnitt 5.7).

Nicht isogonale parameterfreie *Flächenkombinationspolyeder*

- Gesamtheit aller Flächen unter Symmetriegruppe invariant

Klassen: 6

Nicht isoedrische parameterfreie *Eckenkombinationspolyeder*

- Gesamtheit aller Ecken unter Symmetriegruppe invariant

Klassen: 6

Für die Kombination von Repräsentanten aus Polyederklassen mit einem oder zwei freien Parametern (Lagetypen IV, V, VI bzw. VII) gibt es unendlich viele nichtäquivalente Kombinationsmöglichkeiten, da schon die Polyeder innerhalb *einer* isoedrischen oder isogonalen Klasse beliebig (aber endlich) oft miteinander flächen- bzw. eckenkombiniert werden können (Abschnitt 5.7, Figur 5.45ab).

Stellt man neben der Symmetrie die zusätzliche Forderung, daß die Flächen des Polyeders *regulär* sein sollen, so erhält man die sogenannten konvexen *flächenregulären Polyeder*. Sie werden auch *regulärflächige Polyeder* genannt.

Sieht man von den isogonalen flächenregulären Polyedern ab (das heißt den archimedischen und den platonischen Polyedern), so bleiben 92 Klassen übrig, deren Symmetrien alle den Diedergruppen mit Achsenzähligkeiten kleiner oder gleich 10 angehören (siehe Johnson [1966] und Zalgaller [1969]; den Aufbau vieler dieser Polyeder aus «Elementarbausteinen» zeigen anschaulich Berman [1971], Gagnon [1982] und insbesondere Pugh [1976], Chapter 3).

Flächenreguläre konvexe Polyeder
(regulärflächig)

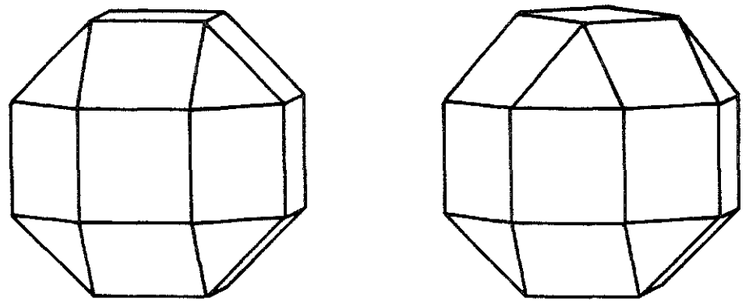
- Alle Flächen sind regulär.

Klassen: $86 + 1 + 5 + (13 + 2 \cdot \mathbf{N}) + 5$

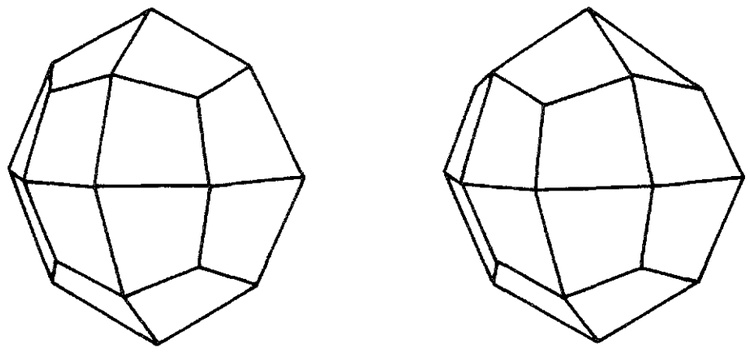
Zu den 92 Klassen der konvexen flächenregulären Polyeder gehören die 5 Klassen der sogenannten *flächenregulären flächenkongruenten* oder *pseudoregulären Polyeder*, die nur aus kongruenten Flächen, insbesondere nur aus kongruenten Dreiecken bestehen, die sogenannten *konvexen Deltaeder* (siehe Cundy [1952], Schumann [1989]).

Zu diesen 92 Klassen gehört ebenfalls das sogenannte *Pseudorhombenkuboktaeder* (**Figur 5.50a**), das zu den archimedischen Polyedern dazugerechnet werden muß, wenn die Bedingung der Isogonalität der Ecken ersetzt wird durch die Kongruenz der Ecken. Es entsteht aus dem Rhombenkuboktaeder durch Verdrehen der beiden Hälften bezüglich einer Symmetrieebene, welche zwei vierzählige Achsen enthält (in Figur 5.50a ist dies die Horizontalebene); und zwar wird um deren Normale, ebenfalls eine vierzälige Symmetrieachse, um 45° gedreht. Als einziges Symmetrieelement des Pseudorhombenkuboktaeders bleibt dann bloß diese vierzählige Drehachse übrig. Das entsprechende Polyeder ist eine Kombination von (offenen) 4-Pyramiden und einem 8-Prisma. – Die Dualform des Pseudorhombenkuboktaeders (**Figur 5.50b**) entsteht auf die gleiche Weise aus der Dualform des Rhombenkuboktaeders (Deltoid-24flächner) und ist ein Beispiel eines eckenregulären, nicht isoedrischen Polyeders (siehe zu diesen Polyedern Aschkinuse [1969], Roman [1987]).

Für konvexe *flächenkongruente* konvexe Polyeder, deren Flächen keine regulären Polygone sind, ist meines Wissens noch keine systematische Ableitung und Einteilung in Klassen bekannt. Dies trifft insbesondere auch für *eckenkongruente* Polyeder zu. Über die *eckenregulären Polyeder* ist abgesehen von den isoedrischen Spezialfällen (dualarchimedische und platonische Polyeder) ebenso kaum etwas bekannt.



Figur 5.50a: *Rhombenkuboktaeder und Pseudorhombenkuboktaeder*



Figur 5.50b: *Dual-Rhombenkuboktaeder (Deltoid-24flächner) und Dual-Pseudorhombenkuboktaeder*

Nicht-konvexe symmetrische Polyeder

Ohne die Bedingung der Konvexität gibt es keine systematische Übersicht der isogonalen und isoedrischen Polyeder mehr. Man kennt nur ausgewählte Klassen genauer.

Der Spezialfall der regulären nicht-konvexen Polyeder, der sogenannten *regulären Sternpolyeder*, wird weiter unten behandelt.

Man nennt (konvexe oder nichtkonvexe) Polyeder, welche konvexe oder nichtkonvexe reguläre Polygone als Flächen *und* symmetrieäquivalente Ecken haben, also isogonal sind, *uniform*; sie werden hier *eckenuniform* genannt.

Zur Untersuchung nichtkonvexer Polyeder ist es sinnvoll, die in Abschnitt 5.2 eingeführte Beschränkung des Polyederbegriffs auf sich nicht selbst durchdringende Polyeder fallen zu lassen.

Unter diesen Voraussetzungen haben Coxeter et al. [1953] und Skilling [1975] gezeigt, daß es, abgesehen von den 4 regulären Sternpolyedern, 53 Typen von *nichtkonvexen eckenuniformen Polyedern* gibt. Die *konvexen eckenuniformen Polyeder* sind gerade die flächenregulären isogonalen oder archimedischen Polyeder. Die *konvexen flächenuniformen Polyeder* sind gerade die eckenregulären isoedrischen oder dualarchimedischen Polyeder.

Flächenuniforme Polyeder

- Alle Flächen symmetrieäquivalent
- Alle Ecken regulär

Klassen: ? + 4 + (13 + 2·**N**) + 5

Eckenuniforme Polyeder
(semiregulär, uniform)

- Alle Ecken symmetrieäquivalent
- Alle Flächen regulär

Klassen: (53 + 4) + (13 + 2·**N**) + 5

Eine Übersicht zu neueren Forschungsresultaten der Polyedergeometrie mit Literaturangaben zu allen hier gemachten Behauptungen und vielen weiteren Resultaten findet man in Martini [1994ab]. Eine zusammenfassende Darstellung der hier behandelten Polyederklassen gibt **TABELLE 5.25**.

TABELLE 5.25 (S. 163): *Klassen von symmetrischen Polyedern.* Es werden die hier diskutierten Polyederklassen in ihren Beziehungen graphisch dargestellt. Die Pfeile gehen von umfassenden Klassen zu solchen, die darin enthalten sind.

Nicht-konvexe reguläre Polyeder: reguläre Sternpolyeder

Läßt man die Bedingung der Konvexität sowie das Verbot der Selbstdurchdingung fallen, so erweitert sich für die *regulären Polyeder* die Gruppe der platonischen Körper um die zwei regulären Sternpolyeder von Kepler, den Dodekaederstern und den Ikosaederstern, sowie die dazu dualen regulären Sternpolyeder von Poinsot, den großen Dodekaederstern und den großen Ikosaederstern (**Figur 5.51** und **TABELLE 5.24**), die der Symmetriegruppe des Ikosaeders zugehören. Alle übrigen Sternkörper sind entweder nicht regulär im obigen Sinne oder Zusammensetzungen aus verschiedenen Polyedern.

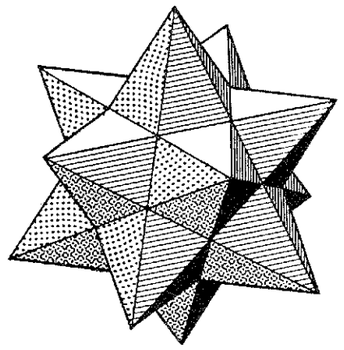
Reguläre Polyeder

- Alle Ecken und Flächen sind regulär und kongruent.

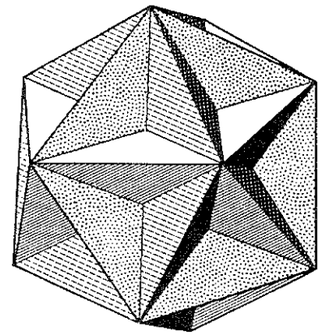
Klassen: 4 + 5

TABELLE 5.24: *Die vier regulären Sternpolyeder*

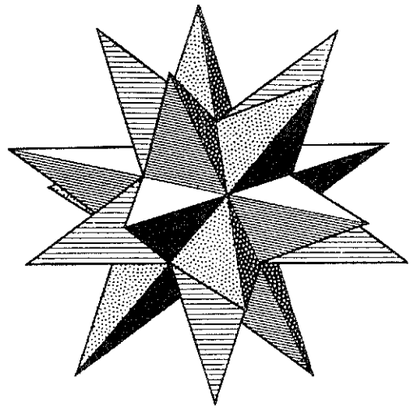
Namen	*Flächen*	*Ecken*	*Kanten*	*Hülle*	*Kern*
kleines Fünfstern-Dodekaeder, Zwölfeckiges Sterndodekaeder, Dodekaederstern, kleiner Dodekaederstern, Kepler-Dodekaedersten	12 Fünfsterne	12	30 Dodekaeder- kanten	Ikosaeder	Dodekaeder
Fünfeck-Dodekaederstern, Sterneckiges Dodekaeder, großer Dodekaederstern, großes Dodekaeder, Poinsot-Dodekaederstern	12 Fünfecke	12	30 Ikosaeder- kanten	Ikosaeder	Dodekaeder
großes Fünfstern-Dodekaeder, Zwanzigeckiges Sterndodekaeder, Ikosaederstern, kleiner Ikosaederstern, großer Dodekaederstern, Kepler-Ikosaederstern	12 Fünfsterne	20	30 Ikosaeder- kanten	Dodekaeder	Dodekaeder
Dreieck-Ikosaederstern, Sterneckiges Ikosaeder, großer Ikosaederstern, großes Ikosaeder, Poinsot-Ikosaederstern	20 Dreiecke	12	30 Dodekaeder- kanten	Ikosaeder	Ikosaeder



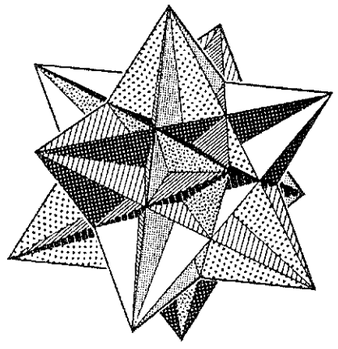
Dodekaederstern,
kleines Fünfstern-Dodekaeder



großer Dodekaederstern,
Fünfeck-Dodekaederstern



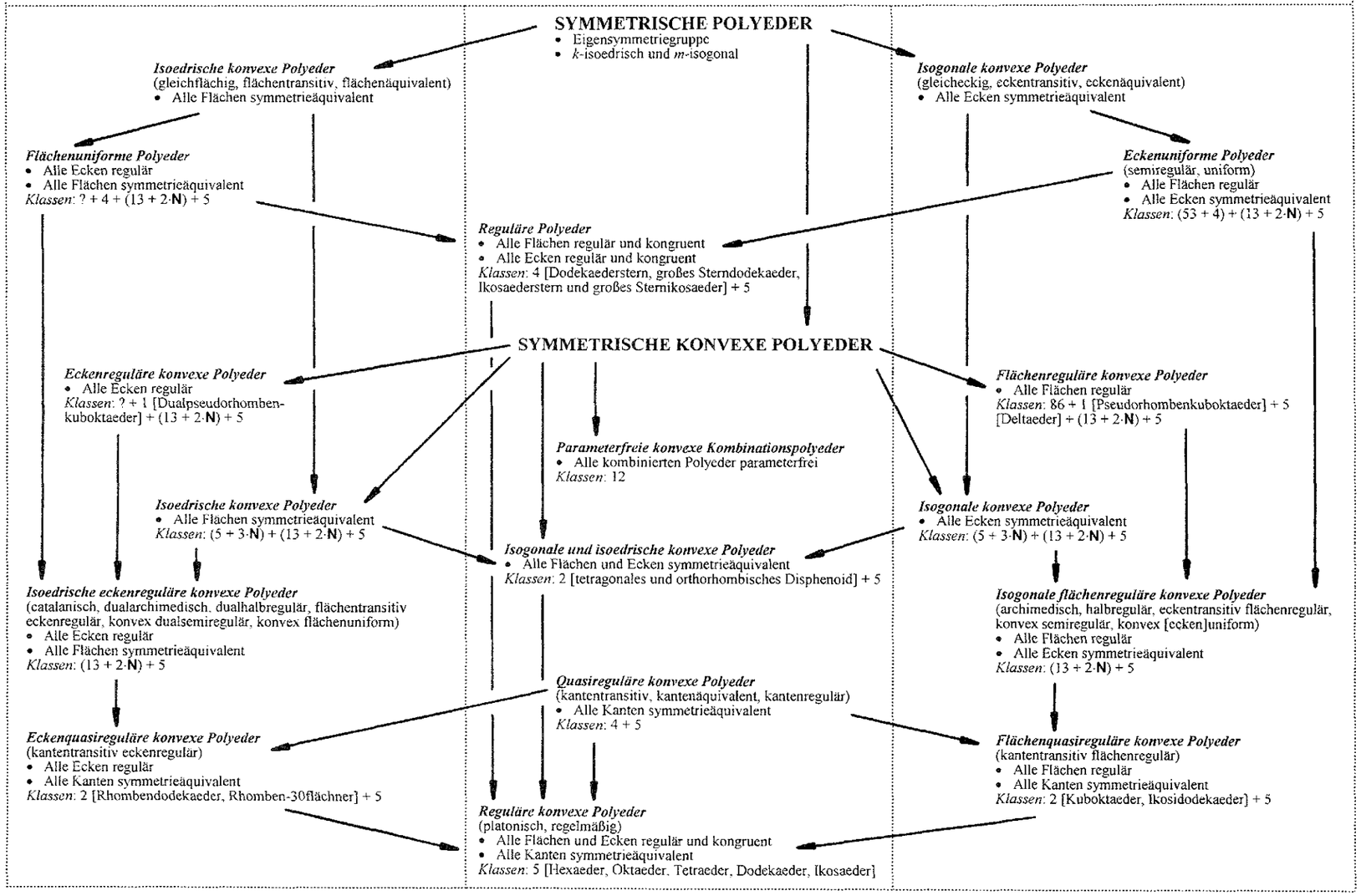
Ikosaederstern,
großes Fünfstern-Dodekaeder



großer Ikosaederstern,
Dreieck-Ikosaederstern

Figur 5.51: *Die vier regulären Sternpolyeder;*
die nebeneinanderstehenden Polyeder sind zueinander dual

TABELLE 5.25: *Klassen von symmetrischen Polyedern*



5.9 *Symmetrische Polyederverbände*

Eine *Polyederzusammensetzung* oder ein *Polyederverband* (englisch *compound*) aus regulären konvexen Polyedern besteht aus endlich vielen solchen Polyedern mit demselben Mittelpunkt.

Während die Kombination konvexer Polyeder nach Konstruktion wieder auf konvexe Polyeder führt (Abschnitt 5.7), sind Polyederverbände weder Polyeder im Sinne von Abschnitt 5.2 noch konvex.

Ein Verband heißt *eckenregulär*, wenn die Ecken des Verbandes ein metrisch reguläres Polyeder bilden, das man *Hülle* des Verbandes nennt und *flächenregulär*, wenn die Flächen ein reguläres Polyeder umschließen, das der *Kern* des Verbandes heißt. Ist beides der Fall, so soll der Verband *regulär* genannt werden.

Ein Verband heiße *halbregulär*, wenn der Kern ein halbreguläres und die Hülle ein dualhalbreguläres Polyeder bilden.

Eine Übersicht aller solcher Polyederverbände zeigt Tabelle 5.26. Für Abbildungen wird auf die Literatur verwiesen.

TABELLE 5.26: *Polyederverbände aus regulären Polyedern*

Name	*Hülle*	*Kern*	*Typ*
Tetraederzwilling	Hexaeder	Oktaeder	regulär
Tetraederfünfling	Dodekaeder	Ikosaeder	regulär
Tetraederzehnling	Dodekaeder	Ikosaeder	regulär
Hexaederfünfling	Dodekaeder	Rhomben-30flächner	eckenregulär
Oktaederfünfling	Ikosidodekaeder	Ikosaeder	flächenregulär
Hexaeder + Oktaeder	Rhomben-12flächner	Kuboktaeder	halbregulär
Dodekaeder + Ikosaeder	Rhomben-30flächner	Ikosidodekaeder	halbregulär

Ersetzt man die Regularität und Kongruenz von Ecken und Flächen durch die Transitivität der Ecken und Flächen, so können damit neben den Polyedern auch zusammengesetzte Polyeder oder Polyederverbände erfaßt werden.

Cromwell [1997], Chapter 10, leitet 14 Klassen von totalsymmetrischen oder «totaltransitiven» Polyedern und Polyederverbänden ab, bei welchen alle Flächen, Ecken und Kanten transitiv, das heißt symmetrieäquivalent sind.

Darunter befinden sich neben den 5 platonischen Körpern und den 4 regulären Sternpolyedern von Kepler und Poinsot (Abschnitt 5.8, Figur 5.51, Tabelle 5.24) die 3 regulären und die je 1 ecken- sowie flächenregulären Polyederverbände.

Locher [1952] untersucht diejenigen «regelmäßigen» Polyeder und Polyederverbände, deren Kantengebilde oder «Kantendächer» symmetrieäquivalent sind. Er findet dabei neben den 5 platonischen Polyedern und den 4 regulären Sternpolyedern den Tetraederzwilling (Oktaederstern, stella octangula) und die 2 spiegelbildlichen Tetraederfünflinge im Dodekaeder, insgesamt also 12 Klassen. Wenn man nur Klassen von ähnlichkeitsäquivalenten Polyedern betrachtet, bleiben nur 11 Klassen übrig, da die beiden enantiomorphen Tetraederfünflinge zu einer Klasse gehören.

Ein Polyederverband (nicht notwendigerweise konvexer) eckenuniformer Polyeder heißt nach Skilling [1975] *uniform*, wenn alle Polyeder gleich lange Kanten haben und die Ecken aller Polyeder bezüglich der Symmetrie des Verbandes äquivalent sind. Neben den eckenuniformen Polyedern (inklusive den 4 regulären Sternpolyedern) gibt es 69 Klassen plus 6 Serien von Klassen uniformer Polyederverbände.

TABELLE 5.27: *Uniforme Polyederverbände*

Uniforme Polyederverbände
- Alle Kanten aller Polyeder kongruent
- Alle Ecken aller Polyeder symmetrieäquivalent

Klassen: $(64 + 6 \cdot \mathbf{N}) + 5$

↓

Totalsymmetrische Polyederverbände (totaltransitiv, totaläquivalent)
- Alle Flächen, Ecken, Kanten symmetrieäquivalent

Klassen: 5 [Tetraederzwilling, Tetraederfünfling, Tetraederzehnling, Hexaederfünfling, Oktaederfünfling]

↓

Dachreguläre Polyederverbände (regelmäßig)
- Alle Kantendächer symmetrieäquivalent

Klassen: 2 [Tetraederzwilling, Tetraederfünfling]

5.10 *Topologisch, projektiv und affin reguläre konvexe Polyeder*

Es wurden bisher und werden auch in den folgenden Abschnitten nur (euklidisch) *metrisch* reguläre, isogonale und isoedrische konvexe Polyeder diskutiert. In diesem Abschnitt wird auf den Zusammenhang einiger der oben erwähnten Polyederklassen mit der Klassifikation von konvexen Polyedern nach topologischen (oder kombinatorischen), projektiven, affinen und nichteuklidischen Prinzipien hingewiesen.

Topologisch reguläre konvexe Polyeder

Eigenschaften eines Polyeder, welche nur die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten sowie deren Verheftung (Inzidenzen) betreffen, heißen *topologisch* oder *kombinatorisch*. Zwei Polyeder heißen zueinander *topologisch isomorph*, *kombinatorisch äquivalent* oder vom selben *topologischen* oder *kombinatorischen Typ*, wenn man zwischen den Ecken, Kanten und Flächen des einen Polyeders und den Ecken, Kanten bzw. Flächen des anderen Polyeders eine umkehrbar eindeutige (bijektive) inzidenztreue Zuordnung herstellen kann, so daß inzidenten Ecken, Kanten und Flächen des ersten Polyeders jeweils inzidente Ecken, Kanten und Flächen des zweiten Polyeders entsprechen.

Zwei Polyeder heißen *topologisch* oder *kombinatorisch dual*, wenn man zwischen deren Elementen eine solche umkehrbar eindeutige (bijektive) Zuordnung herstellen kann, daß den Ecken, Kanten und Flächen des einen die Flächen, Kanten und Ecken des anderen inzidenztreu zugeordnet sind. Daraus ergibt sich das *topologische* oder *kombinatorische Dualitätsprinzip für Polyeder*: Zu jedem Satz über Eigenschaften von Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders gibt es einen dual entsprechenden Satz über Eigenschaften von Flächen, Kanten und Ecken des dazu topologisch dualen Polyeders.

Ein Polyeder heißt *topologisch regulär*, wenn seine Flächen alle die gleiche Eckenzahl haben und in jeder Ecke die gleiche Anzahl von Flächen zusammenkommt.

Es gelten die folgenden Sätze (Beweis: siehe Literatur).

Satz: *Es gibt genau fünf verschiedene (nicht zueinander isomorphe) Klassen von topologisch regulären Polyedern, und zu jedem topologisch regulären Polyeder gibt es ein zu ihm topologisch duales topologisch reguläres Polyeder.*

Satz: *Jedes topologisch reguläre Polyeder ist isomorph zu einem metrisch regulären Polyeder.*

Letzteres bedeutet, daß es innerhalb jeder Klasse von topologisch regulären Polyedern genau eine Klasse von ähnlichkeitsäquivalenten metrisch regulären Polyedern gibt. Letztere sind die Platonischen Körper.

Damit führt die Klassifikation nach topologischer und metrischer Regularität im wesentlichen zum selben Ergebnis.

Topologisch halbreguläre konvexe Polyeder

Für die topologisch halbregulären Polyeder benötigt man einige Hilfsbegriffe. Der *Stern einer Ecke* oder *Eckenstern* eines Polyeders ist die Gesamtheit aller mit dieser Ecke inzidenten Flächen sowie deren Ecken und Kanten. Der *Stern einer Fläche* oder *Flächenstern* eines Polyeders ist die Gesamtheit aller Ecken der Fläche sowie deren Flächen und Kanten. Die Isomorphie für Sterne kann auf dieselbe Weise wie die Isomorphie für Polyeder definiert werden.

Die *topologisch regulären Polyeder* sind genau diejenigen Polyeder, für welche alle Sterne einer Ecke und alle Sterne einer Fläche untereinander isomorph sind.

Ein Polyeder heißt *topologisch halbregulär*, wenn die Sterne aller seiner Ecken isomorph sind. Dual dazu heißt ein Polyeder *topologisch dualhalbregulär*, wenn die Sterne aller seiner Flächen isomorph sind.

Es gelten die folgenden Sätze (Beweis: siehe Literatur).

Satz: *Es gibt genau 13 Klassen plus 2 Serien von Klassen von topologisch halbregulären Polyedern und dual dazu genau 13 Klassen plus 2 Serien von Klassen von topologisch dualhalbregulären Polyedern.*

Satz: *Jedes topologisch halbreguläre oder dualhalbreguläre Polyeder ist isomorph zu einem metrisch halbregulären bzw. dualhalbregulären Polyeder.*

Letzteres bedeutet, daß es in jeder Klasse von topologisch halbregulären Polyedern genau eine Klasse von metrisch halbregulären (archimedischen) Polyedern gibt und innerhalb jeder Klasse von topologisch dualhalbregulären Polyedern genau eine Klasse von metrisch dualhalbregulären (dualarchimedischen oder catalanischen) Polyedern. Damit führt auch im Falle der halbregulären Polyeder die topologische und die metrische Klassifikation im wesentlichen zu demselben Ergebnis.

Bei jeweils einer dieser topologischen Klassen gibt es zwei verschiedene mögliche Netze und damit 2 nicht isomorphe Klassen von Polyedern; im Falle der halbregulären Klassen sind das die Klasse des Rhombenkuboktaeders und im Falle der dualhalbregulären Klassen die Klasse des Pseudorhombenkuboktaeders.

Bei den metrisch isogonalen und isoedrischen Polyederklassen gibt es keine neuen topologischen Typen, sie ordnen sich in die Klassen der topologisch halbregulären bzw. dualhalbregulären Polyeder ein.

Projektiv oder affin reguläre konvexe Polyeder

Zwei Polyeder oder zwei Sterne eines Polyeders heißen *projektiv äquivalent* oder *affin äquivalent*, wenn es eine Projektivität bzw. eine Affinität gibt, welche diese ineinander transformiert.

Ein Polyeder heißt *projektiv regulär* oder *affin regulär*, wenn die Sterne aller seiner Ecken und die Sterne aller seiner Flächen projektiv bzw. affin äquivalent sind bezüglich einer Transformationsgruppe des projektiven bzw. affinen Raumes mit genau einem Fixpunkt (das heißt mit genau einer Punktbahn, die nur aus einem Punkt besteht).

Die endliche Gruppe der Projektivitäten oder Affinitäten, welche ein Polyeder in sich transformieren, heißt die *projektive* bzw. *affine Symmetriegruppe* des Polyeders.

Damit kann man sagen, daß ein Polyeder genau dann projektiv oder affin regulär ist, wenn die projektive bzw. affine Symmetriegruppe die Menge der Eckensterne und die Menge der Flächensterne je in sich transformiert (oder, mit anderen Worten, die Gruppe transitiv auf diesen Mengen transitiv operiert).

Zwei Polyeder heißen *projektiv dual*, wenn es eine umkehrbar eindeutige (bijektive) inzidenztreue Beziehung gibt, sodaß den Ecken, Kanten und Flächen des einen Polyeders die Flächen, Kanten und Ecken des anderen Polyeders zugeordnet sind. Zwei Polyeder heißen *projektiv polar*, wenn es eine Polarität an einer Fläche zweiten Grades (das heißt, eine involutorische Korrelation, bei der nicht alle entsprechenden Elemente inzident sind) gibt, welche das eine Polyeder in das andere und umgekehrt überführt.

Natürlich folgt aus der projektiven Dualität die topologische. Die Umkehrung gilt nur für konvexe Polyeder.

Satz: *Es gibt genau 5 (nicht zueinander projektiv oder affin äquivalente) Klassen von projektiv oder affin regulären Polyedern.*

Beweis: Es muß für die projektiv oder affin regulären Polyeder mindestens so viele Klassen geben wie für topologisch reguläre Polyeder. Es stellt sich also nur das Problem, ob durch projektive bzw. affine Eigenschaften von Polyedern eine feinere Klassifizierung zustande kommt (wie bei den isoedrischen und isogonalen Polyedern), ob es also mehr Klassen als im topologischen Fall gibt. Dies ist nicht der Fall. Denn die projektiven Eigenschaften eines Polyeders (Abschnitt 2.3) betreffen nur die Flächen, Kanten und Ecken und deren Inzidenzen, fügen also den topologischen Eigenschaften nichts hinzu. Im Falle der affin regulären Polyeder kann es auch nicht mehr Klassen geben, denn die einzige zusätzliche Eigenschaft ist die Parallelität, die sogar im metrisch regulären Fall zu keiner neuen Klasse führt.

Eine *Fahne* eines Polyeders besteht aus je einer Ecke, einer Kante und einer Fläche des Polyeders, die alle untereinander inzident sind. Ein Polyeder heißt *fahnenregulär*, wenn seine Symmetriegruppe die Menge der Fahnen ineinander überführt, das heißt, wenn alle Fahnen bezüglich der Symmetriegruppe untereinander projektiv bzw. affin äquivalent sind.

Satz: *Ein Polyeder ist genau dann projektiv oder affin regulär, wenn es projektiv bzw. affin fahnenregulär ist.*

Beweis: Das Polyeder sei fahnenregulär. Alle Fahnen mit derselben Ecke bilden zusammen mit den Fahnen der entsprechenden Flächen den Stern dieser Ecke. Ebenso bilden alle Fahnen mit derselben Fläche zusammen mit den Fahnen der entsprechenden Ecken den Stern dieser Ecke. Da die projektiven und affinen Symmetrien umkehrbar eindeutig (bijektiv) sind sowie nach Voraussetzung Fahnen auf Fahnen abbilden, werden wegen der Inzidenztreue auch Sterne auf gleichartige Sterne abgebildet, also ist das Polyeder regulär. Umgekehrt folgt aus der Regularität wegen der Inzidenztreue der Symmetrien ohne weiteres die Fahnen-Regularität.

Satz: *Jedes projektiv oder affin reguläre Polyeder ist projektiv bzw. affin äquivalent zu einem metrisch regulären Polyeder.*

Beweis: Siehe McMullen [1968] für einen Beweis für n-dimensionale Polytope auf der Grundlage der Fahnen-Regularität.

Skizze eines auf Polyeder zugeschnittenen und mehr anschaulich-geometrisch orientierten Beweises: (1) Die Bahnen von Punkten oder Ebenen bezüglich den Transformationsgruppen des projektiven oder affinen Raumes mit genau einem Fixpunkt M liegen auf bzw. berühren eine Quadrik (Fläche zweiten Grades) vom Typ der Sphäre. (2) Die endlichen Untergruppen dieser Transformationsgruppen sind isomorph zu den endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe, das heißt den metrischen (euklidischen) Deckoperationen der Sphäre. (3) Ist Ω die Quadrik, auf welchen die Ecken des projektiv oder affin regulären Polyeders $\mathcal{P}$ liegen, π die Projektivität oder Affinität mit Fixpunkt M, welche Ω in eine Sphäre tranformiert, und $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ die projektive oder affine Symmetriegruppe des Polyeders $\mathcal{P}$, so ist $\pi^{-1} \circ \mathcal{S}(\mathcal{P}) \circ \pi$ die Symmetriegruppe eines metrisch regulären Polyeders. (4) Folglich gibt es zu jedem projektiv oder affin regulären Polyeder ein dazu projektiv oder affin äquivalentes metrisch reguläres Polyeder.

Folgerung: *Die Ecken und die Flächen eines projektiv oder affin regulären Polyeders liegen auf bzw. berühren eine Quadrik vom Typ der Sphäre.*

Siehe dazu die Figuren 6.8, 6.22, 6.25 und 6.26.

Satz: *Zu jedem projektiv oder affin regulären Polyeder gibt es ein zu ihm projektiv duales gleichartiges Polyeder.*

Beweis: Da die Ecken und Flächen von projektiv oder affin regulären Polyedern auf Quadriken liegen, gibt es zu jedem dieser Polyeder ein dazu projektiv polares und damit auch ein dazu projektiv duales Polyeder.

Projektiv oder affin isoedrische und isogonale konvexe Polyeder

Ein Polyeder heißt *projektiv isogonal* oder *affin isogonal*, wenn die Sterne aller seiner Ecken projektiv bzw. affin äquivalent sind bezüglich der Symmetriegruppe des Polyeders, das heißt einer Transformationsgruppe des projektiven bzw. affinen Raumes mit genau einem Fixpunkt. Ein Polyeder heißt *projektiv isoedrisch* oder *affin isoedrisch*, wenn die Sterne aller seiner Flächen projektiv bzw. affin äquivalent sind bezüglich der Symmetriegruppe des Polyeders.

Satz: *Jedes projektiv oder affin isogonale oder isoedrische Polyeder ist projektiv bzw. affin äquivalent zu einem metrisch isogonalen bzw. isoedrischen Polyeder.*

Beweisskizze: Dieser Beweis stützt sich auf die in der Beweisskizze des entsprechenden Satzes für projektiv oder affin reguläre Polyeder dargestellten Tatsachen. (1) Die Ecken eines isogonalen Polyeders liegen auf einer Quadrik Ω vom Typ der Sphäre, und die Flächen eines isoedrischen Polyeders berühren eine solche Quadrik. Diese Quadriken haben ihren Mittelpunkt M im invarianten Punkt der projektiven oder affinen Symmetriegruppe $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ des jeweiligen Polyeders. (2) Sei π die Projektivität oder Affinität mit Fixpunkt M, welche die Quadrik Ω in eine Sphäre transformiert. Dann ist $\pi^{-1} \circ \mathcal{S}(\mathcal{P}) \circ \pi$ die zur projektiven oder affinen Symmetriegruppe isomorphe metrische Symmetriegruppe des entsprechenden metrisch isogonalen oder isoedrischen Polyeders. (3) Der Lage der Ecken bzw. Flächen bezüglich des projektiven oder affinen Symmetriegerüstes der projektiven oder affinen Symmetriegruppe $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ (bestehend aus den Achsen der projektiven «Drehungen» sowie den Fixebenen von harmonischen Spiegelungen, welche die Quadrik Ω invariant lassen) entspricht genau eine Lage bezüglich des metrischen Symmetriegerüstes der entsprechenden metrischen Symmetriegruppe $\pi^{-1} \circ \mathcal{S}(\mathcal{P}) \circ \pi$. (4) Damit kann jedem projektiv oder affin isogonalen oder isoedrischen Polyeder ein dazu projektiv oder affin äquivalentes metrisch isogonales bzw. isoedrisches Polyeder zugeordnet werden.

Folgerung: *Die Ecken eines projektiv oder affin isogonalen und die Flächen eines projektiv oder affin isoedrischen Polyeders liegen auf einer bzw. berühren eine Quadrik vom Typ der Sphäre.*

Siehe dazu die Figuren 6.9, 6.11, 6.27 und 6.28. Aus dieser Folgerung ergibt sich unmittelbar:

Satz: *Zu jedem projektiv oder affin isogonalen oder isoedrischen Polyeder gibt es ein zu ihm projektiv duales projektiv oder affin isoedrisches bzw. isogonales Polyeder.*

Aus dem ersten Satz ergibt sich weiter:

Satz: *Es gibt neben den projektiv oder affin regulären Polyederklassen genau 18 Klassen plus 5 Serien von Klassen von affin bzw. projektiv isogonalen Polyedern und projektiv dual dazu genau 13 Klassen plus 2 Serien von Klassen von affin bzw. projektiv isoedrischen Polyedern.*

Elliptisch oder hyperbolisch reguläre, isoedrische und isogonale konvexe Polyeder

Da die endlichen Bewegungsgruppen mit Fixpunkt für den euklidischen, elliptischen und hyperbolischen dreidimensionalen Raum gleich sind, ergeben sich daraus im wesentlichen die gleichen Klassen von regulären sowie isogonalen und isoedrischen Polyedern. Allerdings gibt es in diesen nichteuklidischen Räumen keine Ähnlichkeit, so daß Klassen von projektiv äquivalenten Polyedern betrachtet werden müssen. Zieht man nur Klassen vom selben topologischen oder kombinatorischen Typ in Betracht, so erhält man nur 13 Klassen plus 2 Serien von Klassen von isogonalen bzw. isoedrischen Polyedern.

Literaturhinweise

Abschnitt 5.2: Das Standardwerk zur Geometrie regelmäßiger Polyeder ist Coxeter [1973], der Klassiker Brückner [1900]; siehe dazu auch Grünbaum/Shepard [1981]. Zur Topologie, insbesondere zum Jordanschen Kurvensatz und dessen Verallgemeinerung auf Polyeder, siehe Moise [1977].

Abschnitt 5.3: Borchardt-Ott [1997], Burzlaff/Zimmermann [1977], [1993], Fischer [1955], Kleber [1990], Niggli [1924], [1941], [1963], Raaz/Tertsch [1958], Rösler [1991]. Die elementarste, ausführlichste und anschaulichste Darstellung der allgemeinen Kristallmorphologie gibt Offermann [1999]. – Auf die 9 zusätzlichen einfachen Formen hat Galiulin [1980] aufmerksam gemacht.

Abschnitt 5.4 und 5.5: Siehe insbesondere Hahn/Klapper [1995] sowie Brückner [1900], Burt [1982], Grünbaum/Shepard [1981], Klein [1884], [1993], Nowacki [1933].

Für Abbildungen, spezifische Eigenschaften und verschiedenartige Betrachtungen zu archimedischen und dualarchimedischen Polyedern siehe Adam/Wyss [1984] und Wyss [1986], Böhm/Quaisser [1991], Cundy/Rollett [1961], Gerretsen/Vredenduin [1967], Pugh [1976], Roman [1987], Senechal/Fleck [1988], Wenninger [1971], [1979], [1983]. Für weitere Literatur siehe Martini [1994ab]. – Erzeugungen der archimedischen und dualarchimedischen Polyeder aus verschiedenen geometrischen Umwandlungsprozessen diskutieren etwa Boole Stott [1910], Emde [1984], Hofmann [1963], Lalvani [1977], Nooshin et al. [1997], p. 356f. – Einen direkten Zugang zu den verschiedenen Klassen von isoedrischen Pentagondodekaedern gibt Bigalke [1986].

Abschnitt 5.6: In diesem Abschnitt werden auf elementare Weise die kontinuierlichen Zusammenhangsverhältnisse der isogonalen und isoedrischen Polyeder untereinander abgeleitet; sie wurden erstmals von Robertson/Carter [1970] und Robertson [1984] mit Mitteln der topologischen Interpretation von Gruppen-Bahnen entwickelt und zusammenfassend dargestellt. Für eine anschauliche Darstellung dieses Sachverhaltes für die isogonalen Polyeder der vollen Oktaedergruppe siehe auch Cromwell [1997], Chapter 10.

Abschnitt 5.7: Beispiele für Flächenkombinationen von zwei und mehr isoedrischen Polyedern bezüglich kristallographischen Gruppen finden sich in fast jedem Lehrbuch der Kristallographie und Kristallgeometrie, besonders gründlich, systematisch und mehrfarbig bei Offermann [1999]. Eine mehr mathematisch orientierte Darstellung der Flächenkombinationen, allerdings ohne Abbildungen, findet sich in Hahn/Klapper [1995].

Beispiele von Flächenkombinationsformen von isoedrischen Polyedern der Ikosaedergruppe finden sich in Gévay [1992]. Eckenkombinationen von isogonalen Polyedern wurden bisher meines Wissens nur exemplarisch behandelt und nicht konsequent als Dualoperationen der Flächenkombinationen eingeführt.

Die Beschäftigung mit der Geometrie des Kombinationsreihendreiecks und des dazugehörigen Dualformendreiecks wurde angeregt von Arnoth [1997]. In Offermann [1999] werden verschiedene solche Kombinationsdreiecke studiert.

Abschnitt 5.8: Martini [1994ab]. Hier finden sich reichhaltige Literaturangaben zu sehr vielen Aspekten der metrischen Polyedergeometrie, die für jede tiefergehende Beschäftigung unentbehrlich sind. Siehe auch Cromwell [1997]. Für weitere Abbildungen siehe auch die für die Abschnitte 5.4 und 5.5 genannten Werke. – Für grundlegende topologische Aspekte der Polyedergeometrie siehe Alexandrow [1958], Grünbaum [1967], Steinitz/Rademacher [1934].

Zur Geschichte der Polyedergeometrie im Umkreis der platonischen Körper siehe Toepell [1991], mit vielen weiteren Literaturangaben. Zur Wiederentdeckung der archimedischen Polyeder in der Renaissance siehe Field [1997].

Anleitungen zur geometrischen Konstruktion und zum Selbstbau von Karton- oder Plexiglas-Modellen findet man etwa in Adam/Wyss [1984], Cundy/Rollett [1961] und in den Büchern von Wenninger [1971], [1977], [1983].

Ein vielseitiges, gut durchdachtes und stabiles *Steckmodell* zur Herstellung von Polyederkanten-Skeletten, insbesondere für Polyeder mit Ikosaedersymmetrien, ist das vor einigen Jahren neu entwickelte ZOMETOOL® (Information und Bezugsquelle: Zometool, Biocrystal Inc., P.O. Box 7053, Boulder, CO 80306-7053, USA. Fax (303) 786-7312). Für die kubischen Symmetrien leistet das etwas simplere KUGELI®-System ähnliches (aber weniger Stabiles und Haltbares) wie das Zometool für das Ikosaedersystem (Herstellung und Vertrieb: Rolf Prager Kunststoff GmbH, Otto Straße 3, D-30827 Garbsen, Fax (05131) 9 63 19).

Das *Kristallzeichenprogramm* SHAPE® wird ausführlich erklärt und demonstriert in Offermann [1999]. Information und Bezugsquelle: Shape Software, 521 Hidden Valley Road, Kingsport, TN 37663, USA, Fax (423) 239 6360.

Abschnitt 5.9: Abbildungen der Polyederverbände von Tabelle 5.26 findet man in Adam/Wyss [1984], Coxeter [1973], Cromwell [1997], Cundy/Rollett [1961]. Für Abbildungen uniformer und anderer Polyederverbände siehe Wenninger [1971], [1979], [1983] und für einen erweiterten Begriff des Verbandes Verheyen [1996]. Für weiterführende Literatur siehe wieder Martini [1994ab].

Abschnit 5.10: Die topologisch regulären und halbregulären Polyeder werden ausführlich in Aschkinuse [1969] und Roman [1987] behandelt. Siehe dazu auch Bigalke [1984], Kapitel 10. – Für die topologische, projektive und affine Fahnenregularität siehe Grünbaum [1977], McMullen [1967], [1968].

Für die nichteuklidischen Bewegungsgruppen und die entsprechenden regulären Polyeder, siehe Ratcliffe [1994], Ch. 5 und 6. Dort wird auch bewiesen, daß jede projektive, affine, elliptische, hyperbolische oder euklidische Symmetriegruppe eines entsprechenden Polyeders wegen ihrer Diskretheit und damit Endlichkeit einen Fixpunkt hat. Dies bedeutet, daß die Forderung eines Fixpunktes der Symmetriegruppe eines regulären, isogonalen oder isoedrischen Polyeders in obiger Definition überflüssig ist.

6. PROJEKTIVE DARSTELLUNGEN VON SYMMETRIEN UND POLYEDERN

6.1 *Projektive Darstellung von Symmetrien der Sphäre*

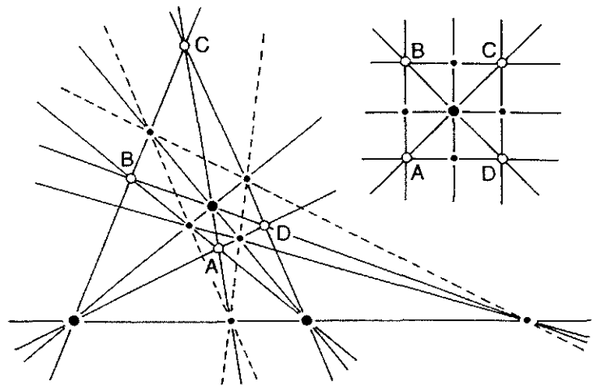
Linearprojektionen von Symmetriegerüsten und Polyedern

Den Betrachtungen dieses Kapitels gehen einige allgemeine Überlegungen voraus, welche in den folgenden Abschnitten an Beispielen illustriert und weiter ausgebaut werden. Es wird dabei von den im Abschnitt 4.2 abgeleiteten Punktsymmetriegruppen und deren Symmetriegerüsten ausgegangen, das heißt von den Konfigurationen der Symmetrieachsen, Symmetrieebenen und des Symmetriezentrums der entsprechenden Gruppe von Deckoperationen der Sphäre. Bezüglich des Symmetriegerüstes wurden bisher drei Darstellungen betrachtet, die Parallelprojektion, die sphärische Darstellung (Schnitt der Symmetrieelemente mit einer Sphäre um den invarianten Punkt) und die stereographische Projektion der sphärischen Darstellung entlang verschiedener Symmetrierichtungen. Dies hat bei den größten Gruppen der jeweiligen Kristallsysteme (sowie beim Ikosaedersystem, dem pentagonalen System und den weiteren Diedersystemen) auf die sogenannten Fundamentaldreiecke geführt (Abschnitt 4.5 und 5.1). Dies sind durch Symmetrieebenen aus dem jeweiligen Darstellungsbereich (Sphäre oder Ebene) ausgeschnittene Dreiecke, die aus jeder Punktbahn der entsprechenden Symmetriegruppe bezüglich dieses Bereiches genau einen Punkt enthalten.

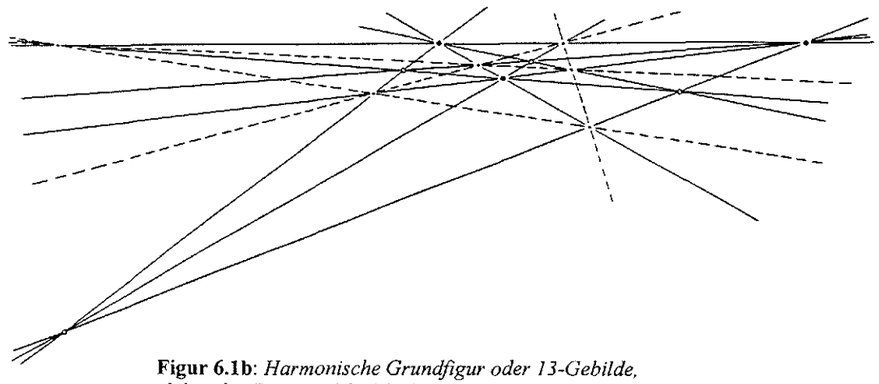
In diesem Kapitel wird eine weitere Darstellung der Symmetrieelemente einer Punktgruppe betrachtet: die *projektive Darstellung* oder *Linearprojektion*. Darunter wird der Schnitt der Symmetrieelemente mit einer beliebigen Ebene verstanden, insbesondere jedoch mit der Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes (Abschnitt 2.1).

Die durch die euklidischen Bewegungsgruppen mit Fixpunkt in einer nicht durch diesen Punkt gehenden Ebene induzierten Bewegungsgruppen haben Symmetriegerüste und dazugehörige Fundamentaldreiecke, welche Projektionen der entsprechenden Fundamentaldreiecke der sphärischen Darstellung sind.

Auf der Grundlage solcher Fundamentaldreiecke läßt sich eine ebene (oder allgemein zweidimensionale) *projektive Darstellung von symmetrischen Polyedern*, insbesondere der durch Punktgruppen erzeugbaren Flächenformen und deren Kombinationen, gewinnen: Überträgt man die Flächenlage von einem Fundamentaldreieck vermöge der Symmetrieoperationen auf alle übrigen, so erhält man alle Flächenpole bzw. Zonenachsenschnittpunkte des entsprechenden Polyeders.



Figur 6.1a: *Harmonische Grundfigur oder 13-Gebilde*



Figur 6.1b: *Harmonische Grundfigur oder 13-Gebilde, welches den Figuren 6.8, 6.9, 6.10 und 6.11 zugrunde liegt*

Diese Flächenpole der Flächenformen sind die Schnittpunkte der auf den Flächen des Polyeders senkrecht stehenden Geraden mit der Darstellungsebene bzw. -sphäre. Dies gilt für alle oben genannten Darstellungen der Symmetriegerüste bzw. Fundamentaldreiecke von Punktgruppen. Dabei entsprechen parallelen Ebenen dieselben Punkte, die Darstellung ist nicht umkehrbar eindeutig.

In der Kristallographie wird für den Zweck der Kristallpolyederdarstellung aus praktischen und vermessungstechnischen Gründen meist die stereographische Projektion des Symmetriegerüstes verwendet und darin die entsprechenden Flächenlagen gekennzeichnet.

Die Darstellung der Flächenlage kann auch als Darstellung einer Punktlage und damit einer Punktform interpretiert werden. Dann sind die Punkte direkt Projektionen von (eventuell) gegenüberliegenden Ecken des entsprechenden Polyeders.

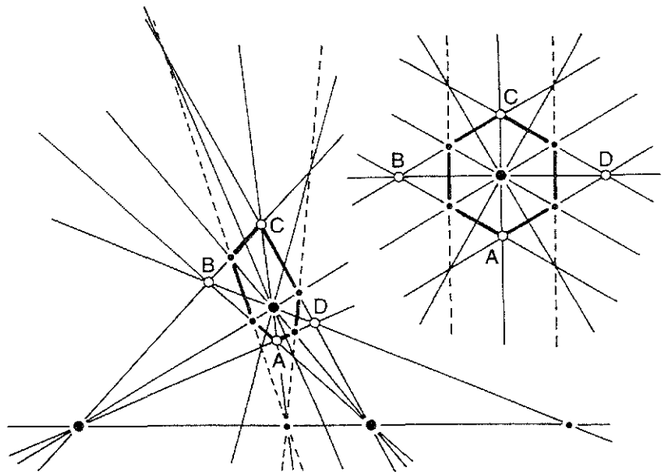
Wie sich herausgestellt hat, sind die durch die Gruppen des kubischen Systems, des Ikosaedersystems sowie der Diedersysteme bestimmten Symmetriegerüste sehr mannigfaltiger Natur. Eine genauere Besprechung der projektiven Darstellung dieser Symmetriegerüste und der dazugehörigen Polyeder im Rahmen der Gruppen des kubischen Systems sowie der Holoedrien der übrigen Kristallsysteme folgt im Abschnitt 6.2, eine entsprechende Behandlung der Gruppen des Ikosaedersystems und der allgemeinen Diedersysteme im Abschnitt 6.5.

Rationale Konstruktionen

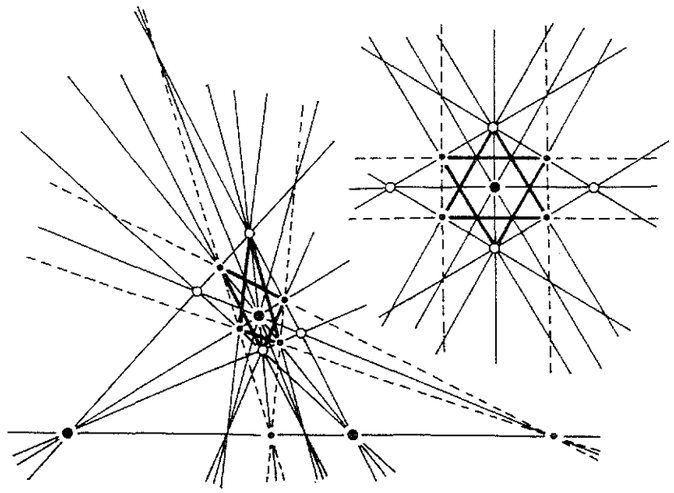
Im folgenden soll noch der Frage nachgegangen werden, in welcher Form die kristallographische Einschränkung auf Achsen mit Zähligkeiten 2, 3, 4 und 6 bei der projektiven Darstellung zum Ausdruck kommt. Dazu wird zunächst das *projektive Zonenverbandsgesetz* aus Abschnitt 3.2 betrachtet: dieses verknüpft Flächenlagen mit Zonenachsen. Man erhält dieses Gesetz aus dem gewöhnlichen Zonenverbandsgesetz, wenn man die entsprechenden Kristallpolyederflächen mit irgendeiner Ebene schneidet (Abschnitt 3.2 und Figur 3.9c).

Nennt man den Schnittpunkt einer Flächennormalen mit dieser Ebene (insbesondere der Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes) den *projektiven Flächenpol* der entsprechenden Fläche, so lautet das auf projektive Flächenpole und Zonenflächen (Abschnitt 3.5) umformulierte Gesetz:

PROJEKTIVES FLÄCHENPOLVERBANDSGESETZ: *Die Flächenpole sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems lassen sich in wenigen Schritten aus beliebigen vier ein Viereck bildenden Flächenpolen eines Kristallpolyeders dieses Kristallsystems ableiten: Jede Verbindungsgerade solcher Pole bestimmt eine Zonenfläche und jeder Schnittpunkt solcher Geraden einen neuen Flächenpol.*



Figur 6.2a: *Rationale Konstruktion eines 6-Ecks aus einer harmonischen Grundfigur*



Figur 6.2b: *Rationale Konstruktion eines 3-Ecks aus einem 6-Eck*

Daraus ist ersichtlich, daß für ein Kristallpolyeder nur solche Flächenlagen bzw. Flächenpole, und damit nur solche Symmetrieelemente (Abschnitt 3.3) in Frage kommen, die ausgehend von vier Flächenpolen desselben durch Verbinden der Punkte und Schneiden der so bestimmten Geraden, das heißt durch alleinige Verwendung eines nicht markierten, unendlich langen Lineals, in der projektiven Ebene aufgebaut werden können. Dies sind sogenannte *rationale Konstruktionen*, auch *lineare Konstruktionen* oder *Konstruktionen ersten Grades* genannt.

Zusammenfassend ergibt sich aus dem projektiven Zonenverbandsgesetz das

GESETZ DER RATIONALEN KONSTRUIERBARKEIT VON KRISTALL-FLÄCHENPOLEN [ODER FLÄCHENLAGEN]: *Die Flächenpole [oder Flächenlagen] sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems lassen sich in wenigen Schritten rational aus beliebigen vier ein Viereck [Vierseit] bildenden Flächenpolen [Flächenschnitte mit der Fernebene] eines Kristallpolyeders dieses Kristallsystems ableiten.*

Ist insbesondere die Linearprojektion eines Symmetriegerüstes gegeben, so müssen die kristallographisch in Frage kommenden Flächenpole daraus rational konstruierbar sein. Dies ist eine Folge der hier so genannten metrischen Fassung des Zonenverbandsgesetzes und der metrischen Fassung des Gesetzes der kleinen rationalen Indizes (Abschnitt 3.4). Die konstruktiven Details werden im Abschnitt 6.3 behandelt.

Figur 6.1a zeigt die aus vier Punkten *ABCD* eines Vierecks ableitbare *harmonische Grundfigur*, auch *13-Gebilde* genannt wegen der darin enthaltenen 13 Punkte und 13 Geraden (Abschnitt 2.2). In **Figur 6.1b** wird diejenige Form dieser harmonischen Grundfigur festgehalten, welche allen im folgenden abgebildeten projektiven Darstellungen von Polyedern mit kubischer Symmetrie zugrunde liegt. Die **Figuren 6.2a** und **6.2b** zeigen die rationale Konstruktion eines 6-Ecks und eines Dreiecks durch Schneiden und Verbinden, ausgehend von vier Punkten *ABCD*.

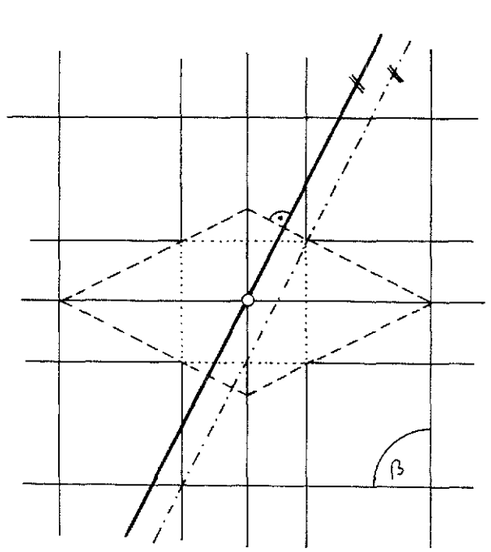
Zusammen mit den Untersuchungen von Abschnitt 3.2 ergibt sich auch eine Neuformulierung des Zonenverbandsgesetzes als

GESETZ DER RATIONALEN KONSTRUIERBARKEIT VON KRISTALL-POLYEDERN: *Die Lagen der Flächen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems lassen sich aus vier ein allgemeines Tetraeder bildenden Flächen eines Kristallpolyeders dieses Kristallsystems in wenigen Schritten rational ableiten.*

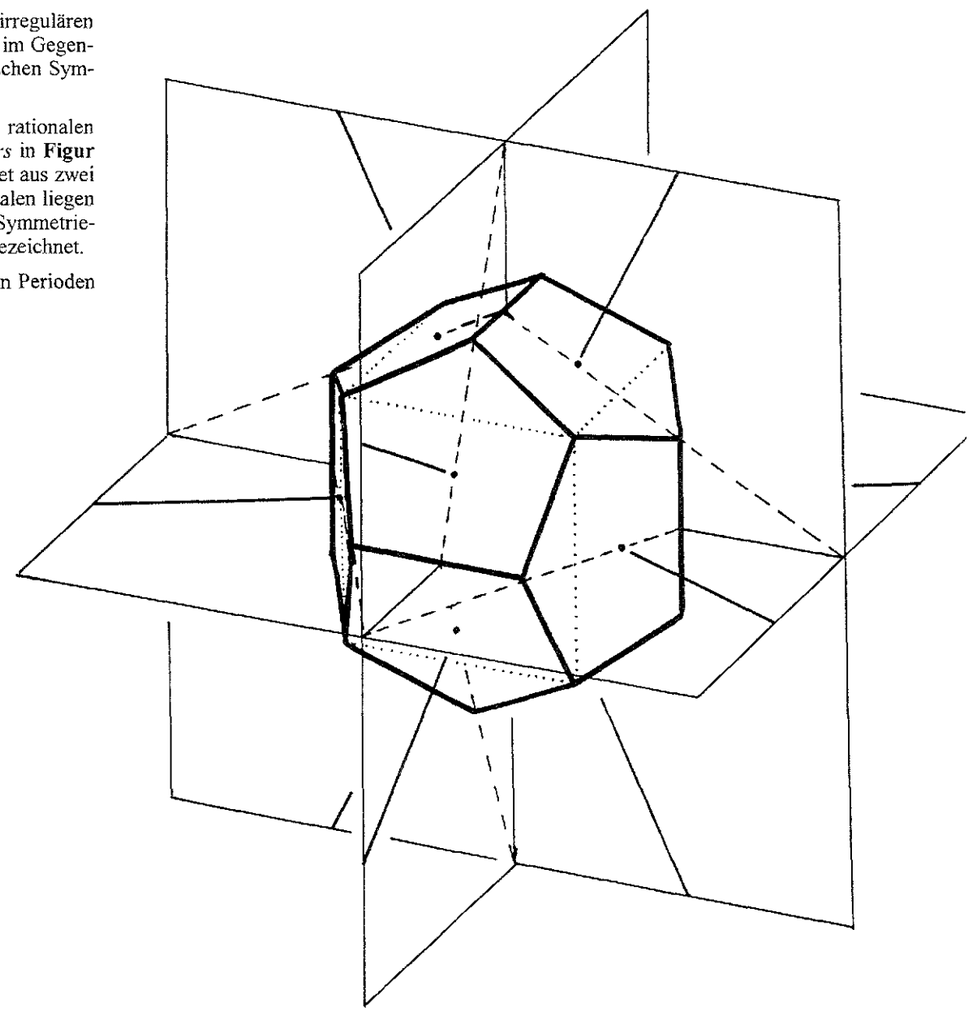
Zur Illustration wird die rationale Konstruktion des kristallographischen, irregulären oder nichtplatonischen Pentagondodekaeders vorgeführt. Dieses läßt sich, im Gegensatz zum regulären (platonischen) Pentagondodekaeder, anhand des kubischen Symmetriegerüstes rational konstruieren.

Die axonometrische Darstellung (orthogonale Parallelprojektion) einer rationalen Konstruktion eines *irregulären (nicht platonischen) Pentagondodekaeders* in **Figur 6.4** geht vom Würfel aus. Auf jeder Würfelfläche wird ein «Dach» errichtet aus zwei Flächen, deren Normalen gemäß **Figur 6.3** konstruiert werden. Die Normalen liegen zu je zweien in den drei paarweise aufeinander senkrecht stehenden Symmetrieebenen des Würfels. Die entsprechenden Hilfslinien sind in Figur 6.4 eingezeichnet.

Das irreguläre Pentagondodekaeder hat 3 und 4 Symmetrieachsen mit den Perioden 2 bzw. 3 (Symmetriegruppe $T_h \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{Z}$).



Figur 6.3: *Hilfskonstruktion zu Figur 6.4*



Figur 6.4: ***Irreguläres Pentagondodekaeder*** *aus Hexaeder*

Ableitung der kristallographischen Einschränkung

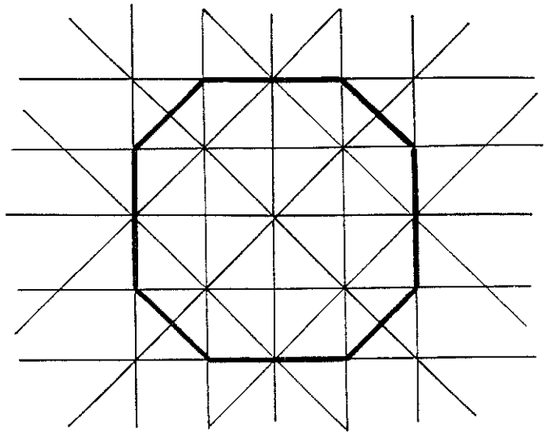
Es wird nun auf eine andere Weise als im Abschnitt 3.3 gezeigt, daß für die euklidischen Bewegungsgruppen mit invariantem Punkt das projektive Flächenpolverbandsgesetz die *kristallographische Einschränkung* zur Folge hat.

Wäre ein 5-Eck ausgehend von vier Punkten rational konstruierbar, so müßte dies auch für die entsprechende symmetrische Figur, das reguläre Fünfeck, gelten, da sich diese Figur vom projektiven Gesichtspunkt aus vom allgemeinen Fünfeck nicht unterscheidet. (Eine rationale Konstruktion eines aus nicht regulären Fünfecken aufgebauten irregulären Pentagondodekaeders zeigt Figur 6.4.) Nun sind aber Fünfecke grundsätzlich nur mit Lineal *und* Zirkel konstruierbar, und Siebenecke sind nicht einmal mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Dies sind Resultate der Theorie der geometrischen Konstruktionen (siehe etwa Bieberbach [1952]). Diese zeigt weiter, daß für ungerade $n \geq 5$ ein n-Eck nie mit Lineal allein und nur in ganz wenigen Fällen mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

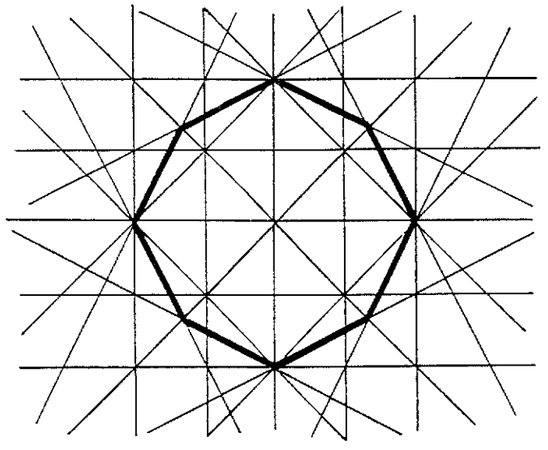
Zudem läßt sich für gerade n aus einem gegebenen regulären n-Eck nicht einmal das reguläre $2n$-Eck konstruieren, da die Winkelteilung eine quadratische Aufgabe ist (Hinweis: Steinersche Doppelgeradenkonstruktion). Auf rationale Weise kann aus einem regulären n-Eck nur ein abgestumpftes n-Eck (di-n-Eck) oder ein ausgeknicktes n-Seit (di-n-Seit) konstruiert werden. Insbesondere kann mit dem Lineal allein aus einem regulären 4-Eck kein reguläres 8-Eck (**Figur 6.5ab**) und aus einem regulären 6-Eck kein reguläres 12-Eck konstruiert werden.

Damit ist im wesentlichen gezeigt, daß mit der Forderung der rationalen Konstruierbarkeit der projektiven Darstellungen von Kristallpolyedern gemäß dem projektiven Flächenpolverbandsgesetz – und damit der rationalen Konstruierbarkeit von Symmetriegerüsten – aus vier beliebigen Punkten nur Drehsymmetrien der Zähligkeiten 2, 3, 4 und 6 verträglich sind. Dies ist gleichbedeutend mit der *kristallographischen Einschränkung*.

Zieht man weiter in Betracht, daß die rationalen Konstruktionen im Rahmen der analytischen projektiven Geometrie durch rationale und lineare Gleichungen darstellbar sind (und umgekehrt), so ergibt sich daraus wieder die Äquivalenz des Zonenverbandsgesetzes mit dem Gesetz der rationalen Flächenindizes. Denn diese Flächenindizes sind nichts anderes als die projektiven Koordinaten der entsprechenden Flächenpole (Abschnitt 3.1).



Figur 6.5a: *Rationale Konstruktionen eines nicht regulären 8-Ecks aus einem regulären 4-Eck: abgestumpftes 4-Eck (di-4-Eck)*



Figur 6.5b: *Rationale Konstruktionen eines nicht regulären 8-Ecks aus einem regulären 4-Eck: ausgeknicktes 4-Seit (di-4-Seit)*

6.2 *Projektive Darstellung von kristallographischen Symmetrien und Polyedern*

Projektive Darstellungen von Symmetriegerüsten

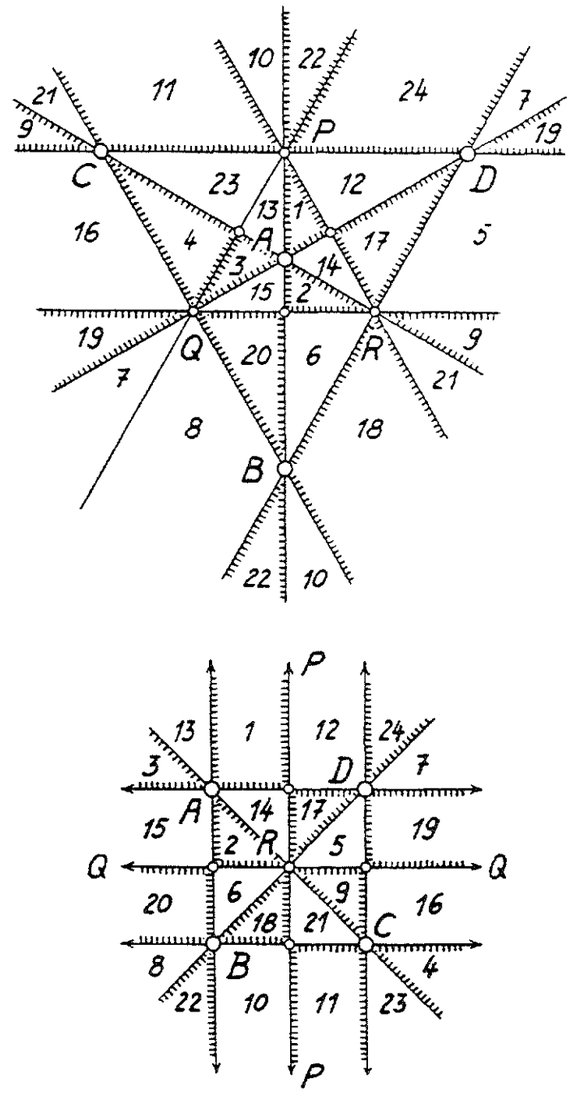
Der Schnitt der Symmetrieelemente einer Punktgruppe mit einer beliebigen Ebene wird *Linearprojektion* oder *projektive Darstellung* genannt. Die im Abschnitt 3.5 eingeführte *gnomonische Projektion* ist ein Spezialfall einer solchen Linearprojektion. Sie wird meist für eine Ebene ausgeführt, die auf einer der Symmetrierichtungen senkrecht steht.

Man beachte: Ein Symmetriezentrum (Inversionszentrum) ist bei Linearprojektionen nicht darstellbar. Dies bedeutet, daß bei Linearprojektionen eines Symmetriegerüstes einer Punktgruppe das Inversionszentrum herausfällt. Denn die Operation der Inversion läßt die Linearprojektion des Symmetriegerüstes invariant, da alle Symmetrieelemente dabei in sich selbst abgebildet werden. Für alle projektiven Darstellungen von Symmetriegerüsten gilt im weiteren, daß die Anzahl der Geraden (Schnittgeraden von Symmetrieebenen), die sich in einem Punkt treffen, gleich der Zähligkeit der Drehachse durch diesen Punkt ist.

Für die Holoedrie des kubischen Systems, die volle Oktaedergruppe (oder volle Hexaedergruppe) $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$, kann dies an **Figur 6.6** abgelesen werden. Sie zeigt die gnomonische Darstellung des Symmetriegerüstes dieser Gruppe, insbesondere den Schnitt dieses Gerüstes mit einer Ebene senkrecht zu einer **3**-Achse und einer **4**-Achse. Im weiteren sind in dieser Figur die Auswirkungen der im letzten Teil von Abschnitt 4.6 angegebenen Symmetrieoperationen des Hexaeders bzw. Oktaeders auf die Transformationen dieser Ebene in sich angegeben. Man sieht daraus, daß nur die gleichsinnigen Operationen etwas in der Projektionsebene der Linearprojektion bewirken, während die Inversion keinen Einfluß hat. Die Transformationen innerhalb der Projektionsebene sind im allgemeinen keine euklidischen Bewegungen, sondern projektive (insbesondere elliptische) Transformationen.

Figur 6.7 zeigt alle gnomonischen Projektionen des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ senkrecht zu den drei Symmetrierichtungstypen sowie eine allgemeine Linearprojektion zusammen mit einem markierten Fundamentaldreieck. Die Zahlen in den Schnittpunkten geben die Zähligkeit der jeweiligen Symmetrieachsen an. Ein Doppelpfeil ↔ weist auf einen Fernpunkt in Richtung der Pfeile.

Die Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Oktaedergruppe in die Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes hat dieselbe Inzidenzstruktur von Punkten und Geraden wie die oberen Figuren in **Figur 6.7**. Wird sie durch eine projektive Transformation des Raumes, welche nur den invarianten Punkt des Symmetriegerüstes festhält, in den «sichtbaren» Bereich hereingeholt, so ergibt sich eine Konfiguration wie zuunterst in **Figur 6.7**.



Figur 6.6: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ senkrecht zu einer 3-Achse und einer 4-Achse*

Man beachte, daß die Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe eine «unvollständige» harmonische Grundfigur ist, da ihr die 4 (in Figur 6.1b gestrichelten) Geraden desjenigen Vierseits fehlen, welche die Schnittpunkte des Nebendreiseits mit dem Viereck verbinden.

Die Linearprojektion des Symmetriegerüstes des *hexagonalen Kristallsystems* (hexagonale Holoedrie) ergibt sich unmittelbar aus **Figur 6.2a**: sie besteht aus den 6 Geraden durch den «Mittelpunkt» des Sechsecks sowie der für das reguläre Sechseck mit der Ferngeraden zusammenfallenden «Mittelgeraden» (**Figur 6.14**).

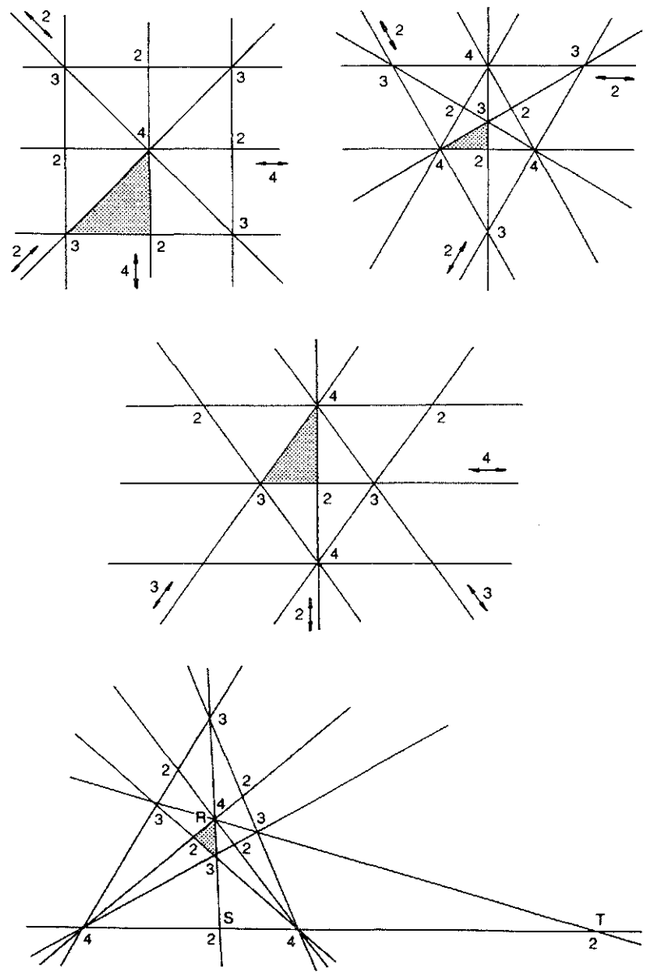
Beispiele projektiver Darstellungen von kristallographischen Flächenformen

Projektive Darstellungen des Hexaeders und Rhombendodekaeders zeigen **Figur 6.8** und **6.9**. Hier wurde die Konfiguration in der Fernebene in eine allgemeine Lage transformiert. Man blickt in diesen Figuren von den Polyedern auf die «dahinter» liegende funktionelle Fernebene (Trägerebene der Linearprojektion des Symmetriegerüstes), die von oben vorne nach unten hinten verläuft.

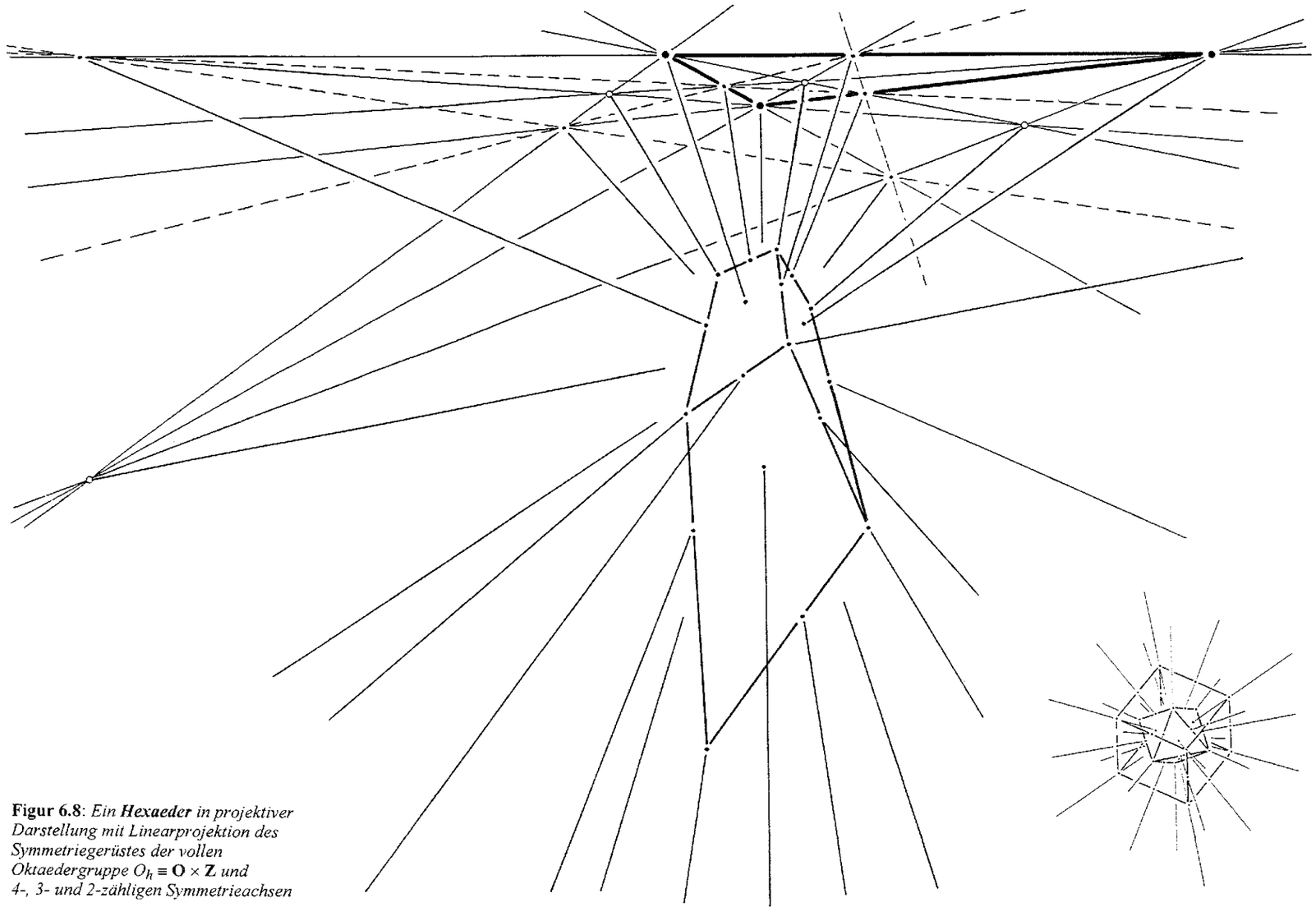
Die 4 Raumdiagonalen des *Hexaeders* (3-zählige Symmetrieachsen) in **Figur 6.8** gehen durch die 4 Ecken des Vierecks der harmonischen Grundfigur, die 3 Flächennormalen (4-zählige Symmetrieachsen) einzeln und die 12 Kanten zu je vieren durch die 3 Nebenecken. Die 6 Verbindungsgeraden der Kantenmitten (2-zählige Symmetrieachsen) gehen einzeln und die 12 Flächendiagonalen paarweise durch die 6 zusätzlichen Schnittpunkte des Nebendreiseits mit dem Viereck (**Figur 7.6**). Die 6 Seitenflächen schneiden sich zu zweit in den 3 Seiten des Nebendreiecks und die 6 Diagonalebenen in den 6 Seiten des Vierecks.

Die 3 Raumdiagonalen des *Oktaeders* (4-zählige Symmetrieachsen) gehen durch die 3 Ecken des Nebendreiecks der harmonischen Grundfigur, die 4 Flächennormalen (3-zählige Symmetrieachsen) durch die 4 Ecken des Vierecks und die 12 Kanten paarweise durch die 6 Schnittpunkte des Nebendreiecks mit dem Viereck, zusammen mit den 2-zähligen Symmetrieachsen durch die gegenüberliegenden Kantenmitten. Die Flächen schneiden sich paarweise in den 4 (gestrichelten) Seiten des Vierseits der harmonischen Grundfigur, auf denen die Durchstoßpunkte der 2-zähligen Symmetrieachsen je zu dritt liegen.

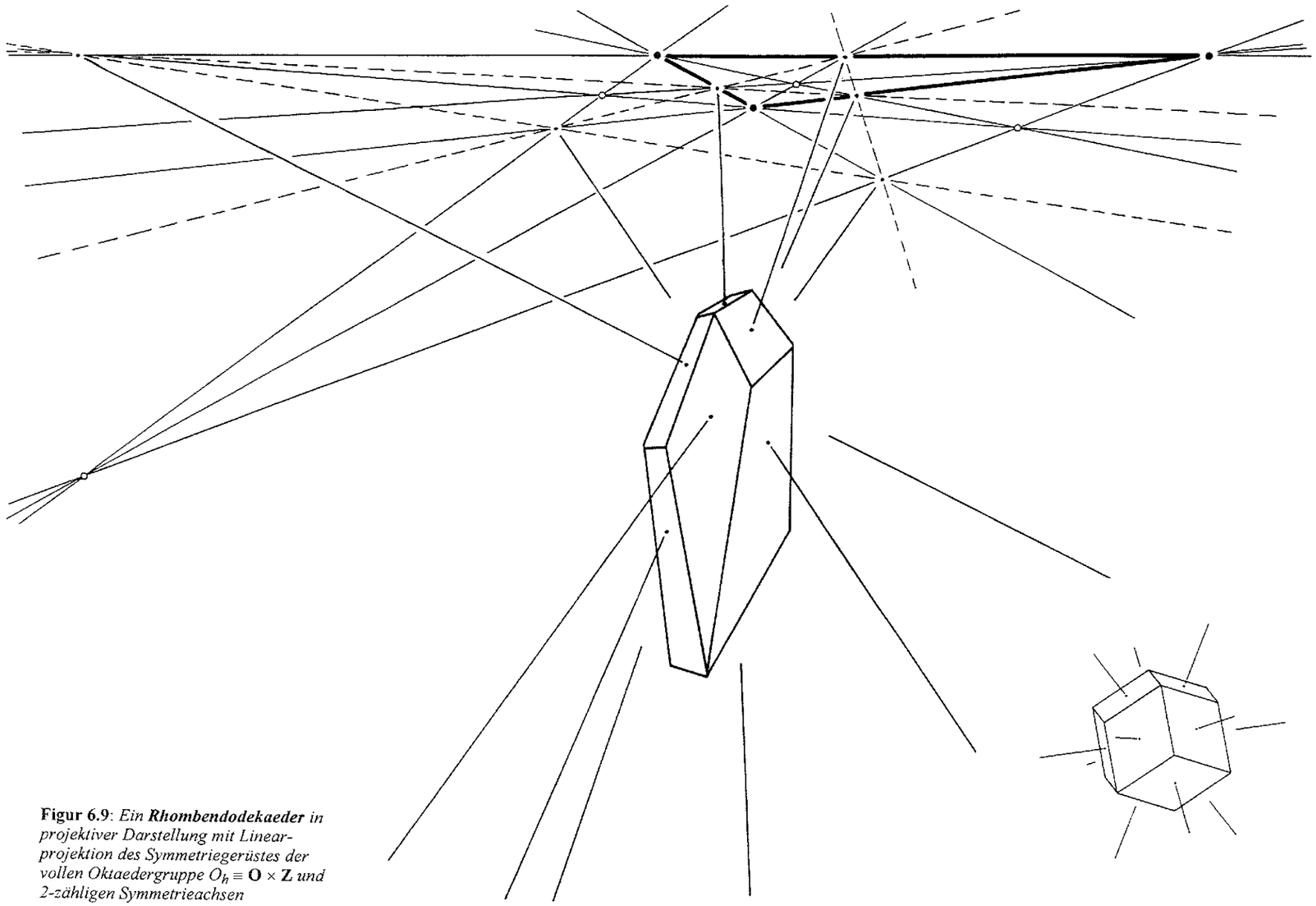
Die drei die 4-er Ecken verbindenden Raumdiagonalen des *Rhombendodekaeders* (4-zählige Symmetrieachsen) in **Figur 6.9** gehen durch die 3 Ecken des Nebendreiecks. Die vier die 3-er Ecken verbindenden Raumdiagonalen (3-zählige Symmetrieachsen) gehen durch die 4 Ecken des Vierecks der harmonischen Grundfigur. Die 24 Kanten schneiden sich zu je sechsen in denselben vier Ecken und die 12 Flächen zu zweit in den sechs Seiten desselben Vierecks der harmonischen Grundfigur. Die 6 Flächennormalen (2-zählige Symmetrieachsen) gehen durch die 6 Schnittpunkte des Vierecks mit dem Nebendreiseit.



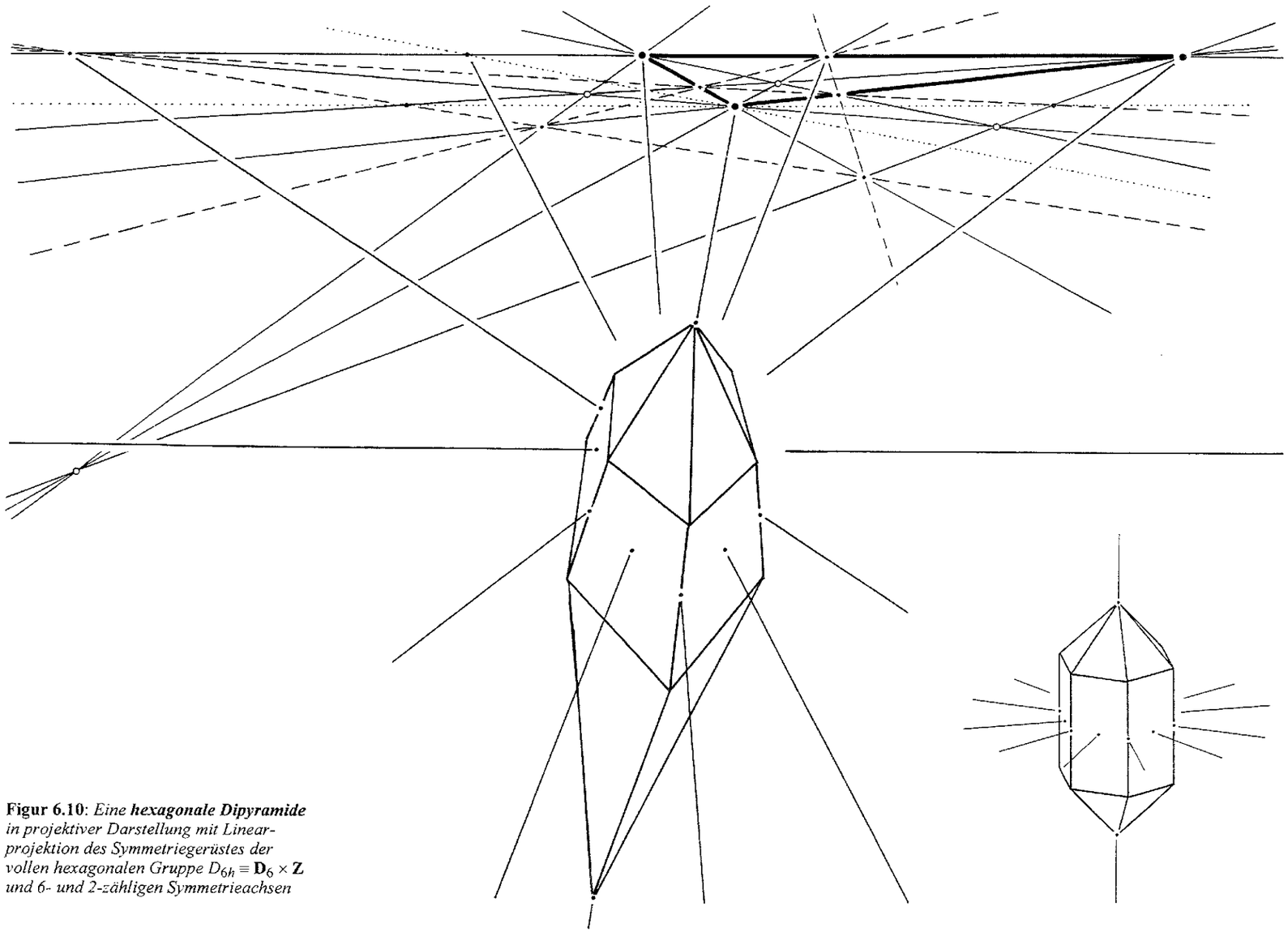
Figur 6.7: *Linearprojektionen des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe* $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ *mit markierten Fundamentaldreiecken*



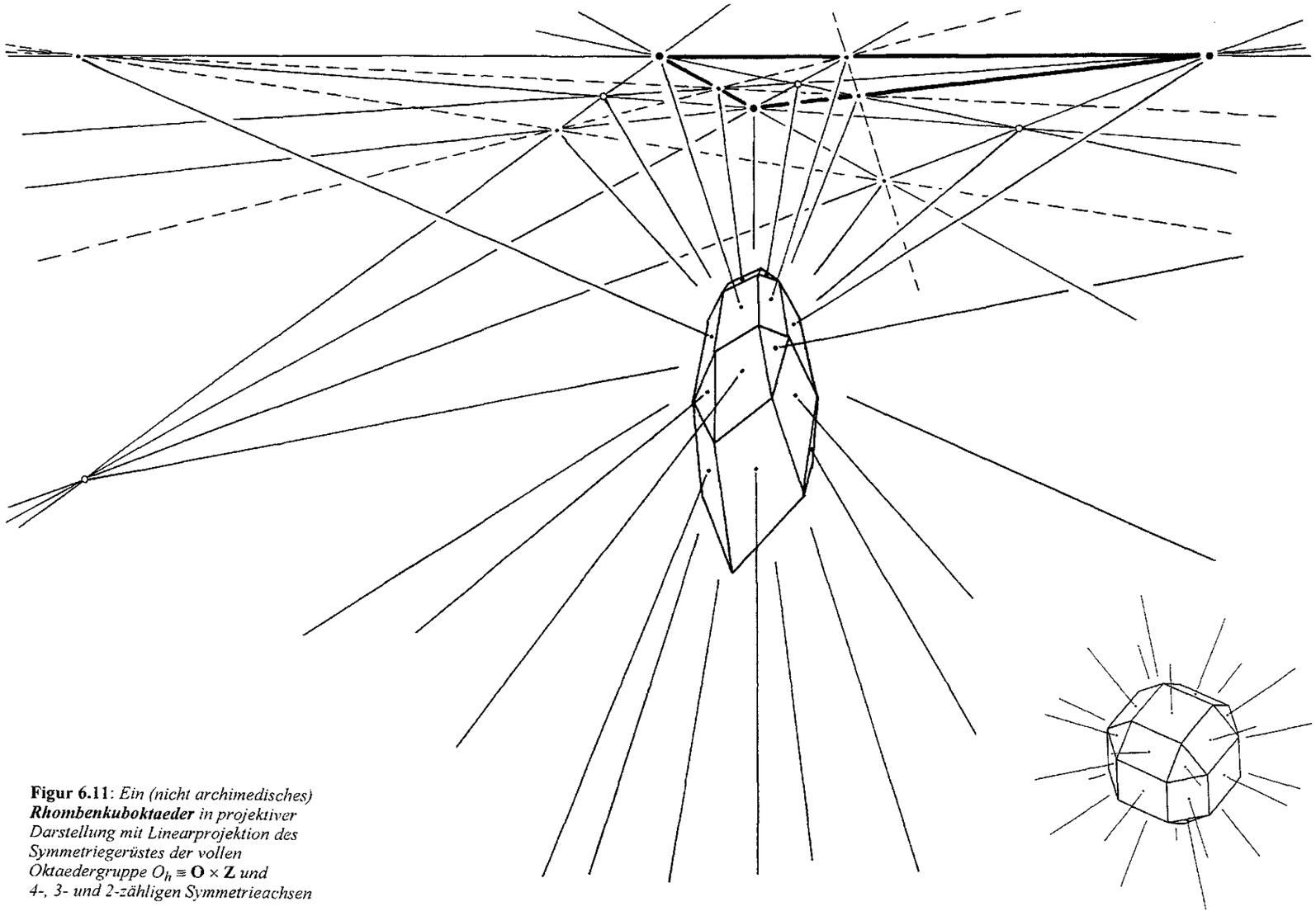
Figur 6.8: *Ein **Hexaeder** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ und 4-, 3- und 2-zähligen Symmetrieachsen*



Figur 6.9: *Ein **Rhombendodekaeder** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ und 2-zähligen Symmetrieachsen*



Figur 6.10: *Eine **hexagonale Dipyramide** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen hexagonalen Gruppe $D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$ und 6- und 2-zähligen Symmetrieachsen*



Figur 6.11: *Ein (nicht archimedisches)* ***Rhombenkuboktaeder*** *in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe* $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ *und 4-, 3- und 2-zähligen Symmetrieachsen*

Man sieht insbesondere in den **Figuren 6.8** und **6.9** (abgesehen von metrischen Verhältnissen) alle geometrisch relevanten Beziehungen zwischen den Hexaeder- bzw. Rhombendodekaederflächen, -ecken und -kanten und den entsprechenden Symmetrieelementen mit ihren Linearprojektionen.

Figur 6.10 zeigt eine *hexagonale Dipyramide* in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes und 6- und 2-zähligen Symmetrieachsen. Die 6 Kanten des prismatischen Teils der Dipyramide gehen dabei durch eine Ecke des Nebendreiecks der harmonischen Grundfigur (Durchstoßpunkt mit der 6-zähligen Achse), die je 6 Kanten der beiden das Prisma berandenden 6-Ecke paarweise durch die Durchstoßpunkte von 2-zähligen Achsen und die je 6 Kanten der beiden Pyramiden paarweise durch die 6 Punkte des zum 6-Eck ergänzten 4-Ecks der harmonischen Grundfigur.

In **Figur 6.11** findet sich die projektive Darstellung eines (nicht archimedischen) Rhombenkuboktaeders, eine Kombinationsform aus den Flächenformen Hexaeder, Oktaeder und Rhombendodekaeder. Die 13 Flächennormalen gehen demzufolge durch die 13 Punkte der harmonischen Grundfigur und die 26 Flächen schneiden sich paarweise in den 13 Geraden dieser Figur. Von den 48 Kanten gehen je 8 durch die 3 Nebenecken und je 4 durch die 6 Schnittpunkte des Nebendreiecks mit dem Viereck der harmonischen Grundfigur.

6.3 *Konstruktion kristallographischer Flächen- und Punktlagen in Linearprojektion*

In diesem Abschnitt soll das Verhältnis des Zonenverbandsgesetzes (Abschnitt 3.2) und des projektiven Flächenpolverbandsgesetzes (Abschnitt 6.1) mit der Linearprojektion des Symmetriegerüstes genauer untersucht werden.

Zunächst ergibt sich folgendes Resultat: *Jede Linearprojektion eines Symmetriegerüstes einer Holoedrie eines Kristallsystems ist eine rationale Erweiterung, eine Teilmenge, oder eine Teilmenge einer rationalen Erweiterung der Linearprojektion des Symmetriegerüstes der kubischen Holoedrie (Hexaeder- oder Oktaedergruppe).*

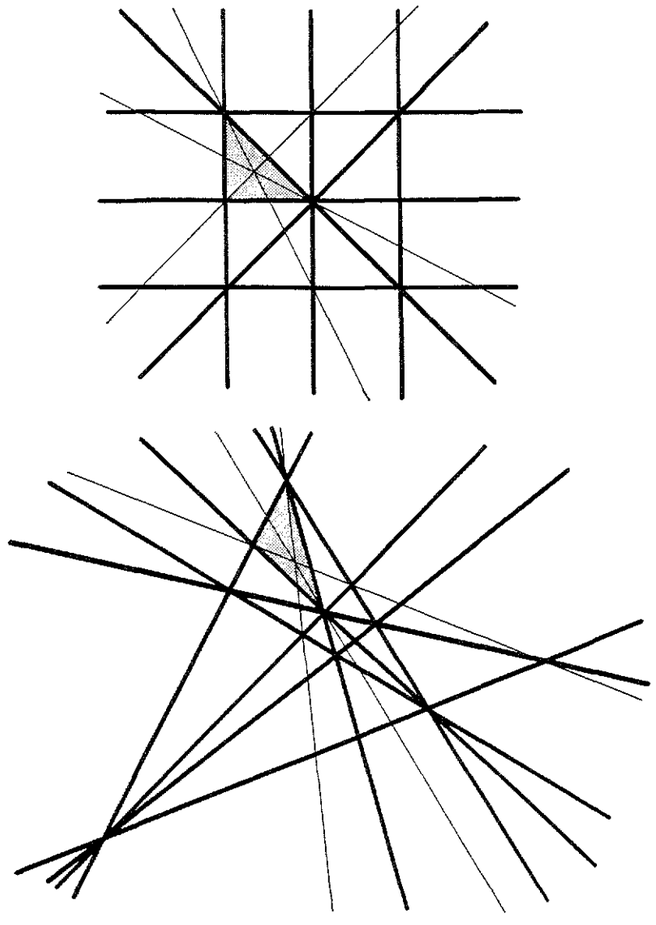
Der Nachweis dieser Behauptung ergibt sich aus folgenden Tatsachen: (1) Jede Kristallklasse ist entweder Untergruppe der kubischen Holoedrie (Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$) oder Untergruppe der hexagonalen Holoedrie $D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$, und damit sind die entsprechenden Symmetriegerüste Teilmengen der Symmetriegerüste der kubischen und der hexagonalen Holoedrie. (2) Die Linearprojektion des Symmetriegerüstes der hexagonalen Holoedrie ist eine Teilmenge einer rationalen Erweiterung der Linearprojektion des Symmetriegerüstes der kubischen Holoedrie.

Für die graphische Darstellung dieser Resultate siehe **Figur 6.2a** für die hexagonale Holoedrie, **Figur 6.2b** für die trigonale Holoedrie, **Figur 6.16** für die tetragonale Holoedrie und **Figur 6.17** für die orthorhombische Holoedrie.

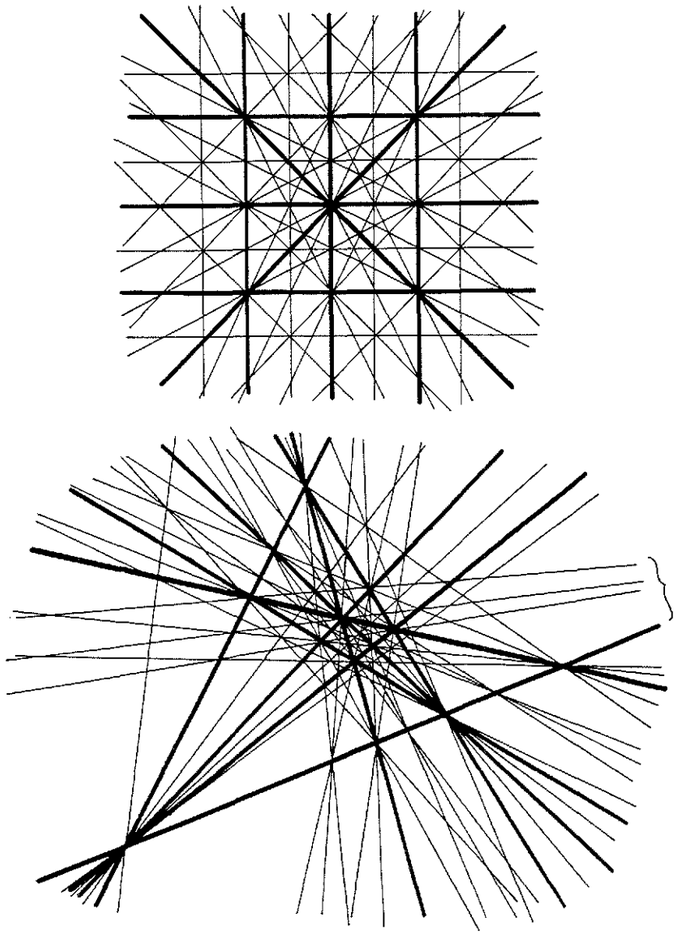
Linearprojektionen von kubischen und hexagonalen Flächen- und Punktlagen

Jedem Punkt in einem Fundamentaldreieck der Holoedrie des kubischen Systems, das heißt der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ (**Figur 6.7**), entspricht eine Flächenlage, das ist der Durchstoßpunkt (Pol) der Flächennormalen einer Fläche des symmetrischen Polyeders mit der Projektionsebene. Ebenso entspricht jedem Punkt eine Punktlage, das ist der Durchstoßpunkt der Verbindungsgeraden einer Ecke des symmetrischen Polyeders mit dem invarianten Punkt. Für kristallographische Flächen- und Punktformen kommen nur solche Flächen- und Punktlagen in Frage, welche aus den gegebenen Punkten der Linearprojektion des Symmetriegerüstes rational konstruierbar sind (Abschnitt 3.2 und 6.1).

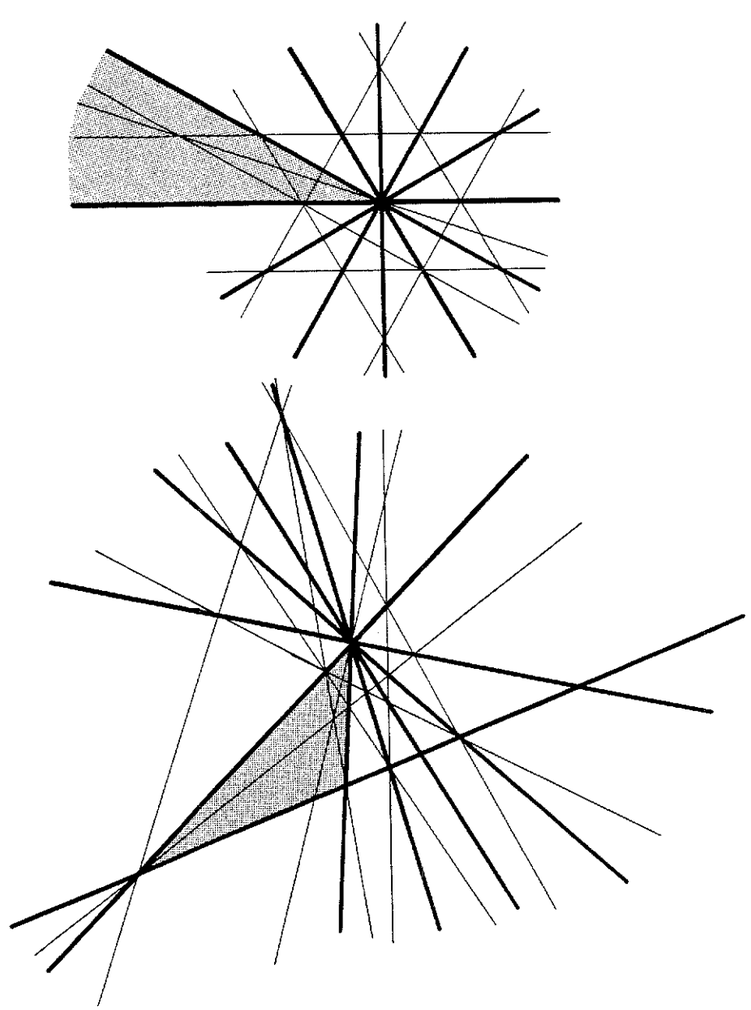
Figur 6.12 zeigt eine Konstruktion von rationalen Flächen- und Punktlagen für alle Typen in einem Fundamentaldreieck der Holoedrie des kubischen Systems $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$, in allgemeiner Linearprojektion sowie in gnomonischer Projektion senkrecht zu einer 4-Achse.



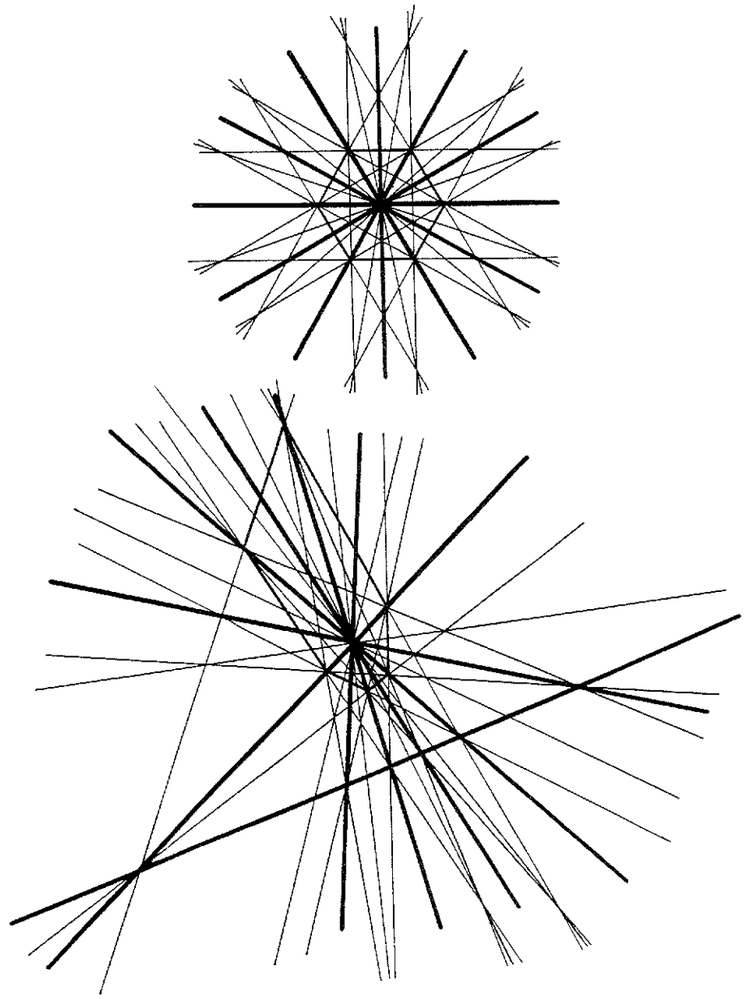
Figur 6.12: *Linearprojektionen des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ mit rationalen Lagen aller Typen in einem Fundamentaldreieck (allgemein und senkrecht zu einer 4-Achse)*



Figur 6.13: *Eine Konstruktion rationaler Lagen aller Typen für alle Fundamentaldreiecke in einer Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Oktaedergruppe $O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z}$ (allgemein und senkrecht zu einer 4-Achse)*



Figur 6.14: *Linearprojektionen des Symmetriegerüstes der vollen hexagonalen Gruppe $D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$ mit rationalen Lagen aller Typen in einem Fundamentaldreieck (allgemein und senkrecht zur 6-Achse)*



Figur 6.15: *Eine Konstruktion rationaler Lagen aller Typen für alle Fundamentaldreiecke in einer Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen hexagonalen Gruppe $D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$ (allgemein und senkrecht zur 6-Achse)*

Die entsprechend durchgeführte Konstruktion für alle Fundamentaldreiecke führt auf eine Konfiguration, wie sie in **Figur 6.13** abgebildet ist.

Es gibt natürlich verschiedene Wege, um rationale Punkte aus den gegebenen Punkten zu konstruieren. In **Figur 6.13** beginnt die Konstruktion mit denjenigen 4 Geraden, welche nur 2-zählige Punkte verbinden (und Lagen des Typs IV bestimmen), fährt fort mit den 12 Geraden, welche 3- und 2-zählige Punkte verbinden (und unter anderem Lagen des Typs VI bestimmen). Die Schnittpunkte dieser beiden Geradenmengen bestimmen Punkte des Lagetyps VII. Verbindet man diese mit den 4-zähligen Punkten, so erhält man 12 weitere Geraden, welche schließlich (unter anderem) Punkte des Lagetyps V bestimmen.

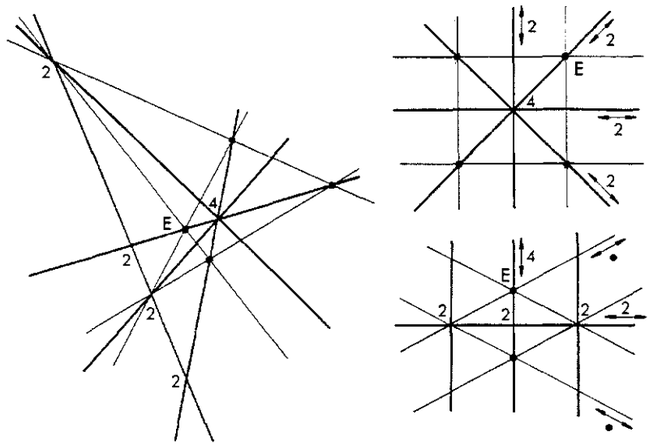
Eine Geradenmenge, welche durch die Operationen einer Gruppe als Ganzes in sich übergeführt wird, heißt eine *transitive Geradenmenge*. Die Geradenmengen der Figur 6.13 und Figur 6.15 sind offenbar transitiv.

Man erkennt, daß durch diese rationalen Konstruktionen in jedem Fundamentaldreieck für alle 7 Lagetypen mindestens ein Repräsentant, das heißt ein Punkt bestimmt ist. Greift man zum Beispiel alle Schnittpunkte des Lagetyps V heraus, so erhält man die Darstellung der Flächenlagen eines Deltoidikositetraeders in Linearprojektion, etc. Der Lagetyp I (drei 4-zählige Punkte) entspricht dem Hexaeder, der Lagetyp II (vier 3-zählige Punkte) dem Oktaeder und der Lagetyp III (sechs 2-zählige Punkte) dem Rhombendodekaeder.

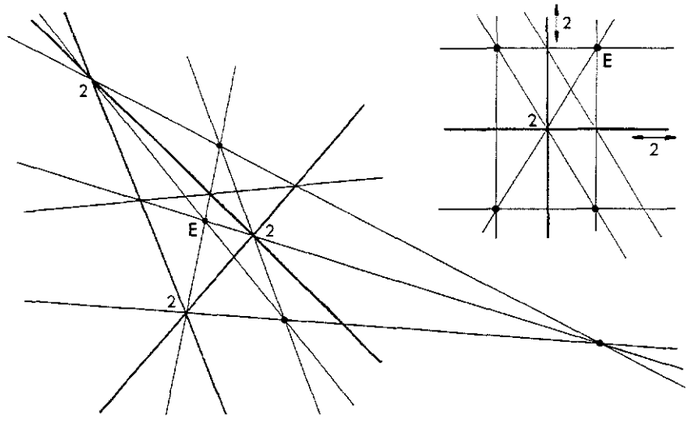
Figur 6.14 und 6.15 zeigen die analogen Verhältnisse für die Holoedrie des hexagonalen Systems, die Gruppe $D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z}$. **Figur 6.14** zeigt eine Linearprojektion des Symmetriegerüstes (wobei die gnomonischen Projektionen senkrecht zu irgendeiner 2-Achse alle untereinander gleich sind) zusammen mit einem Fundamentaldreieck und der Konstruktion rationaler Flächenlagen für dasselbe. Eine für alle Fundamentaldreiecke durchgeführte Konstruktion von rationalen Lagen aller Typen zeigt schließlich **Figur 6.15**.

Linearprojektionen von Symmetriegerüsten sowie Flächen- und Punktlagen

Im folgenden soll gezeigt werden, wie aus der Linearprojektion eines beliebigen Symmetriegerüstes die projektive Darstellung von kristallographischen Flächen- und Punktlagen bezüglich dieses Symmetriegerüstes konstruiert werden kann. Für die kubische und die hexagonale Holoedrie wurde dieses Problem oben behandelt. Dort hat sich herausgestellt, daß das Symmetriegerüst die rational konstruierbaren Punkte unmittelbar festlegt, also keine weiteren Freiheitsgrade für die Wahl der Lagen mehr bestehen. Für die Holoedrien der übrigen Kristallsysteme zeigt sich, daß deren linearprojizierten Symmetriegerüste hinsichtlich der Konstruktion von kristallographischen Punkt- und Flächenlagen unterbestimmt sind, also zusätzliche Freiheitsgrade in der Wahl der Lagen bestehen.



Figur 6.16: *Konstruktion von vier Punkten in allgemeiner Lage im Symmetriegerüst der tetragonalen Holoedrie $D_{4h} \equiv \mathbf{D}_4 \times \mathbf{Z}$ (allgemein und senkrecht zu 4- und 2-Achse)*



Figur 6.17: *Konstruktion von vier Punkten in allgemeiner Lage im Symmetriegerüst der orthorhombischen Holoedrie $D_{2h} \equiv \mathbf{D}_2 \times \mathbf{Z}$ (allgemein und senkrecht zur 2-Achse)*

Insbesondere müssen vier unmittelbar mit dem Symmetriegerüst rational zusammenhängende Punkte in allgemeiner Position festgelegt werden als notwendiger und hinreichender Ausgangspunkt rationaler Konstruktionen (diese vier Punkte legen ein projektives Möbiusnetz fest). Damit sind dann alle weiteren rationalen Flächen- und Punktlagen gemäß dem Flächenpolverbandsgesetz ableitbar.

Dies bedeutet nichts anderes, als daß es bei den folgenden Konstruktionen darauf ankommt, aus einem gegebenen Symmetriegerüst eine harmonische Grundfigur bzw. eine rational erweiterte harmonische Grundfigur zu finden, in welche das gegebene Symmetriegerüst einbettbar ist.

In den folgenden Figuren erscheinen die Konstruktionen sowohl anhand einer allgemeinen Linearprojektion als auch in einer gnomonischen Projektion, das heißt einer Linearprojektion senkrecht zu einer Symmetrieachse.

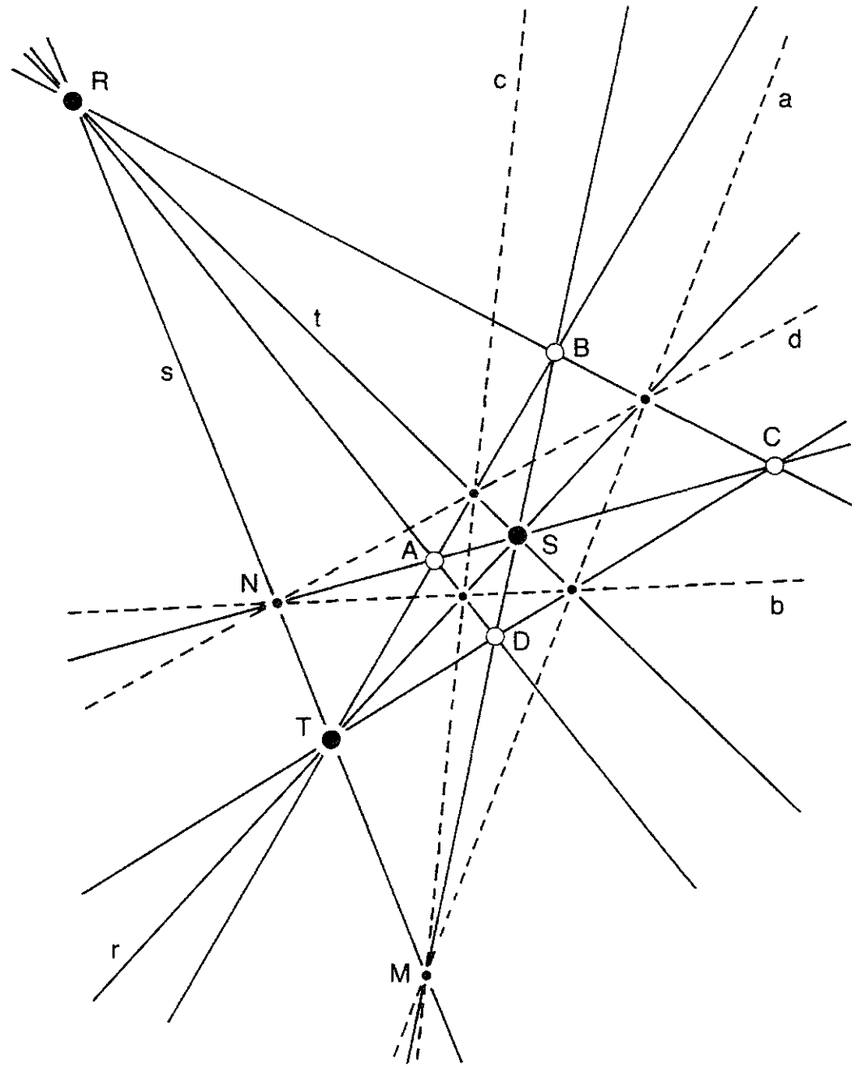
Bei der *tetragonalen Holoedrie* $D_{4h} \equiv \mathbf{D}_4 \times \mathbf{Z}$ (**Figur 6.16**) genügt zur Festlegung einer die Linearprojektion des Symmetriegerüstes enthaltenden harmonischen Grundfigur die Wahl eines Punktes E auf einer der vier Geraden durch den 4-zähligen Punkt.

Für die *orthorhombische Holoedrie* $D_{2h} \equiv \mathbf{D}_2 \times \mathbf{Z}$ (**Figur 6.17**) muß der Punkt E außerhalb der Geraden der Linearprojektion des Symmetriegerüstes liegen.

Bei der *trigonalen Holoedrie* $D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z}$ (**Figur 6.2b**) muß zur Festlegung einer rational erweiterten harmonischen Grundfigur, welche die Linearprojektion eines trigonalen Symmetriegerüstes enthält, ebenfalls nur ein Punkt E außerhalb der Geraden der Linearprojektion des Symmetriegerüstes gewählt werden.

Die Linearprojektionen des Symmetriegerüstes der monoklinen und der triklinen Holoedrien sind so defizitär, daß erst durch die Wahl von 3 Punkten bei der *monoklinen Holoedrie* $C_{2h} \equiv \mathbf{C}_2 \times \mathbf{Z}$ und von 4 Punkten bei der *triklinen Holoedrie* $C_i \equiv \mathbf{C}_1 \times \mathbf{Z}$ (**Figur 6.1a** oder **Figur 6.18**) eine harmonische Grundfigur als Basis rationaler Lagekonstruktionen entsteht.

Damit ist zumindest für die Holoedrien der sieben Kristallsysteme gezeigt, wie kristallographische Flächen- und Punktlagen aus der Linearprojektion des Symmetriegerüstes konstruiert werden können. Hiermit sind im wesentlichen auch die dazugehörigen Polyederklassen bestimmt.



Figur 6.18: *Harmonische Grundfigur oder 13-Gebilde*

6.4 *Projektive Charakterisierung der Kristallformungsgesetze*

Abgesehen von dem in die geometrische Kristallographie einführenden Kapitel 3 stand bisher das Symmetriegesetz in der Entwicklung der möglichen Kristallformen im Vordergrund. Das Zonenverbandsgesetz sorgte dabei einerseits für eine Reduktion aller möglichen Punktsymmetriegruppen auf die kristallographischen Gruppen und andererseits für den Miteinbezug der Kombinationsformen (Abschnitt 3.3 und 5.3). Bei der Diskussion der Symmetrien spielte das Symmetriegerüst der größten Gruppen (Holoedrien) der jeweiligen Systeme und deren verschiedene Darstellungen (orthogonale Parallelprojektion oder Axonometrie, stereographische Projektion, Linearprojektion) eine entscheidende Rolle. Anhand der durch dieses Gerüst bestimmten Fundamentaldreiecke und Lagetypendreiecke ergab sich zudem eine systematische Übersicht aller Flächen- und Punktformen.

In den letzten Abschnitten wurde gezeigt, wie man anhand der projektiven Darstellung (Linearprojektion) von Symmetriegerüsten alle wesentlichen Elemente für die rationale Darstellung von Flächen- und Punktlagen gewinnen kann. Diese Konstruktionen lassen sich natürlich auch im Falle der stereographischen Projektion durchführen, was aber hier nicht weiter verfolgt werden soll, da sich die einzelnen Konstruktionsschritte der beiden Darstellungsarten nicht wesentlich unterscheiden (siehe dazu die am Ende des Kapitels 3 angegebenen Lehrbücher der Kristallographie und Kristallgeometrie).

In diesem Abschnitt steht nun das Zonenverbandsgesetz in seiner linearprojektiven Form (Abschnitt 3.2 und 6.1) im Vordergrund, insbesondere das Gesetz der rationalen Konstruierbarkeit von Kristallpolyedern. Es soll untersucht werden, in welcher Form das Symmetriegesetz im einzelnen mit dem Zonenverbandsgesetz zusammenspielt.

Projektive Klassifikation der Kristallsysteme

In linearprojektivem Gewand behauptet das Zonenverbandsgesetz in der Form des projektiven Flächenpolverbandsgesetzes oder des Gesetzes der rationalen Konstruierbarkeit von Kristallpolyedern, daß es in jeder projektiven Darstellung (Linearprojektion) der Flächenpole (= Flächenlagen) eines Polyeders vier Punkte in allgemeiner Lage gibt, von welchen aus alle übrigen Punkte und Verbindungsgeraden in wenigen Schritten rational konstruierbar sind.

Insbesondere können auf diese Weise die Elemente der Linearprojektion des Symmetriegerüstes konstruiert werden. Dieses Gebilde kann dann gemäß Abschnitt 6.3, eventuell durch weitere Konstruktionsschritte, in eine vollständige harmonische Grundfigur eingebettet werden, unabhängig davon, wie die vier Punkte liegen oder welchem Kristallsystem bzw. welcher Kristallklasse das Kristallpolyeder angehört.

Im folgenden wird als Projektionsebene nicht irgendeine Ebene, sondern die *Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes* betrachtet. Sie enthalte gemäß den obigen Ausführungen eine die Linearprojektion des Symmetriegerüstes umfassende harmonische Grundfigur als rationale Erweiterung der vier Ausgangspunkte. Die Klassifikation dieser durch Kristallpolyeder in der Fernebene induzierten harmonischen Grundfiguren gründet sich auf die Beziehung der Elemente der harmonischen Grundfigur zur Rechtwinkelpolarität der euklidischen Metrik.

Gemäß den Ausführungen von Abschnitt 2.4 und 2.6 bewirkt die Beziehung der Rechtwinkligkeit in der Fernebene des euklidischen Raumes eine (elliptische oder gleichsinnige) Polarität, hier *ebene Rechtwinkelpolarität* genannt, in welcher einem Punkt (Durchstoßpunkt paralleler Geraden) genau eine ihn nicht enthaltende Gerade (Schnittgerade des zu den parallelen Geraden senkrechten Ebenenbüschels) entspricht – und umgekehrt. Dies bewirkt auch für die Punkte einer Geraden eine wechselseitige Zuordnung, welche *lineare Rechtwinkelinvolution* genannt wird.

Werden n auf einer Ferngeraden g liegende Punkte durch Drehungen um die Achse durch den Rechtwinkelpol von g der Reihe nach ineinander übergeführt, so spricht man von einem *n-Zyklus* von Punkten.

Ist nun eine harmonische Grundfigur innerhalb der Linearprojektion eines Kristallpolyeders gegeben, welche die Linearprojektion des dazugehörigen Symmetriegerüstes enthält, so führen die verschiedenen Fälle gemäß **TABELLE 6.1** zu einer eindeutigen Bestimmung des Kristallsystems dieses Kristallpolyeders.

Der Beweis, daß durch die genannten Bedingungen tatsächlich die entsprechenden Kristallsysteme eindeutig bestimmt sind, ergibt sich aus dem Vergleich der kristallographischen Achsenrichtungen und der dazugehörigen Symmetriegerüste. Zu ersterem siehe Tabelle 3.2 und Figur 3.11 im Abschnitt 3.4 und zu letzterem Abschnitt 4.5, Figuren 4.15 bis 4.19 sowie die vorangehenden drei Abschnitte des Kapitels 6.

Die *projektive Charakterisierung der Kristallformungsgesetze* beinhaltet also: die Linearprojektion des Zonenverbandsgesetzes in die Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes; die dadurch induzierte harmonische Grundfigur, welche die Linearprojektion des Symmetriegerüstes enthält; und schließlich die Klassifikation dieser Figur gemäß ihrem Verhältnis zur Rechtwinkelpolarität in der Fernebene (Tabelle 6.1).

Damit sind die wesentlichen geometrisch bedingten morphologischen Merkmale eines Kristallpolyeders (insbesondere das Kristallsystem und die möglichen Flächenlagen) durch verschieden angeordnete Punkt-Geraden-Konfigurationen in der Fernebene bestimmt.

TABELLE 6.1: *Klassifikation von durch Kristallpolyeder induzierten harmonischen Grundfiguren in der Fernebene*

(A) Das Nebendreieck der harmonischen Grundfigur (*RST* in **Figur 6.18**) ist selbstpolar in der ebenen Rechtwinkelpolarität.

(1) Es existiert eine lineare Rechtwinkelinvolution auf allen Seiten (*r*, *s*, *t* in **Figur 6.18**) des Nebendreiecks. Die harmonische Grundfigur ist als Ganzes selbstpolar bezüglich der ebenen Rechtwinkelpolarität.

KUBISCHES KRISTALLSYSTEM

(2) Es existiert genau auf einer Seite des Nebendreiecks eine lineare Rechtwinkelinvolution (**Figur 6.16**). (Gibt es auf *zwei* Seiten des Nebendreiecks eine solche Involution, so muß es auch auf der dritten Seite eine geben, was wieder auf Fall A1 führt.) Mit anderen Begriffen: Es gibt auf dieser Nebenseite einen Zyklus von 4 Punkten, welche Durchstoßpunkte der 2 Diagonalen und der 2 Seitennormalen eines Quadrates sind.

TETRAGONALES KRISTALLSYSTEM

(3) Es existiert auf keiner Seite des Nebendreiecks eine lineare Rechtwinkelinvolution (**Figur 6.17**).

ORTHORHOMBISCHES KRISTALLSYSTEM

(B) Es existiert im Nebendreieck der harmonischen Grundfigur genau ein Pol-Polaren-Paar *R*, *r*, das heißt ein Punkt *R* und die gegenüberliegende Seite *r* des Nebendreiecks sind eben rechtwinkelpolar.

(1) Es existiert auf *r* ein Zyklus von 6 Punkten, welche Durchstoßpunkte der 3 Diagonalen und der 3 Seitennormalen eines regulären 6-Ecks sind (**Figur 6.2a** und **Figur 6.14**).

HEXAGONALES KRISTALLSYSTEM

(2) Es existiert auf *r* ein Zyklus von 3 Punkten, welche Durchstoßpunkte der 3 Seitennormalen (oder Seitenhöhen) eines regulären 3-Ecks sind (**Figur 6.2b**).

TRIGONALES KRISTALLSYSTEM

(3) Es existiert auf *r* kein 3-, 4- oder 6-Zyklus von Punkten.

MONOKLINES KRISTALLSYSTEM

(C) Es existiert im Nebendreieck der harmonischen Grundfigur kein Pol-Polaren-Paar (**Figur 6.1a**).

TRIKLINES KRISTALLSYSTEM

Das Resultat der eben durchgeführten Klassifikation kann auch noch unter einem etwas anderen Gesichtspunkt betrachtet werden.

Die einem Kristallpolyeder der *kubischen Kristallfamilie* (kubisches, tetragonales, orthorhombisches, monoklines und triklines System) zugrunde liegende harmonische Grundfigur in der Fernebene bestimmt durch das Verhältnis ihres Vierecks und Vierseits ein dem entsprechenden Kristallsystem spezifisch zugehöriges gleichsinniges oder elliptisches Polarsystem mit dem Nebendreieck als Polardreieck. In der harmonischen Grundfigur der **Figur 6.18** ist das Polarsystem etwa gegeben durch die Zuordnung $RSTA \mapsto rsta$ (siehe Locher [1940a], S. 208ff.). Im Falle des kubischen Kristallsystems fällt das Polarsystem der Linearprojektion des Symmetriegerüstes jedes Kristallpolyeders in die Fernebene mit dem Rechtwinkelpolarsystem zusammen.

Die der *hexagonalen Kristallfamilie* (hexagonales und trigonales Kristallsystem) zugrunde liegende erweiterte harmonische Grundfigur (**Figuren 6.2a**, **6.14**, **6.15**) bestimmt vermöge der Umkehrung des Satzes von Pascal (siehe Locher [1940a], S. 136f.) ein ungleichsinniges oder hyperbolisches Polarsystem in der Fernebene. Letzteres hat im Gegensatz zu dem Polarsystem der kubischen Familie einen reellen Inzidenzkegelschnitt, das heißt, es besitzt eine Kurve zweiten Grades, die aus inzidenten Pol-Polaren-Paaren besteht. Damit lassen sich die kubische und die hexagonale Kristallfamilie gemäß den von ihnen in der Fernebene induzierten elliptischen oder hyperbolischen Polarsystemen unterscheiden.

Symmetrien der Linearprojektion von Kristallpolyedern

Die projektive Flächenpoldarstellung eines Kristallpolyeders gibt keinen Aufschluß darüber, ob die Symmetriegruppe des entsprechenden Tangentialpolyeders die Inversion (Punktspiegelung) enthält oder nicht. Denn es kommt einer wie zwei parallelen gegenüberliegenden Kristallflächen genau ein Flächenpol zu. Hat eine einfache Kristallform *m* Flächenpole, so kann sie demzufolge $2m$ oder *m* Flächen haben.

Ist die Ordnung der Symmetriegruppe *n*, so können die einfachen Flächenformen *n*, $n/2$ oder $n/4$ Flächen haben. Also ist entweder $2m = n$ oder $2m = n/2$. Im ersten Fall kommen als Symmetriegruppen mit Inversion die sieben Holoedrien

$$O_h \equiv \mathbf{O} \times \mathbf{Z},\ D_{6h} \equiv \mathbf{D}_6 \times \mathbf{Z},\ D_{4h} \equiv \mathbf{D}_4 \times \mathbf{Z},\ D_{3d} \equiv \mathbf{D}_3 \times \mathbf{Z},$$
$$D_{2h} \equiv \mathbf{D}_2 \times \mathbf{Z},\ C_{2h} \equiv \mathbf{D}_1 \times \mathbf{Z} \equiv \mathbf{C}_2 \times \mathbf{Z},\ C_i \equiv \mathbf{C}_1 \times \mathbf{Z}$$

in Frage und im letzteren Fall die vier paramorphen Hemiedrien

$$T_h \equiv \mathbf{T} \times \mathbf{Z},\ C_{6h} \equiv \mathbf{C}_6 \times \mathbf{Z},\ C_{4h} \equiv \mathbf{C}_4 \times \mathbf{Z},\ C_{3i} \equiv \mathbf{C}_3 \times \mathbf{Z}$$

(Tabelle 4.4). Damit kann anhand der Flächenpoldarstellung bestenfalls abgelesen werden, ob die Symmetriegruppe eines Kristallpolyeders eine Untergruppe oder gleich einer der 11 kristallographischen Gruppen mit Inversion **Z** ist (Abschnitt 7.1).

Verschiedene Einteilungen der Kristallsysteme

Das Ergebnis der Klassifikation eines harmonischen Grundgebildes in der Fernebene gemäß seiner Beziehung zur Rechtwinkelpolarität in dieser Ebene kann auf verschiedene Weise interpretiert werden.

Werden die gemeinsamen Pol-Polaren-Elemente in den Vordergrund gerückt, so ordnen sich die Kristallsysteme in drei Bereiche, die oben mit (A), (B), (C) bezeichnet wurden:

- kubisch, tetragonal, orthorhombisch;
- hexagonal, trigonal, monoklin;
- triklin.

Wird dagegen in Betracht gezogen, daß eine harmonische Grundfigur, wie sie im Fale des kubischen, tetragonalen, orthorhombischen, monoklinen und triklinen Kristallsystems auftaucht, in natürlicher Weise eine gleichsinnige (elliptische) Polarität festlegt und im Falle des hexagonalen und trigonalen Kristallsystems eine gegensinnige (hyperbolische) Polarität, so erweisen sich diese letzteren Systeme als wesentlich anders geartet als die ersteren. Im Falle des kubischen Systems fällt diese Polarität sogar mit der Rechtwinkelpolarität zusammen. Dies ergibt folgende Einteilung der Kristallsysteme:

- kubisch, tetragonal, orthorhombisch, monoklin, triklin;
- hexagonal, trigonal;

oder

- kubisch;
- tetragonal, orthorhombisch, monoklin, triklin;
- hexagonal, trigonal.

Im Sinne der nichteuklidischen Geometrie liegt demzufolge dem hexagonalen und trigonalen Kristallsystem in der Fernebene eine ganz andere Metrik zugrunde als den übrigen Kristallsystemen. – Die letztere Einteilung der Kristallsysteme wird auch durch den gruppentheoretischen Gesichtspunkt, inbesondere durch die Untergruppenverhältnisse, nahegelegt (Abschnitt 4.4, Figur 4.14a, b und Tabelle 4.5).

Vom geometrisch-gruppentheoretischen Gesichtspunkt aus könnte man auch das kubische Kristallsystem allen übrigen Kristallsystemen gegenüberstellen, da ersteres eine Gruppe für sich bildet und die letzteren Spezialfälle der Diedergruppen sind. Auf diese Weise ergibt sich folgende Einteilung:

- kubisch;
- hexagonal, trigonal, tetragonal, orthorhombisch, monoklin, triklin.

Zieht man weiter die Klassifikation der Diedergruppen in Systeme in Betracht (Abschnitt 5.5), so müßte man die Kristallsysteme folgendermaßen einteilen:

- kubisch;
- tetragonal;
- hexagonal, orthorhombisch, monoklin;
- trigonal, triklin.

Mathematisch läßt sich nicht entscheiden, welche Einteilung der Kristallsysteme die «natürlichste» ist, dies hängt vom jeweiligen Standpunkt sowie den eingesetzten Methoden ab. Diese Frage kann letztlich nur von Gesichtspunkten aus geklärt werden, die noch andere begriffliche Kategorien miteinbeziehen als die rein mathematischen.

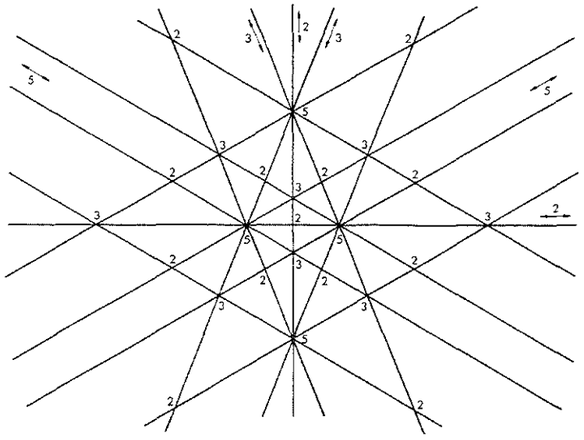
6.5 *Projektive Darstellungen nichtkristallographischer Symmetrien*

Projektive Darstellungen des Symmetriegerüstes der Ikosaedergruppe

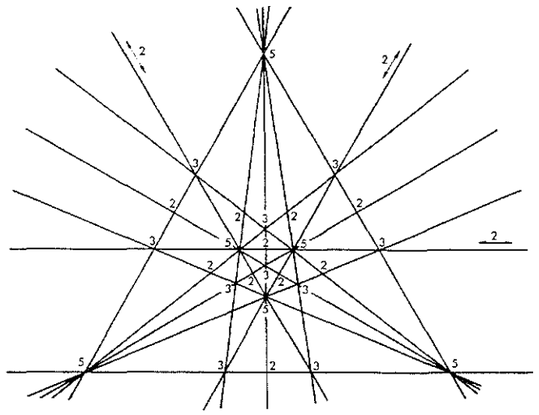
In diesem Abschnitt steht die Ikosaedergruppe im Vordergrund. Das prinzipielle Vorgehen ist dasselbe wie im Abschnitt 6.2, so daß hier nicht alle Einzelheiten wiederholt werden müssen.

Der Schnitt der Symmetrieelemente einer Punktgruppe mit einer beliebigen Ebene heißt *Linearprojektion* oder *projektive Darstellung*. Die *gnomonische Projektion* (Projektion der sphärischen Darstellung eines Polyeders und dessen Symmetriegerüstes auf eine Tangentialebene der Sphäre) ist ein Spezialfall einer solchen Linearprojektion. Bei Linearprojektionen eines Symmetriegerüstes einer Punktgruppe fällt das Inversionszentrum heraus. Für alle projektiven Darstellungen von Symmetriegerüsten gilt, daß die Anzahl der Geraden (Schnittgeraden von Symmetrieebenen), die sich in einem Punkt treffen, gleich der Zähligkeit der Drehachse durch diesen Punkt ist.

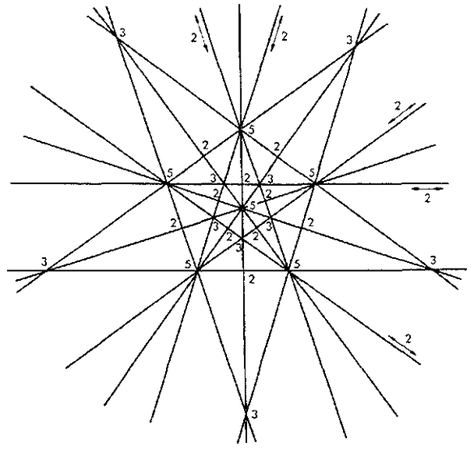
Figur 6.19, **Figur 6.20** und **Figur 6.21** zeigen gnomonische Projektionen des Symmetriegerüstes der Ikosaedergruppe senkrecht zu den drei Symmetrierichtungstypen. Die Zahlen in den Schnittpunkten geben die Zähligkeit der jeweiligen Symmetrieachsen an; sie entspricht genau der Anzahl der durch diese Punkte hindurchgehenden Geraden (Schnittgeraden von Symmetrieebenen). Ein Doppelpfeil ↔ weist auf einen Fernpunkt in Richtung der Pfeile.



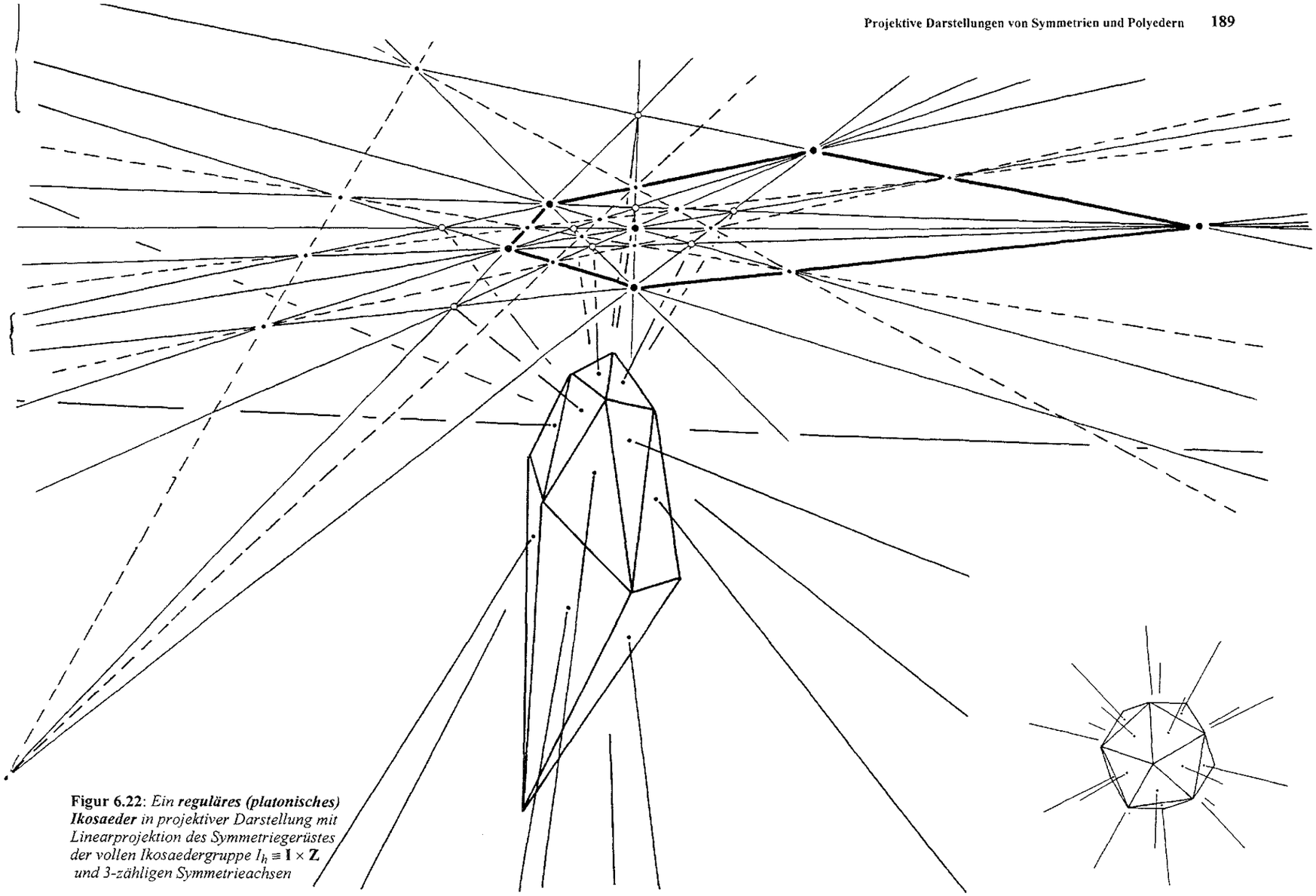
Figur 6.19: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ senkrecht zu einer 2-Achse*



Figur 6.20: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ senkrecht zu einer 3-Achse*



Figur 6.21: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ senkrecht zu einer 5-Achse*



Figur 6.22: *Ein **reguläres (platonisches) Ikosaeder** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$ und 3-zähligen Symmetrieachsen*

Die Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Ikosaedergruppe in die Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes hat dieselbe Inzidenzstruktur von Punkten und Geraden wie die Konfigurationen der **Figuren 6.19, 6.20** und **6.21**. Wird sie durch eine projektive Transformation des Raumes, welche nur den invarianten Punkt des Symmetriegerüstes festhält, in den «sichtbaren» Bereich hereingeholt, so ergibt sich etwa **Figur 6.23**. In **Figur 6.24** ist eine weitere solche Konfiguration in allgemeiner Lage dargestellt, ergänzt durch 6 (gestrichelte) Geraden, die je 5 Punkte der Konfiguration verbinden. Letztere Konfiguration liegt den entsprechenden Transformationen von Flächenformen der Ikosaedergruppe in den **Figuren 6.22** und **6.25** bis **6.28** zugrunde.

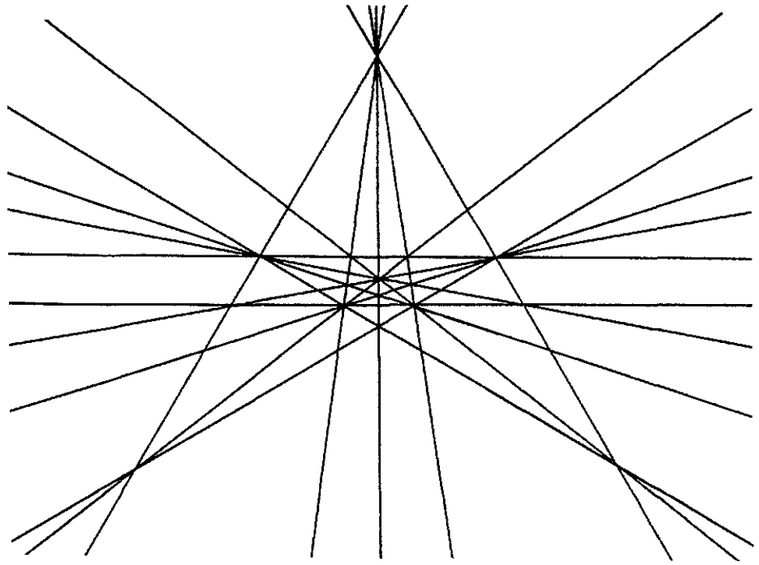
Projektive Darstellungen von Flächenformen der Ikosaedergruppe

Für die projektive Darstellung des platonischen Ikosaeders, Pentagondodekaeders und des (nicht archimedischen) Rhombenikosidodekaeders wurde die Lage der funktionellen Fernebene (Trägerebene der Linearprojektion des Symmetriegerüstes) so eingerichtet, daß man von «oben» durch diese Ebene auf die «darunter» liegenden Polyeder sieht. Die Ebene verläuft dabei von oben hinten nach unten vorne. (Man beachte die anders gewählte Lage der funktionellen Fernebene bezüglich der projektiven Darstellung der Polyeder des kubischen Systems.)

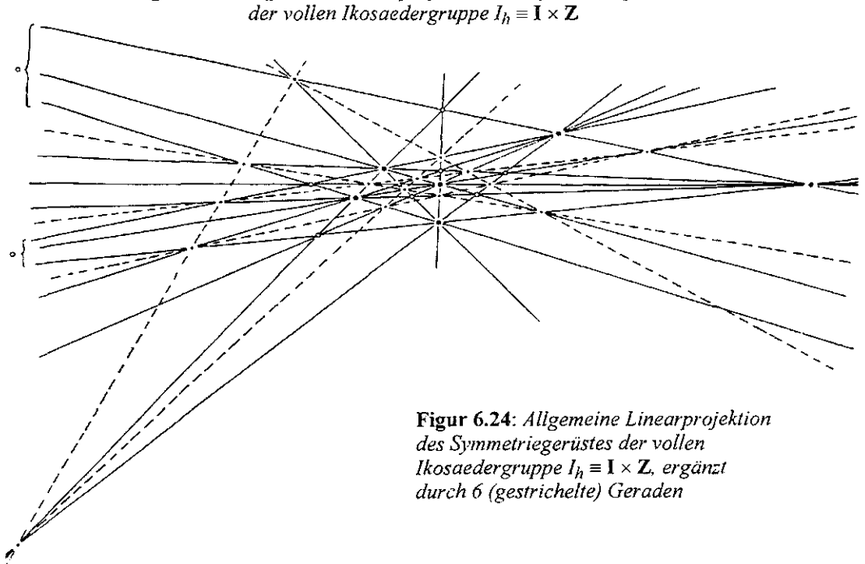
Die 6 Raumdiagonalen (5-zählige Symmetrieachsen) des regulären (platonischen) *Ikosaeders* in **Figur 6.22** gehen durch die 5 Ecken und den Mittelpunkt des hervorgehobenen 5-Ecks. Die 30 Kanten gehen paarweise durch die 15 Punkte, welche auch Durchstoßpunkte von 2-zähligen Symmetrieachsen sind (**Figur 6.39**). Die 10 Flächennormalen (3-zählige Symmetrieachsen) gehen durch die 10 als kleine offene Kreise gekennzeichneten Punkte. Die 20 Flächen gehen paarweise durch die 10 Geraden (nicht gezeichnet), welche genau drei 2-zählige Punkte der Konfiguration enthalten.

Die 10 Raumdiagonalen (3-zählige Symmetrieachsen) des regulären (platonischen) *Pentagondodekaeders* in **Figur 6.25** gehen durch die 10 als offene Kreise gekennzeichneten Punkte. Die 6 Flächennormalen (5-zählige Symmetrieachsen) gehen durch die 5 Ecken und den Mittelpunkt des hervorgehobenen Fünfecks. Die 12 Flächen gehen paarweise durch die 6 gestrichelten Linien, auf welchen je 5 Punkte der Konfiguration liegen.

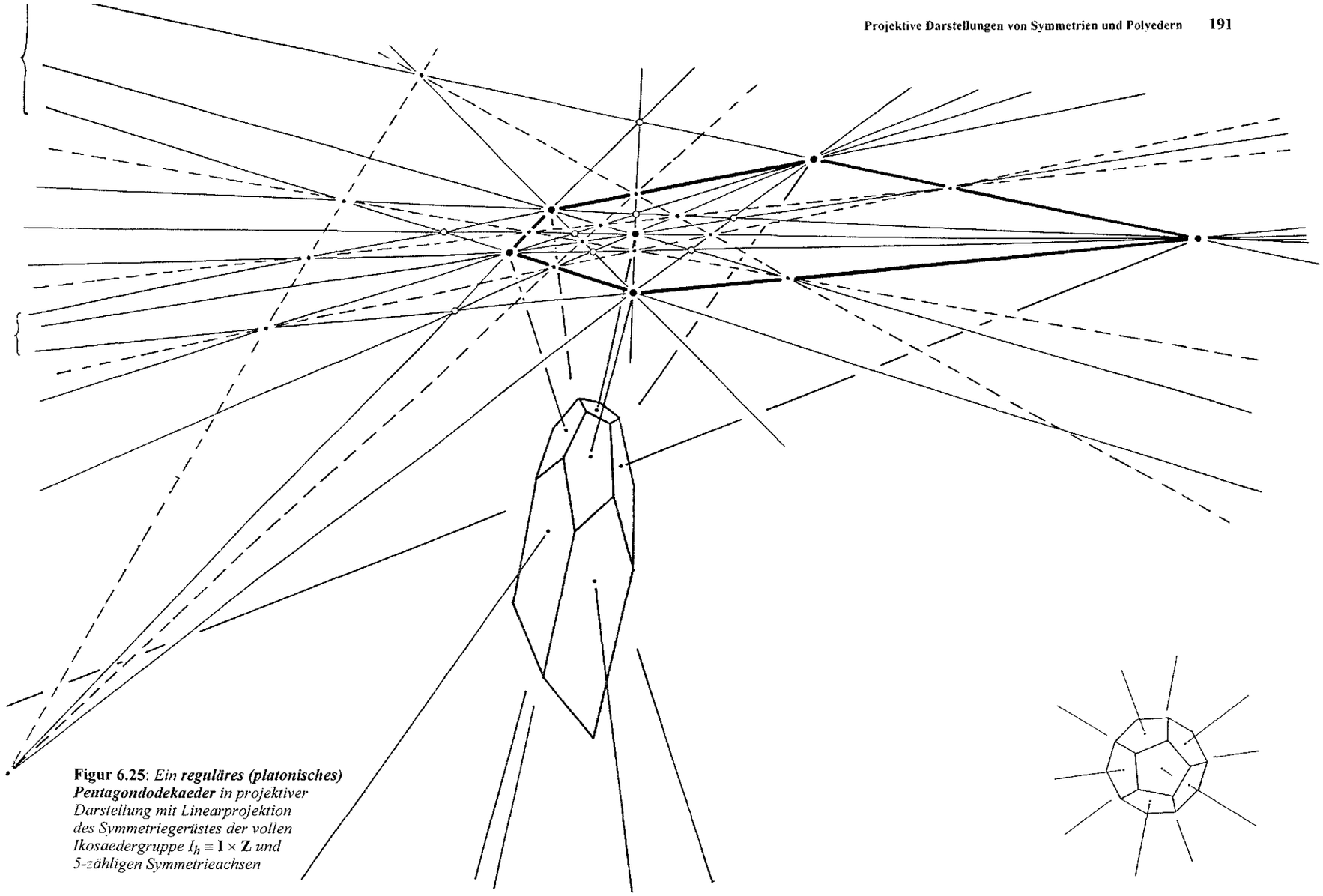
Figur 6.26 zeigt für das *reguläre Pentagondodekaeder* den Verlauf der 30 Kanten durch die 15 fein gezeichneten Punkte, welche Durchstoßpunkte der 2-zähligen Symmetrieachsen sind. Die 30 Kantengeraden schneiden sich zusätzlich zu je fünfen in 12 Punkten außerhalb der Konfiguration (Dodekaederstern; Figur 5.51). – Beim Ikosaeder (**Figur 6.39**) laufen die 30 Kantengeraden paarweise durch dieselben 15 Punkte und schneiden sich zu dritt zusätzlich in 20 Punkten (Ikosaederstern; Figur 5.51).



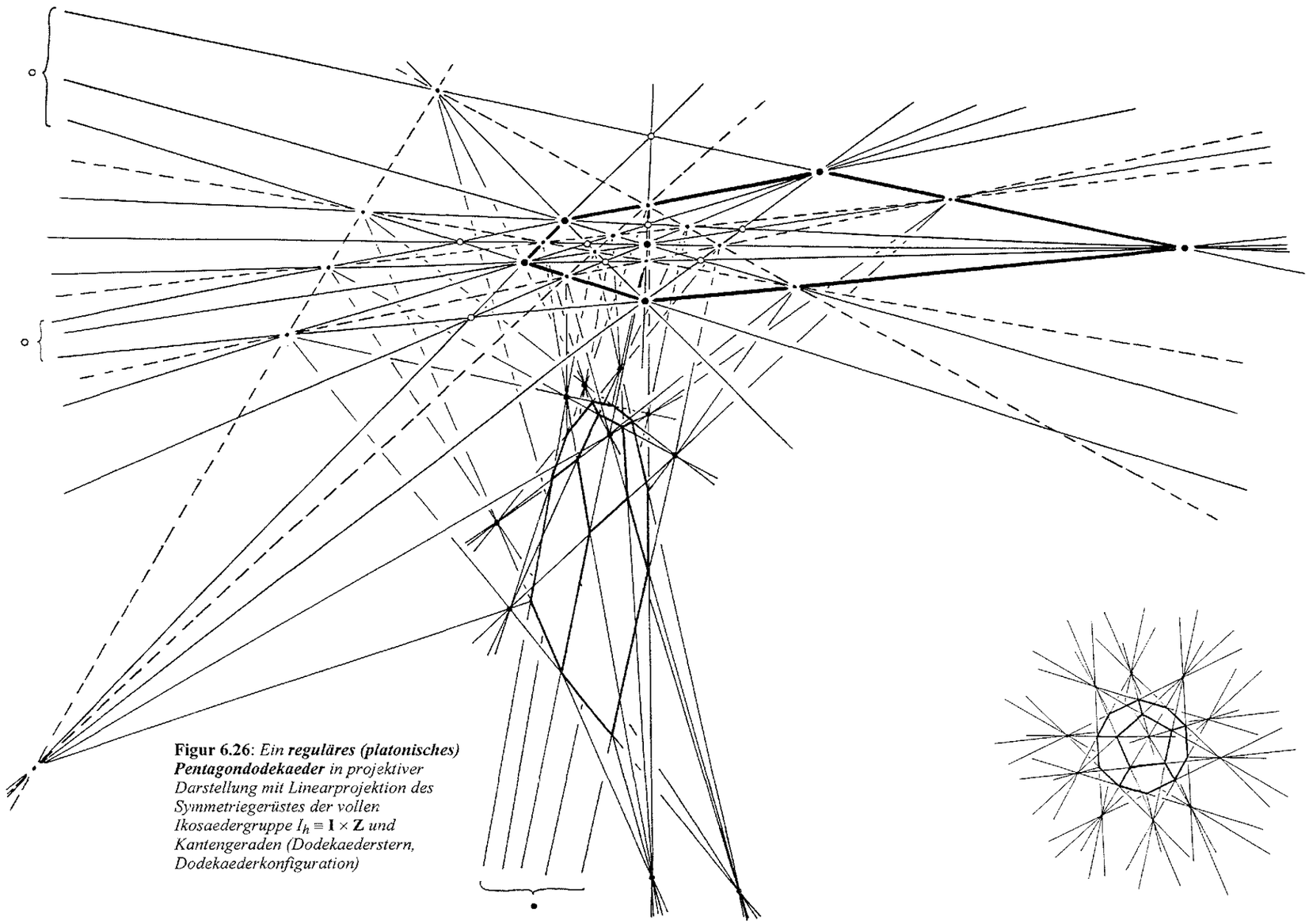
Figur 6.23: *Allgemeine Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe* $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$



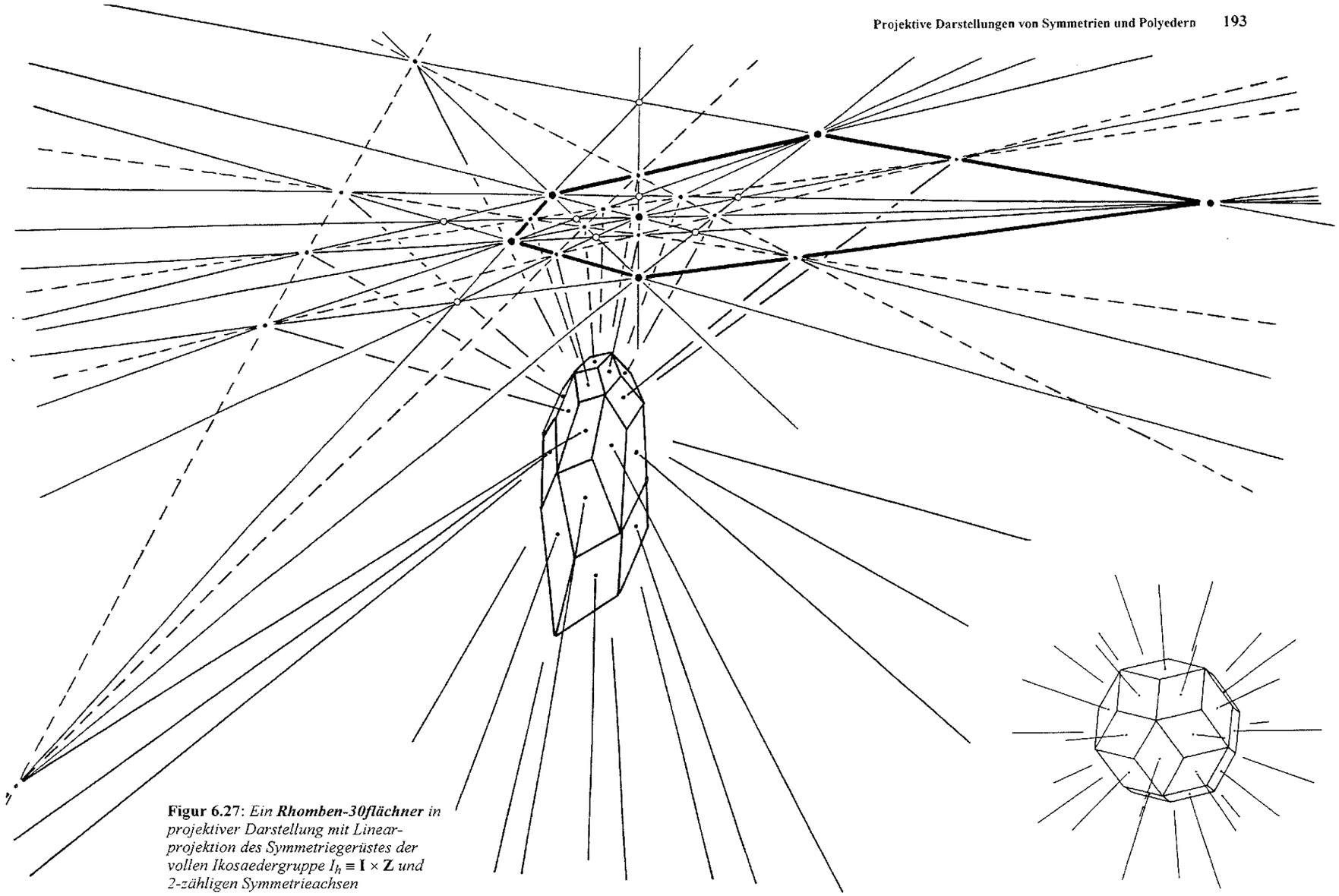
Figur 6.24: *Allgemeine Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe* $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$, *ergänzt durch 6 (gestrichelte) Geraden*



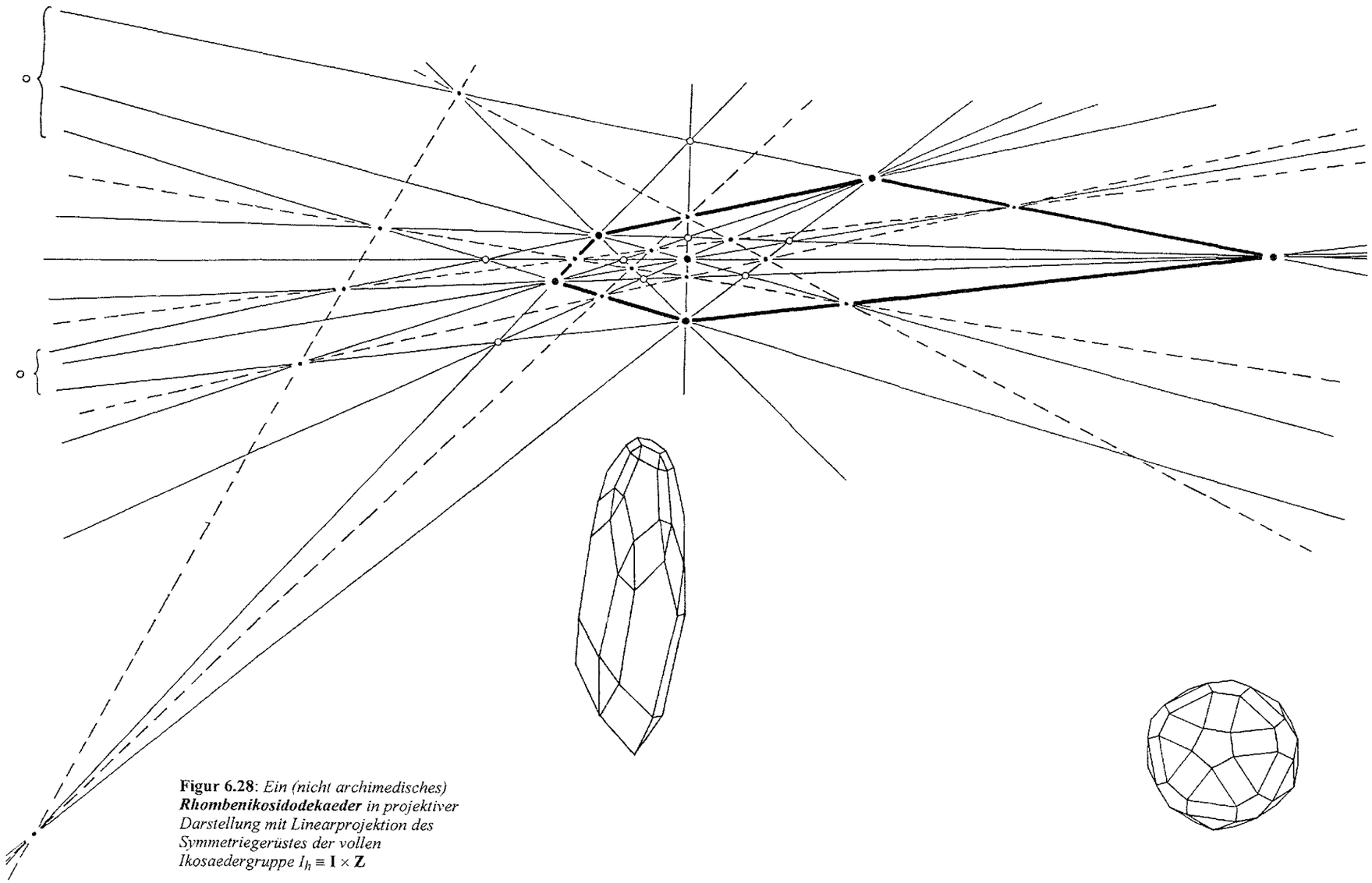
Figur 6.25: *Ein **reguläres (platonisches) Pentagondodekaeder** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ und 5-zähligen Symmetrieachsen*



Figur 6.26: *Ein **reguläres (platonisches) Pentagondodekaeder** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$ und Kantengeraden (Dodekaederstern, Dodekaederkonfiguration)*



Figur 6.27: *Ein **Rhomben-30flächner** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ und 2-zähligen Symmetrieachsen*



Figur 6.28: *Ein (nicht archimedisches)* ***Rhombenikosidodekaeder*** *in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe* $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$

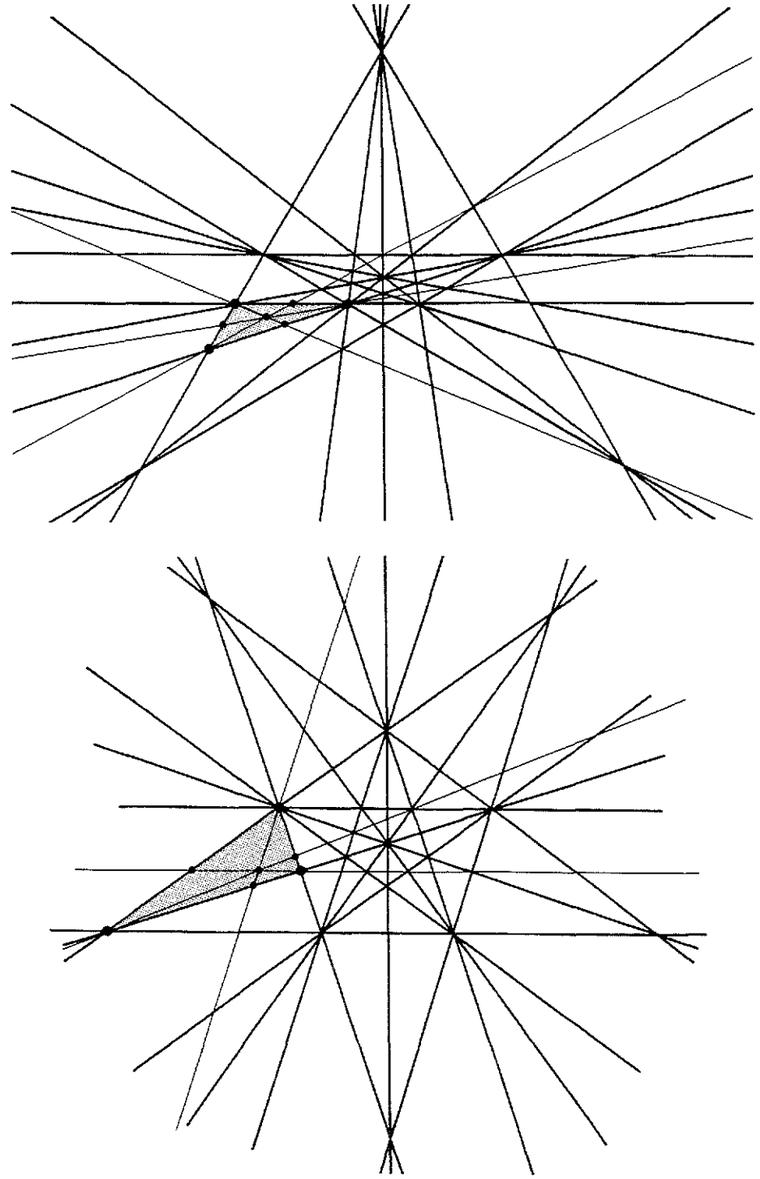
Figur 6.27 zeigt einen *Rhomben-30flächner* oder ein *Rhombentriakontaeder*. Die 6 die 5-er Ecken verbindenden Raumdiagonalen (5-zählige Symmetrieachsen) gehen durch die 6 Punkte des hervorgehobenen Fünfecks mit Mittelpunkt, die 10 die 3-er Ecken verbindenden Raumdiagonalen (3-zählige Symmetrieachsen) durch die 10 als offene Kreise gekennzeichneten Punkte und die 15 Flächennormalen (2-zählige Symmetrieachsen) durch die 15 fein gezeichneten Punkte. Die 60 Kanten gehen zu je 10 durch die 6 Durchstoßpunkte der 5-zähligen Symmetrieachsen. Die 30 Flächen gehen paarweise durch die 15 Verbindungsgeraden derselben 6 Punkte.

In **Figur 6.28** findet sich die projektive Darstellung eines (nicht archimedischen) *Rhombenikosidodekaeders*, eine Kombinationsform aus Ikosaeder, Pentagondodekaeder und Rhomben-30flächner. Die 31 Flächennormalen gehen demzufolge durch alle 6 + 10 + 15 = 31 Punkte der Konfiguration. Die 62 Flächen schneiden sich paarweise in den 6 + 10 + 15 Geraden, in denen sich die Flächen der drei beteiligten Polyeder schneiden (siehe oben). Die 120 Kanten schneiden sich zu je acht in den 15 Durchstoßpunkten der 15 2-zähligen Symmetrieachsen.

Linearprojektionen von Flächen- und Punktlagen

Für die projektive Darstellung von Flächen- und Punktformen, insbesondere von Polyedern des Ikosaedersystems in Linearprojektion, gilt wieder, daß jedem Punkt in einem Fundamentaldreieck eine Flächenlage (Durchstoßpunkt [Pol] der Flächennormalen einer Fläche des symmetrischen Polyeders mit der Projektionsebene) und eine Punktlage (Durchstoßpunkt der Verbindungsgeraden einer Ecke des symmetrischen Polyeders mit dem invarianten Punkt) entspricht. Für nichtkristallographische Flächen- und Punktformen können diese Lagen an sich beliebig gewählt werden. Dies gilt natürlich nur für die Wahl der Lagen in *einem* Fundamentaldreieck, da damit die Lagen in allen übrigen Fundamentaldreiecken vermöge der Operationen der Ikosaedergruppen festgelegt sind.

Figur 6.29 zeigt eine möglichst einfache Konstruktion aller Typen von Flächen- und Punktlagen für *ein* Fundamentaldreieck der Ikosaedergruppe in gnomonischer Projektion senkrecht zu einer 5-Achse. Eine entsprechend durchgeführte Konstruktion für alle Fundamentaldreiecke dieser Projektion ergibt eine Konfiguration, wie sie in **Figur 6.30** abgebildet ist.



Figur 6.29: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ mit Flächenlagen aller Typen in einem Fundamentaldreieck (allgemein und senkrecht zu einer 5-Achse)*

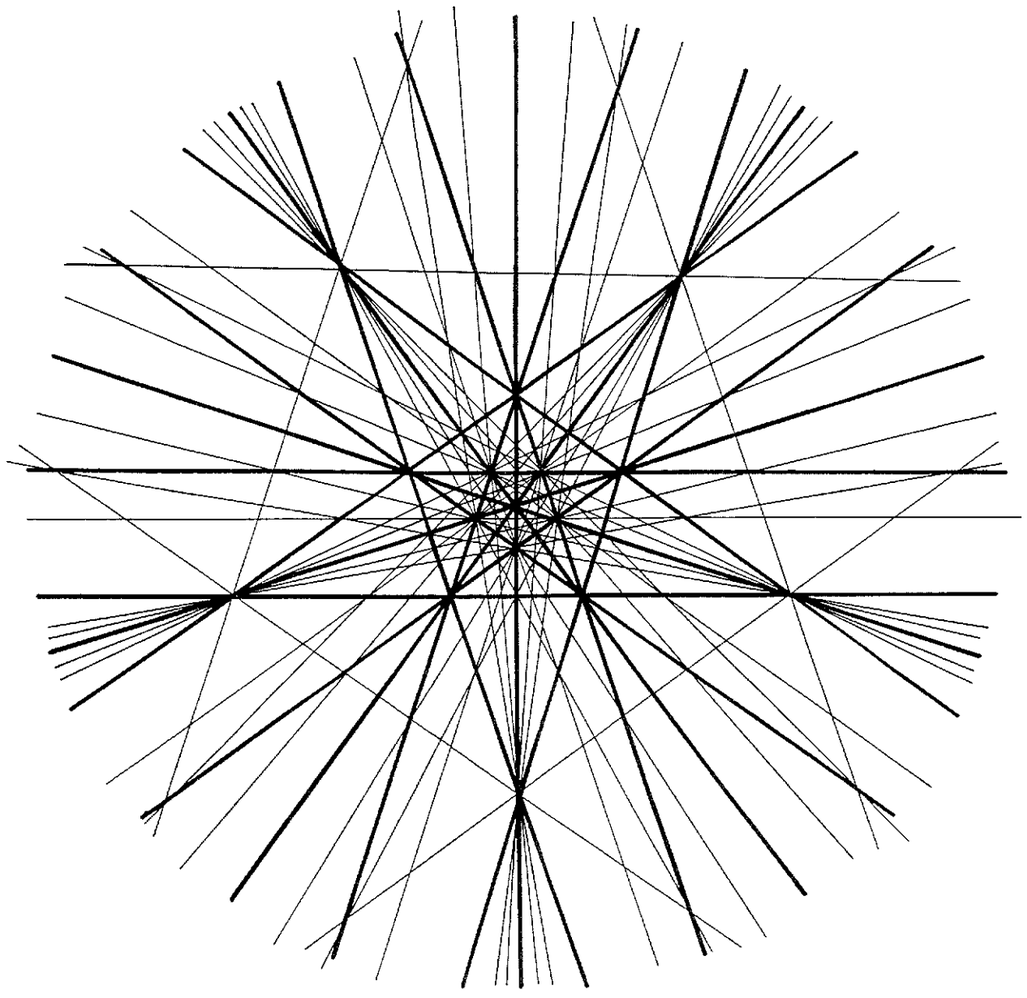
Es gibt viele verschiedene Wege, um weitere Punkte aus den gegebenen Punkten und Geraden der Linearprojektion des Symmetriegerüstes rational zu konstruieren.

Punkte des Lagetyps IV (Lagen zwischen 3- und 5-zähligen Punkten) erhält man unmittelbar, wenn man diejenigen 5 Geraden konstruiert, welche je fünf 2-zählige Punkte verbinden: **Figur 6.31**.

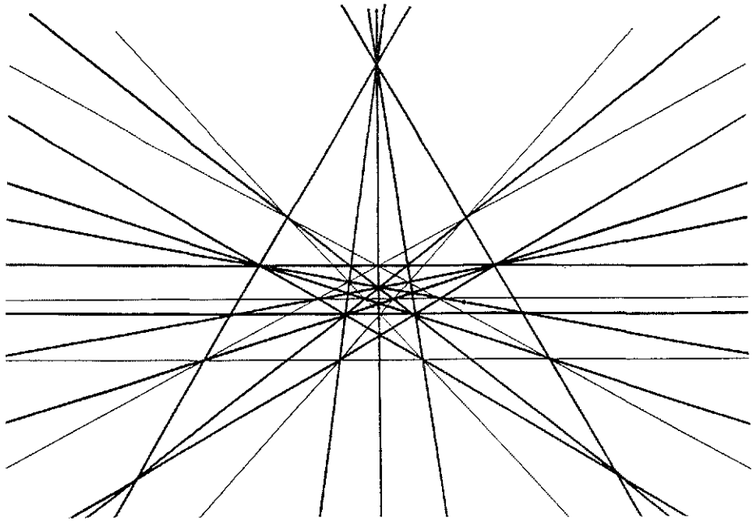
In **Figur 6.30** beruht die Konstruktion auf Geraden, welche nur 2-zählige, nur 3-zählige sowie 2- und 3-zählige Punkte verbinden.

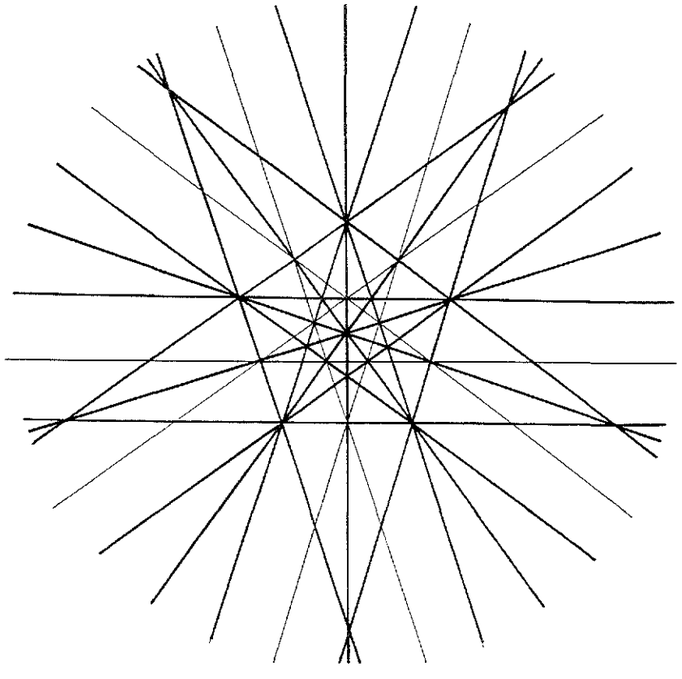
Man erkennt, daß durch die Konstruktionen der Figur 6.30 in jedem Fundamentaldreieck für alle Lagetypen außer dem Typ V mindestens ein Repräsentant, das heißt ein Punkt bestimmt ist. Greift man zum Beispiel alle Schnittpunkte des Lagetyps IV heraus, so erhält man die Darstellung der Flächenlagen eines Deltoid-60flächners in Linearprojektion, etc. Der Lagetyp III (fünfzehn 2-zählige Punkte) entspricht dem Rhomben-30flächner, der Lagetyp II (zehn 3-zählige Punkte) dem Ikosaeder und der Lagetyp I (sechs 5-zählige Punkte) dem Pentagondodekaeder.

Punkte vom Lagetyp V erhält man durch Verbinden von 5- und 2-zähligen Punkten.



Figur 6.30: *Eine Konstruktion von Flächen- oder Punktlagen aller Typen für alle Fundamentaldreiecke in einer Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe* $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ *(senkrecht zu einer 5-Achse)*



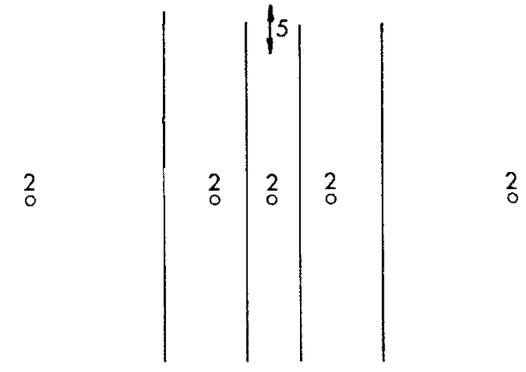


Projektive Darstellungen der Diedersymmetrien

Die projektive Darstellung der Symmetriegerüste der Holoedrien sowie der Flächen- bzw. Punktlagen der allgemeinen (insbesondere nichtkristallographischen) *Diedersysteme* bietet keine besonderen Schwierigkeiten, außer der Tatsache, daß sie nicht rational konstruierbar sind. Stellvertretend für alle übrigen Systeme wird kurz das *pentagonale* und das *dekagonale System* behandelt. Diese verhalten sich analog wie das trigonale und das hexagonale Kristallsystem (Abschnitt 5.5).

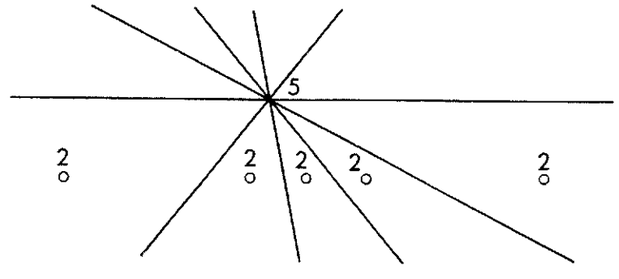
Die Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$ des *pentagonalen Systems* (Figur 4.7) hat eine analoge Struktur wie die entsprechende Projektion des trigonalen Systems (Figur 4.16 und 5.22b). Die gnomonische Projektion senkrecht zu einer 2-zähligen Symmetrieachse zeigt **Figur 6.32** und eine allgemeine Linearprojektion **Figur 6.33**. Eine Konstruktion von Flächen- bzw. Punktlagen aller Typen innerhalb einer Projektion senkrecht zu einer 5-zähligen Symmetrieachse zeigt **Figur 6.34**.

Die Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{10h} \equiv \mathbf{D}_{10} \times \mathbf{Z}$ des *dekagonalen* oder *10-gonalen Systems* hat eine analoge Struktur wie die entsprechende Projektion des hexagonalen Systems (Figur 4.16 und 5.22a). Die gnomonische Projektion senkrecht zu einer 2-zähligen Symmetrieachse zeigt **Figur 6.35** und eine allgemeine Linearprojektion **Figur 6.36**.

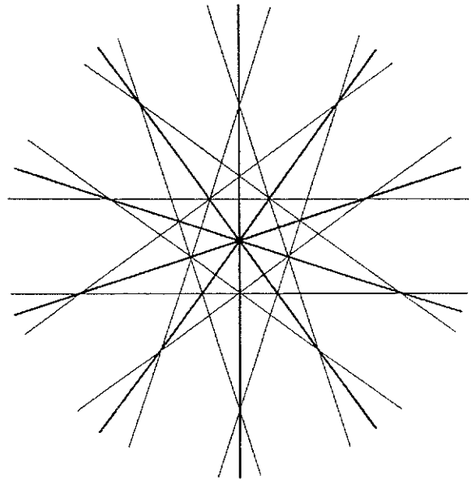


Figur 6.32: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$ des pentagonalen Systems senkrecht zu einer 2-Achse*

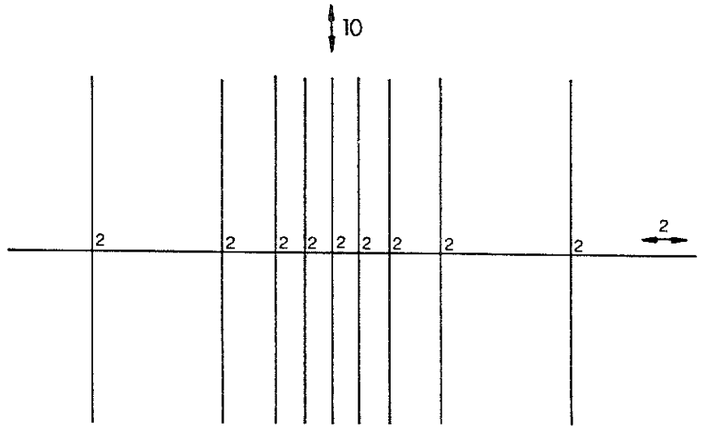
Figur 6.31: *Flächen- und Punktlagen des Typs IV für alle Fundamentaldreiecke in einer Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{I} \times \mathbf{Z}$ (allgemein und senkrecht zu einer 5-Achse)*



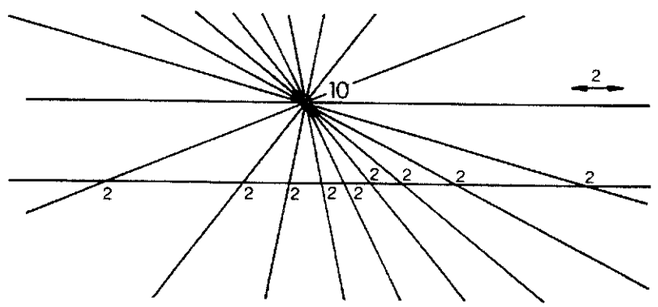
Figur 6.33: *Allgemeine Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$ des pentagonalen Systems*



Figur 6.34: *Eine Konstruktion von Flächen- oder Punktlagen aller Typen für alle Fundamentaldreiecke in einer Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{5d} \equiv \mathbf{D}_5 \times \mathbf{Z}$ des pentagonalen Systems senkrecht zu einer 5-Achse*



Figur 6.35: *Gnomonische Projektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{10h} \equiv \mathbf{D}_{10} \times \mathbf{Z}$ des dekagonalen Systems senkrecht zu einer 2-Achse*



Figur 6.36: *Allgemeine Linearprojektion des Symmetriegerüstes der Holoedrie $D_{10h} \equiv \mathbf{D}_{10} \times \mathbf{Z}$ des dekagonalen Systems*

6.6 *Projektive Konfigurationen*

Im Laufe der Untersuchung projektiver Darstellungen von Symmetrien und Polyedern sind einige Konfigurationen aufgetaucht, auf deren Eigenart hier kurz eingegangen werden soll. Projektive Konfigurationen sind endliche Mengen von Punkten, Geraden und Ebenen, die allein durch bestimmte Inzidenzbeziehungen charakterisiert sind. Da alle projektiven Transformationen inzidenzerhaltend sind, bleiben die wesentlichen Eigenschaften von Konfigurationen bei «projektiven Verzerrungen» erhalten.

Ebene und bündelige projektive Konfigurationen

Eine *ebene*, oder *bündelige*, *projektive Konfiguration* ist eine endliche Menge von n Punkten bzw. Ebenen und g Geraden in der projektiven Ebene bzw. im Bündel, so daß durch jeden Punkt i Geraden gehen bzw. in jeder Ebene i Geraden liegen und auf jeder Geraden k Punkte liegen bzw. durch jede Gerade k Ebenen gehen, geschrieben

$$(n_i g_k).$$

Dabei gilt offenbar $ni = gk$.

Eine solche Konfiguration heißt *selbstdual* oder *selbstpolar*, wenn sie mit ihrer Dualkonfiguration $(n_k g_i)$ zusammenfällt; in diesem Falle ist $n = g$ und $i = k$ und man schreibt dafür

$$(n_i) \equiv (n_i n_i).$$

Die dem *Satz von Desargues* zugrunde liegende Figur ist eine *selbstduale* Konfiguration (10_3). Eine Konfiguration heißt *regulär*, wenn es eine Projektivität gibt, welche sie invariant läßt.

Beispiele von regulären ebenen und bündeligen projektiven Konfigurationen

Vier Punkte in allgemeiner Lage in einer Ebene oder vier Ebenen in allgemeiner Lage in einem Punkt, zusammen mit ihren sechs Verbindungsgeraden bzw. sechs Schnittgeraden, bilden eine reguläre projektive Konfiguration $(4_3 6_2)$. Diese Konfiguration wird auch (in Abweichung von der Terminologie im Abschnitt 2.2) *vollständiges Viereck* bzw. *vollständiges Vierflach* genannt.

Vier Geraden in allgemeiner Lage in einer Ebene oder vier Geraden in allgemeiner Lage in einem Bündel mit ihren sechs Schnittpunkten bzw. sechs Verbindungsebenen bilden eine dazu duale Konfiguration $(6_2 4_3)$; sie wird auch *vollständiges Vierseit* bzw. *vollständiges Vierkant* genannt.

Ein reguläres Fünfeck mit seinen 10 Verbindungsgeraden ergibt eine reguläre $(5_4 10_2)$-Konfiguration und ein reguläres Fünfseit mit seinen 10 Schnittpunkten ergibt eine reguläre $(10_2 5_4)$-Konfiguration. Entsprechend gibt es die dazugehörigen Konfigurationen im Bündel als Projektionen der ebenen Konfigurationen.

Allgemein ergibt sich aus jedem regulären n-Eck, $n \geq 3$, und allen dazu projektiv-äquivalenten Figuren eine reguläre projektive

$$(n_{n-1}[\tfrac{1}{2}n(n-1)]_2)\text{-Konfiguration,}$$

wenn man alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungsgeraden der n Punkte miteinbezieht. Ebenso ergibt sich aus jedem regulären n-Seit und allen dazu projektiv-äquivalenten Figuren eine reguläre projektive

$$([\tfrac{1}{2}n(n-1)]_2 n_{n-1})\text{-Konfiguration,}$$

wenn man alle $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte der n Geraden miteinbezieht.

Für $n = 3$ sind die entsprechenden Konfigurationen selbstdual.

Entsprechend gibt es die dazugehörigen Konfigurationen im Bündel als Projektionen der ebenen Konfigurationen.

Räumliche projektive Konfigurationen

Eine *räumliche projektive Konfiguration* ist eine endliche Menge von n Punkten, g Geraden und p Ebenen so, daß durch jeden Punkt i Geraden und j Ebenen gehen, durch jede Gerade k Ebenen gehen und l Punkte in ihr liegen sowie in jeder Ebene m Punkte und n Geraden liegen, geschrieben

$$(n_i^j g_k^l p_m^n).$$

Für *selbstduale* oder *selbstpolare* Konfigurationen gilt $n = p$, $i = n$, $j = m$ und $k = l$ und das Symbol reduziert sich auf

$$(n_i g_k) \equiv (n_i^j g_k^k n_j^i).$$

Eine Konfiguration heißt *regulär*, wenn es eine Projektivität gibt, welche sie invariant läßt.

Die Konfigurationen der platonischen Körper

Aus jedem regulären konvexen Polyeder ergibt sich eine reguläre räumliche Konfiguration:

Tetraederkonfiguration:	$(4_3 6_2)$	(selbstdual)
Hexaederkonfiguration:	$(8_3^3 12_2^2 6_4^4)$	
Oktaederkonfiguration:	$(6_4^4 12_2^2 8_3^3)$	
Dodekaederkonfiguration:	$(20_3^3 30_2^2 12_5^5)$	(Figur 6.26)
Ikosaederkonfiguration:	$(12_5^5 30_2^2 20_3^3)$	(Figur 6.39)

Die Reye-Konfiguration

Eine *Reye-Konfiguration* ergibt sich aus einer Vervollständigung einer Hexaederkonfiguration oder Oktaederkonfiguration, die auch *vollständiges Hexaeder* bzw. *vollständiges Oktaeder* genannt werden. In **TABELLE 6.2** sind die einzelnen Schritte dieser *Vervollständigung* angeführt. Sie führt in beiden Fällen zu einer *regulären und selbstdualen projektiven Reye-Konfiguration*:

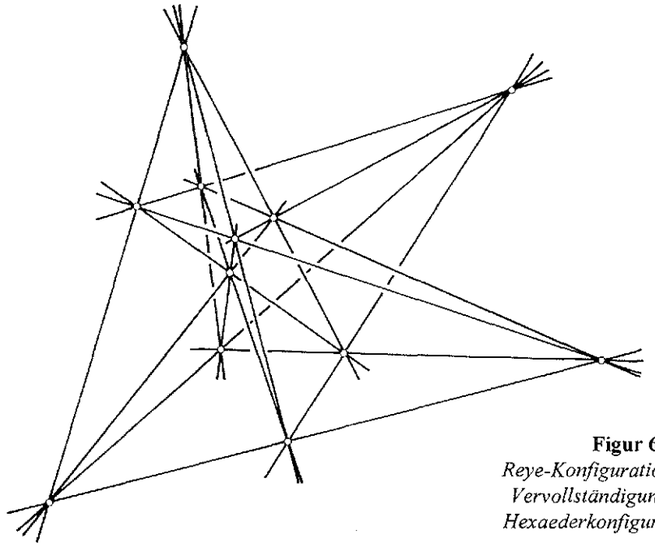
$$(12_4^6 16_3^3 12_6^4) \equiv (12_4 16_3)$$

Die «Mittelebene» eines regulären Oktaeders ist gleich der «Fernebene» des in den projektiven Raum eingebetteten euklidischen Raums; sie enthält alle Schnittpunkte paralleler Paare von Kanten sowie die Schnittgeraden paralleler Paare von Flächen.

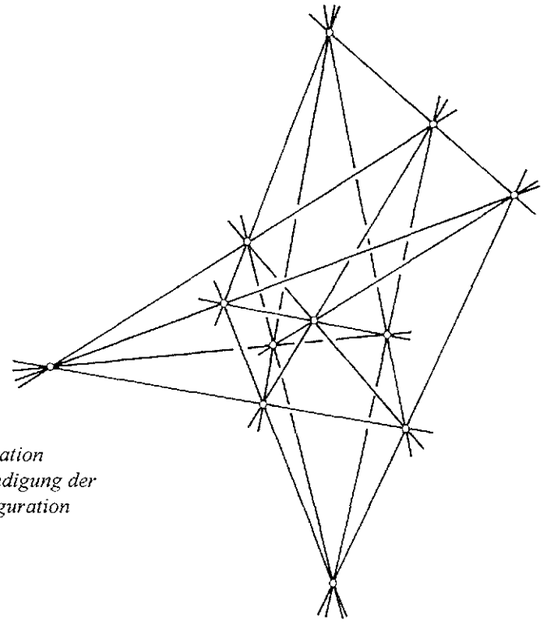
In der von der Hexaederkonfiguration ausgehenden Konstruktion der Reye-Konfiguration hat ein Punkt derselben die Funktion des Mittelpunktes des Hexaeders.

TABELLE 6.2: *Aufbau der Reye-Konfiguration*

Hexaederkonfiguration $(8_3^3 12_2^2 6_4^4)$:	*Oktaederkonfiguration* $(6_4^4 12_2^2 8_3^3)$:
8 Ecken, 12 Kanten, 6 Flächen.	8 Flächen, 12 Kanten, 6 Ecken.
Vervollständigung der Hexaederkonfiguration (**Figur 6.37a**):	*Vervollständigung der Oktaederkonfiguration* (**Figur 6.37b**):
6 Verbindungsebenen von sechs Paaren paralleler Kanten (Diagonalebenen); sie gehen durch den Mittelpunkt.	6 Schnittpunkte von sechs Paaren paralleler Kanten; sie liegen in der «Mittelebene» des Oktaeders.
3 Schnittpunkte von je vier parallelen Kanten (Kantenfluchtpunkte).	3 Verbindungsebenen von je vier Kanten (Diagonalebenen).
1 Mittelpunkt. Er enthält die sechs Verbindungsebenen paralleler Kanten und deren vier Schnittgeraden (Raumdiagonalen).	1 «Mittelebene». Sie enthält die sechs Schnittpunkte paralleler Kanten und deren vier Verbindungsgeraden.
4 Verbindungsgeraden der vier Paare gegenüberliegender Ecken (Raumdiagonalen). Sie gehen durch den Mittelpunkt.	4 Schnittgeraden der vier Paare paralleler Flächen. Sie liegen in der «Mittelebene».



Figur 6.37a: *Reye-Konfiguration als Vervollständigung der Hexaederkonfiguration*



Figur 6.37b: *Reye-Konfiguration als Vervollständigung der Oktaederkonfiguration*

Da alle Punkte einer Reye-Konfiguration von der gleichen Art sind, können in diese 12 Hexaederkonfigurationen eingebettet werden.

Dual dazu kann jede Ebene einer Reye-Konfiguration die Funktion der «Mittelebene» einer in diese eingebetteten Oktaederkonfiguration übernehmen, also gibt es ebenfalls 12 Oktaederkonfigurationen in einer Reye-Konfiguration.

Dabei überdecken die relativ zur «Mittelebene» inneren Punktbereiche dieser 12 Oktaeder genau einmal den projektiven Punktraum und die relativ zum Mittelpunkt inneren Ebenenbereiche dieser 12 Hexaeder gliedern den projektiven Ebenenraum in 12 disjunkte Bereiche.

Die Hess-Konfiguration

In entsprechender Weise, wie eine Reye-Konfiguration sich aus einer Vervollständigung einer Hexaeder- oder Oktaederkonfiguration ergibt, kann eine sogenannte *Hess-Konfiguration* aus einer Vervollständigung der Dodekaeder- oder Ikosaederkonfiguration, die auch *vollständige Dodekaederkonfiguration* bzw. *vollständige Ikosaederkonfiguration* genannt werden, gewonnen werden. In **TABELLE 6.3** sind die einzelnen Schritte dieser Vervollständigung angeführt. Sie führt in beiden Fällen zu einer *regulären und selbstdualen projektiven Hess-Konfiguration*

$$(60_6^{15}72_3^5 60_{15}^6) \equiv (60_6 72_5).$$

Neben dem Ausgangspolyeder gehören nur die Ecken, Flächen und Kanten der kursiv gesetzten Polyeder zur Hess-Konfiguration. Für die dort genannten Sternpolyeder siehe die Tabelle 5.24 und die Figur 5.51 im Abschnitt 5.8.

Die «Mittelebene» eines regulären Dodekaeders oder Ikosaeders ist gleich der «Fernebene» des in den projektiven Raum eingebetteten euklidischen Raums; sie enthält alle Schnittpunkte paralleler Paare von Kanten sowie Schnittgeraden paralleler Paare von Flächen (**Figur 6.38**). Für die entsprechende projektive Konfiguration kann diese Ebene, genauso wie der Mittelpunkt, eine beliebige Lage annehmen. In den projektiven Darstellungen der Dodekaederkonfiguration (**Figur 6.26**) und der Ikosaederkonfiguration (**Figur 6.39**) geht diese «Mittelebene», anschaulich gesprochen, von unten vorne nach hinten oben; man blickt auf sie drauf: die Konfigurationen sind dahinter nach unten gehend «drangehängt». Die projektive Hess-Konfiguration erhält man durch entsprechende Vervollständigung dieser beiden Konfigurationen gemäß Tabelle 6.3.

Gemäß dem Aufbau einer Hess-Konfiguration aus einer symmetrisch-regulären Dodekaeder- oder Ikosaederkonfiguration (Figur 6.38) enthält sie eine Dodekaederkonfiguration mit «Mittelebene», eine Ikosaederkonfiguration mit Mittelpunkt sowie alle *vier regulären Sternpolyeder*. Da jeder Punkt einer Hess-Konfiguration von derselben Art ist, können insgesamt 60 projektive Dodekaeder- sowie 60 projektive Ikosaederkonfigurationen in eine projektive Hess-Konfiguration eingebettet werden. Dementsprechend können die projektiven Varianten der vier regulären Sternpolyeder auf 60 Arten in einer Hess-Konfiguration gefunden werden.

TABELLE 6.3: *Aufbau der Hess-Konfiguration*

Dodekaederkonfiguration: $(20_3^3 30_2^2 12_5^5)$ 20 Ecken, 30 Kanten, 12 Flächen (Figur 6.26).	*Ikosaederkonfiguration*: $(12_5^5 30_2^2 20_3^3)$ 12 Ecken, 30 Kanten, 20 Flächen (Figur 6.39).
Vervollständigung der Dodekaeder-Konfiguration (**Figur 6.38**):	*Vervollständigung der Ikosaeder-Konfiguration* (**Figur 6.38**):
20 «Nebenflächen» des Dodekaeders; sie enthalten genau drei Dodekaederkanten. Sie hüllen ein innerhalb des Dodekaeders liegendes *Ikosaeder* ein sowie einen *großen Ikosaederstern*, der seine Ecken in einem außerhalb des Dodekaeders liegenden Ikosaeder hat.	20 «Nebenecken» des Ikosaeders; sie enthalten genau drei Ikosaederkanten. Sie bestimmen ein außerhalb des Ikosaeders liegendes *Dodekaeder* sowie einen *Ikosaederstern*, dessen Flächen ein innerhalb des Ikosaeders liegendes Dodekaeder einhüllen.
15 Verbindungsebenen paralleler Paare von Dodekaederkanten; sie gehen alle durch den Mittelpunkt des Dodekaeders.	15 Schnittpunkte paralleler Paare von Ikosaederkanten; sie liegen alle in der «Mittelebene» des Ikosaeders.
12 «Nebenflächen» des *Ikosaeders*; sie enthalten genau fünf Ikosaederkanten und bilden einen innerhalb des Dodekaeders liegenden *Ikosaederstern* und einen innerhalb dieses *Ikosaeders* liegenden *großen Dodekaederstern*.	12 «Nebenecken» des *Dodekaeders*; sie enthalten genau fünf Dodekaederkanten und bestimmen einen das Ikosaeder umschließenden *großen Ikosaederstern* und einen das Dodekaeder umschließenden *Dodekaederstern*.
1 «Mittelebene» des Dodekaeders. Sie enthält die Schnittpunkte der Paare paralleler Dodekaederkanten.	1 Mittelpunkt des Ikosaeders. Er enthält die Verbindungsebenen paralleler Paare von Ikosaederkanten.
12 «Nebenecken» des Dodekaeders: Ecken des *großen Ikosaedersterns* oder des *Dodekaedersterns*.	12 «Nebenflächen» des Ikosaeders: Flächen des *Ikosaedersterns* oder des *großen Dodekaedersterns*.
12 Ecken des *Ikosaeders* oder des *großen Dodekaedersterns*.	12 Flächen des *Dodekaeders* oder des *Dodekaedersterns*.
15 Schnittpunkte paralleler Paare von Dodekaederkanten in der «Mittelebene».	15 Verbindungsebenen paralleler Paare von Ikosaederkanten durch den Mittelpunkt.
1 Mittelpunkt des Dodekaeders. Er enthält die Verbindungsebenen der Paare paralleler Dodekaederkanten.	1 «Mittelebene» des Ikosaeders. Sie enthält die Schnittpunkte der Paare paralleler Ikosaederkanten.
30 Kanten des *Ikosaeders* oder des *großen Dodekaedersterns*.	30 Kanten des *Dodekaeders* oder des *Dodekaedersterns*.
6 Verbindungsgeraden der sechs Paare gegenüberliegender Ecken des *Ikosaeders* (Diagonalen) durch den Mittelpunkt.	6 Schnittgeraden der sechs Paare paralleler Flächen des *Dodekaeders* in der «Mittelebene».
6 Schnittgeraden der sechs Paare paralleler Dodekaederflächen in der «Mittelebene».	6 Verbindungsgeraden der sechs Paare gegenüberliegender Ecken des Ikosaeders durch den Mittelpunkt.

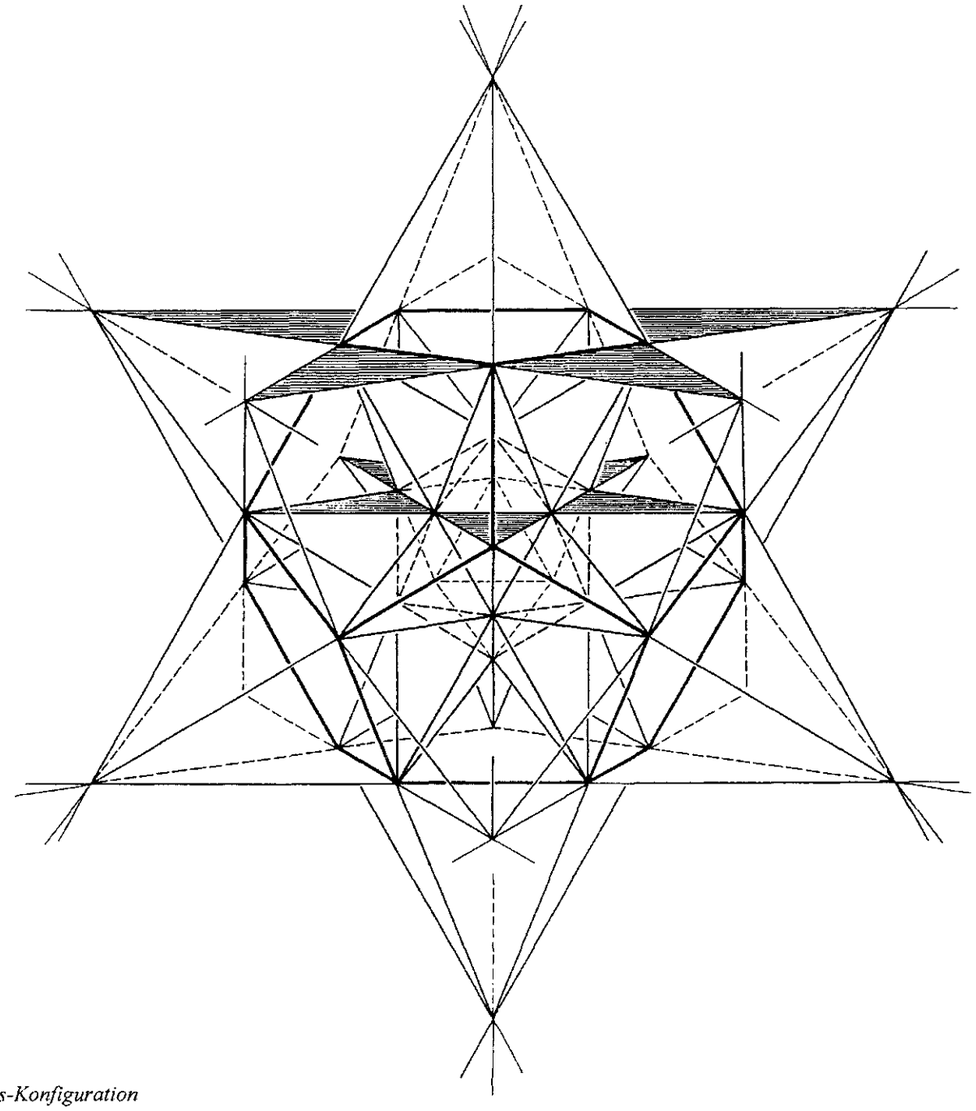
Literaturhinweise

Abschnitt 6.1 bis 6.6: Anknüpfend an die geometrische Kristallographie des 19. Jahrhunderts sowie angeregt durch einige Hinweise Rudolf Steiners, haben George Adams [1931], [1934] und Ernst A. K. Stockmeyer [1931] auf die Bedeutung der projektiven Geometrie für ein vertieftes Verständnis der Kristallbildung aufmerksam gemacht. Insbesondere entwickelt Adams in seinem Buch *Strahlende Weltgestaltung* [1934] ausführlich seine Einsicht, daß die traditionelle Auffassung der Kristalle als gitterförmig angeordnete Atom-, Ionen- oder Molekül-Aggregate ergänzt werden muß durch eine aus der Fernebene des Raumes entspringende Formgestaltung. An diese Ausführungen knüpfen die vorliegenden Untersuchungen unter anderem an und bringen sie, vom geometrischen Gesichtspunkt aus gesehen, zu einem gewissen Abschluß. Siehe dazu auch Kötter [1979] sowie die weitergehenden Ausführungen im Kapitel 7.

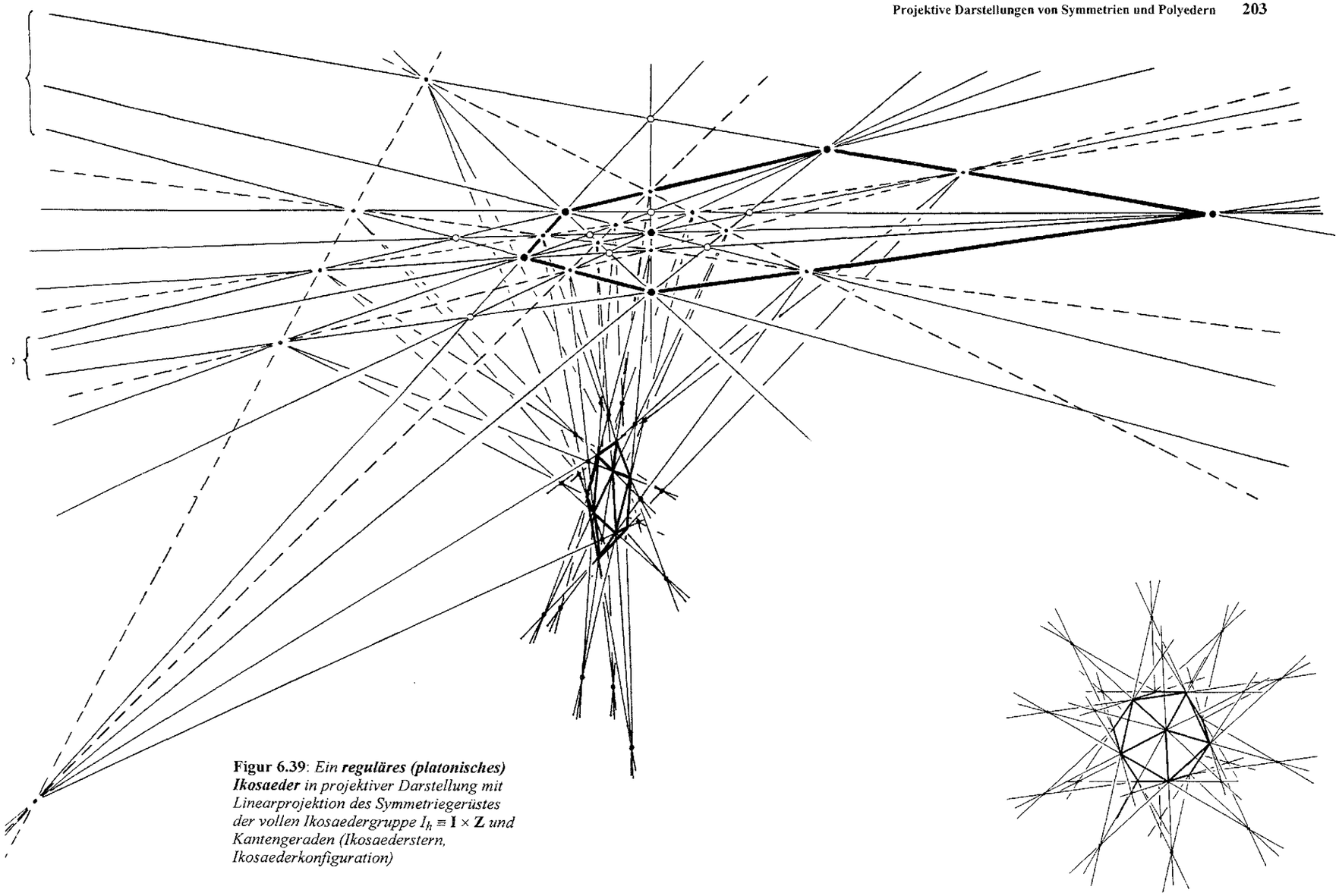
Für eine Klassifizierung der Kristallsysteme aus der Verwandlung der Grundformen des Tetraeders, welche aus Geologie und Plattentektonik entwickelt wurde, siehe Schmutz [1986].

Abschnitt 6.7: Rosenfeld [1997], § 2.7; Steinitz [1910].

Für die *Reye-Konfiguration* siehe insbesondere Bernhard [1986], [1996], Locher [1957], und für die *Hess-Konfiguration* Hess [1887, §11], Locher [1953], Steinitz [1902].



Figur 6.38:
Symmetrische Hess-Konfiguration



Figur 6.39: *Ein **reguläres (platonisches) Ikosaeder** in projektiver Darstellung mit Linearprojektion des Symmetriegerüstes der vollen Ikosaedergruppe $I_h \equiv \mathbf{1} \times \mathbf{Z}$ und Kantengeraden (Ikosaederstern, Ikosaederkonfiguration)*

7. ERGEBNIS UND KONSEQUENZEN FÜR DIE KRISTALLOGRAPHIE: ZUM KOMPLEMENTÄREN VERHÄLTNIS VON MORPHOLOGIE UND STRUKTURTHEORIE

In diesem Kapitel werden die morphologischen Betrachtungen zu den Kristallformen mit den geometrischen Prinzipien der Kristallstrukturtheorie vereinigt. Dies geschieht in erster Linie auf geometrischer Grundlage.

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist, zu zeigen, daß die Prinzipien der Kristallstrukturtheorie und diejenigen der allgemeinen Kristallmorphologie in einem *komplementären* Verhältnis stehen. Dies bedeutetet, daß aufgrund der konkreten Inhalte der entsprechenden Prinzipien das eine Gebiet nicht auf das andere «reduziert» oder «zurückgeführt» werden kann und beide für eine sachgemäße Kristallwissenschaft zu einer Synthese vereinigt werden müssen.

Das Kapitel beginnt mit einer Zusammenfassung der Kristallmorphologie, geht dann über zu einer Skizze der Gittergeometrie vom projektiven, affinen und metrischen Gesichtspunkt (Abschnitte 7.2 und 7.3). Auf dieser Grundlage können anschließend die Grundprinzipien der Strukturtheorie eingeführt (Abschnitt 7.4) sowie insbesondere das Verhältnis von Morphologie und Strukturtheorie genauer analysiert werden (Abschnitt 7.5). Der abschließende Schritt besteht in einer Synthese beider grundlegenden Gesichtspunkte der Kristallographie zu einem umfassenden Kristallformungsprinzip (Abschnitt 7.6) sowie zu einem Kristallgenetischen Prinzip (Abschnitt 7.7). Den Abschluß bildet ein Ausblick in die Morphologie und Strukturtheorie der Quasikristalle (Abschnitt 7.8).

7.1 *Geometrische Kristallmorphologie: Eine Zusammenfassung*

Geometrische Kristallmorphologie

Unter geometrischer Kristallmorphologie wird die vergleichende Betrachtung von Kristallformen untereinander hinsichtlich ihrer Symmetrien sowie ihrer Beziehungen zu symmetrischen Raumkörpern im allgemeinen verstanden (Kapitel 1). Es handelt sich dabei um die Herausarbeitung der Gesetze der *allgemeinen Kristallmorphologie*, das heißt der für alle Kristallpolyeder jedes Kristallsystems konstitutiven Gesetze, im Gegensatz zur hier nicht in Betracht gezogenen speziellen Morphologie, in der es um die konkreten Erscheinungs- und Formbedingungen konkreter Kristalle geht.

Die die Symmetrie betreffenden Eigenschaften von Kristallpolyedern zeigen sich, wenn man alle an einem konkreten Kristall vorhandenen Flächen parallel zu sich selbst verschiebt, bis sie tangential an einer beliebigen im Innern des Kristalls befindlichen Sphäre sind. Dies ist die *Tangentialdarstellung* eines Kristallpolyeders, auch *Tangentialpolyeder* oder *Idealgestalt* genannt. Es zeigt sich (Abschnitt 5.3), daß die so entstehenden Flächenformen oder Polyeder im allgemeinen Kombinationen von sogenannten *einfachen Flächenformen* sind. Letztere sind symmetrische Flächenformen und bestehen insbesondere nur aus solchen Flächen, welche bezüglich einer zusammengehörigen Menge von Symmetrieoperationen (Symmetriegruppe) zueinander äquivalent sind, das heißt durch solche Deckoperationen ineinander überführbar sind.

Im Bereich der einfachen kristallographischen Flächenformen kommen nur ausgewählte Symmetrieoperationen vor, insbesondere nur Drehungen mit den Winkeln 180°, 120°, 90° und 30° (sogenannte *kristallographische Einschränkung*) sowie nur Flächenlagen, deren Indizes (reziproke Koordinatenachsenabschnitte) im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen. Aus den Untersuchungen des Kapitels 5 ergibt sich zusammenfassend das Kristallformengesetz.

KRISTALLFORMENGESETZ: *Es gibt 47 verschiedene einfache Kristallformen. Jede geschlossene Flächenform ohne einspringende Ecken, das heißt jedes konvexe Polyeder, das aus einem durch Kombination einfacher kristallographischer Flächenformen gebildeten Polyeder durch Parallelverschiebung einer oder mehrerer Flächen («Verzerrung») hervorgeht, ist ein mögliches Kristallpolyeder.*

In das Kristallformengesetz werden mit Absicht alle durch «Verzerrung» entstehenden Flächenformen integriert und nicht nur die Tangentialpolyeder oder Idealgestalten, da dies der Kristallwirklichkeit näher kommt.

TABELLE 7.1: KRISTALLOGRAPHISCHE GESETZE

KRISTALLOGRAPHISCHES GRUNDGESETZ

Gesetz der kleinen ganzzahligen Flächenindizes

Die Indizes aller Flächenlagen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines Kristallsystems haben kleine ganzzahlige Werte, wenn sie auf vier ein Tetraeder bildende Flächen eines der Kristallpolyeder dieses Kristallsystems bezogen werden.

↕

Zonenverbandsgesetz

Die Flächenlagen der Kristallpolyeder eines Kristallsystems lassen sich in wenigen Schritten aus beliebigen vier ein Tetraeder bildenden Flächen eines Kristallpolyeders dieses Kristallsystems ableiten: Jedes Paar von Schnittgeraden (Zonen) bereits vorhandener Flächen bestimmt eine neue Flächenlage; wird eine dieser Flächen mit den bereits vorhandenen Flächen geschnitten, so erhält man neue Zonen.

↕

Projektives Zonenverbandsgesetz

Die Flächenlagen der Kristallpolyeder eines Kristallsystems lassen sich in wenigen Schritten aus beliebigen vier Flächen eines Kristallpolyeders dieses Kristallsystems, deren Ferngeraden ein Vierseit bilden, ableiten: Jeder Schnittpunkt der Ferngeraden bestimmt eine mögliche Zonenachse und jede Verbindungsgerade solcher Punkte eine mögliche Flächenlage.

KRISTALLSYMMETRIEGESETZE

Kristallsymmetriegesetz

Tangentialpolyeder von Kristallpolyedern sind symmetrisch bezüglich Operationen, die das Zentrum des Tangentialpolyeders invariant lassen.

↓

Kristallographische Einschränkung

Die Drehanteile der Symmetrieoperationen von Tangentialpolyedern von Kristallpolyedern können nur die Perioden 2, 3, 4, 6 haben.

↓

Gesetz der sieben Kristallachsensysteme

Die geometrische Anordnung der Symmetrieachsen- oder Zonenachsenrichtungen von Kristallpolyedern lassen sich in sieben Systeme einteilen.

Kristallklassengesetz

Die Symmetrien (Gruppen) der Tangentialpolyeder von Kristallpolyedern gehören einer der 32 Kristallklassen an.

Metrisches Gesetz der kleinen ganzzahligen Flächenindizes

Die Indizes aller Flächenlagen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems haben kleine ganzzahlige Werte, wenn sie auf das Koordinatentetraeder des Kristallsystems bezogen werden.

↕

Metrisches Zonenverbandsgesetz

Die Flächenlagen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems lassen sich in wenigen Schritten aus dem Symmetriegerüst, insbesondere dem Koordinatentetraeder des Kristallsystems ableiten: Jedes Paar von Schnittgeraden (Zonen) bereits vorhandener Flächen bestimmt eine neue Flächenlage; wird eine dieser Flächen mit den bereits vorhandenen Flächen geschnitten, so erhält man neue Zonen.

↓

KRISTALLFORMENGESETZ

Es gibt 47 verschiedene einfache Kristallformen. Jede geschlossene Flächenform, das heißt jedes konvexe Polyeder, das aus einem durch Kombination einfacher kristallographischer Flächenformen gebildeten Polyeder durch Parallelverschiebung einer oder mehrerer Flächen («Verzerrung») hervorgeht, ist ein mögliches Kristallpolyeder.

Wegen der oben genannten kristallographischen Einschränkungen gibt es viele einfache symmetrische Flächenformen, die nicht als Kristallpolyeder auftauchen. Letztere werden jedoch ebenfalls ausführlich und in entsprechender Art zu den Kristallformen und deren Klassifizierungen diskutiert (Abschnitt 5.4 und 5.5). Dabei ergeben die mannigfaltigen Kombinationsmöglichkeiten einfacher kristallographischer und nichtkristallographischer Flächen- und Punktformen eine weitreichende (unendliche) Vielfalt von symmetrischen Polyedern, denen hier nur für die einfachsten Fälle im einzelnen nachgegangen werden kann (Abschnitt 5.7).

Dem kontinuierlichen Zusammenhang der Klassen einfacher symmetrischer Flächen- und Punktformen, das heißt aller Klassen von konvexen symmetrischen Polyedern mit symmetrieäquivalenten Flächen oder Ecken, gehen die Betrachtungen von Abschnitt 5.6 nach, während Abschnitt 5.8 alle diskutierten Klassen von Polyedern in einen umfassenderen Zusammenhang einbettet.

Kristallographische Gesetze

Die im Abschnitt 3.2 und 3.3 entwickelten und auf ihren inneren Zusammenhang hin untersuchten kristallographischen Gesetze sind in **TABELLE 7.1** zusammenfassend dargestellt. Es stellte sich dort heraus, daß das Gesetz der kleinen ganzzahligen Indizes äquivalent ist zum Zonenverbandsgesetz sowie zum projektiven Zonenverbandsgesetz. Es wurde deshalb als das *Kristallographische Grundgesetz* bezeichnet. Dieses ist *nicht* äquivalent zum *Kristallsymmetriegesetz*. Andererseits folgt aus dem Kristallsymmetriegesetz zusammen mit der kristallographischen Einschränkung das Kristallklassengesetz und das Gesetz der 7 Kristallachsensysteme.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich das Kristallformengesetz (Abschnitt 5.3) weder aus dem Kristallographischen Grundgesetz noch aus dem Kristallsymmetriegesetz allein ergibt, wohl aber aus beiden zusammen.

Kristallformengesetz und Kristallmorphologische Hypothese

Das Kristallformengesetz kann aus der in Kapitel 1 formulierten Kristallmorphologischen Hypothese, die dem geometrischen Gehalt nach mit dem Zonenverbandsgesetz äquivalent ist, nicht abgeleitet werden. Denn über die Symmetrieverhältnisse von Kristallpolyedern, oder genauer, der entsprechenden Tangentialpolyeder ist in dieser Hypothese nicht die Rede (siehe dazu Abschnitt 3.3). Zur Erinnerung sei diese Hypothese hier noch einmal angeführt:

KRISTALLMORPHOLOGISCHE HYPOTHESE: *Kristallkörper sind kontinuierliche Gebilde, insbesondere konvexe Polyeder, die durch endlich viele Ebenen (Flächen) begrenzt werden. Die Ebenen und Kanten dieser Polyeder treffen sich in den Geraden bzw. Punkten einer durch wenige Schritte rational ergänzten harmonischen Grundfigur in der Fernebene.*

Aus den Betrachtungen zum Verhältnis von «innen» und «außen» in der projektiven Geometrie im Abschnitt 2.3 kann entnommen werden, daß der in dieser Hypothese genannten Formung des als «innere» Punktmenge aufgefaßten Kristallkörpers von «außen» eine Formung von «innen» relativ zur Fernebene entspricht. Im letzteren Fall besteht das «Innere» des Kristalls aus dem zum Punktbereich komplementären Ebenenbereich.

Die Symmetrieverhältnisse der Kristallpolyeder werden im Kristallsymmetriegesetz festgehalten.

KRISTALLSYMMETRIEGESETZ: *Tangentialpolyeder von Kristallpolyedern sind symmetrische Polyeder.*

Die mit der Kristallmorphologischen Hypothese bzw. mit dem Zonenverbandsgesetz allein verträglichen Symmetriegruppen sind genau die 32 kristallographischen Punktgruppen, welche den oben erwähnten einfachen kristallographischen Flächenformen zugrunde liegen (Abschnitt 3.3 und 6.1). Damit ist klar (Abschnitt 5.2 und 5.3), daß das Kristallformengesetz aus der Kristallmorphologischen Hypothese bzw. dem Zonenverbandsgesetz zusammen mit dem Kristallsymmetriegesetz abgeleitet werden kann (siehe dazu Abschnitt 7.5 und Tabelle 7.3).

Rationale Konstruktionen und ganzzahlige Indizes

Im Abschnitt 3.4 wurde gezeigt, daß wenn man das Zonenverbandsgesetz in seiner im wesentlichen projektiven Fassung (Abschnitt 3.2 und Tabelle 7.1) verknüpft mit dem Gesetz der sieben Kristallsysteme, so ist es äquivalent zu metrischen Fassung desselben Gesetzes. In letzterer wird anstatt von beliebigen ein allgemeines Tetraeder bildenden Flächen vom Symmetriegerüst, insbesondere den Flächen des Koordinatentetraeders bezüglich eines der sieben Kristallsysteme, ausgegangen.

METRISCHES ZONENVERBANDSGESETZ: *Die Flächenlagen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems lassen sich in wenigen Schritten aus dem Symmetriegerüst, insbesondere dem Koordinatentetraeder des Kristallsystems ableiten: Jedes Paar von Schnittgeraden (Zonen) bereits vorhandener Flächen bestimmt eine neue Flächenlage; wird eine dieser Flächen mit den bereits vorhandenen Flächen geschnitten, so erhält man neue Zonen.*

Im weiteren ergab sich auf entsprechende Weise, daß wenn man die projektive Fassung des Gesetzes der kleinen ganzzahligen Indizes (Abschnitt 3.2 und Tabelle 7.1) verknüpft mit dem Gesetz der sieben Kristallsysteme, so ist es äquivalent zur metrischen Fassung desselben Gesetzes (Abschnitt 3.4).

METRISCHES GESETZ DER KLEINEN GANZZAHLIGEN FLÄCHENINDIZES: *Die Indizes aller Flächenlagen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines bestimmten Kristallsystems haben kleine ganzzahlige Werte, wenn sie auf das Koordinatentetraeder des Kristallsystems bezogen werden.*

Aus Abschnitt 6.1 folgt weiter, daß zusammen mit dem Gesetz der sieben Kristallsysteme diese Gesetze äquivalent sind zum projektiven Flächenpolverbandsgesetz und damit zum *Gesetz der rationalen Konstruierbarkeit von Kristallpolyedern* eines Kristallsystems aus einem beliebigen Tetraeder von Flächen dieses Kristallsystems.

Symmetrien der Beugungsbilder

Aus der durch ein Kristallpolyeder, das heißt durch sein Symmetriegerüst sowie seine Flächen und Kanten, gegebenen Konfiguration von Punkten und Geraden in einer Projektionsebene, insbesondere in der Fernebene, läßt sich nicht entnehmen, ob die Symmetriegruppe des entsprechenden Tangentialpolyeders die Inversion (Punktspiegelung) enthält oder nicht. Denn diese Konfiguration ist gegenüber der Inversion invariant. Aus dieser Konfiguration allein kann also nur abgelesen werden, ob die Symmetrie einer der 11 kristallographischen Gruppen mit einem Inversionszentrum **Z** oder einer der Untergruppen dieser Gruppen angehört (Tabelle 4.4 und 4.5, Figur 4.14a).

Die Beugungsbilder von Kristallen bei Elektronen-, Neutronen- oder Röntgenstrahlen zeigen im allgemeinen dasselbe Verhalten. Die Symmetrien der Punktverteilungen in den Beugungsbildern von Kristallen sind genau dieselben wie die Symmetrien der genannten Konfiguration des Kristallpolyeders in der Fernebene. Im Zusammenhang mit der Röntgenstrukturanalyse von Kristallen (Laue-Diagramme) spricht man bei den betreffenden 11 kristallographischen Gruppen von *Laue-Klassen* oder *Friedel-Klassen*.

Damit offenbaren Kristalle unter den physikalischen Bedingungen der Röntgenstrahlbeugung (oder der Beugung anderer «Strahlen») die hauptsächlichen Symmetriekomponenten ihrer Gestaltungsprinzipien. Damit können die Beugungsbilder in ihrer Symmetriequalität als bis ins Innerste des Kristalls gehender Ausdruck oder Abbildung der Symmetrieverhältnisse in der Fernebene gedeutet werden.

7.2 *Projektive und affine Geometrie der Gitter*

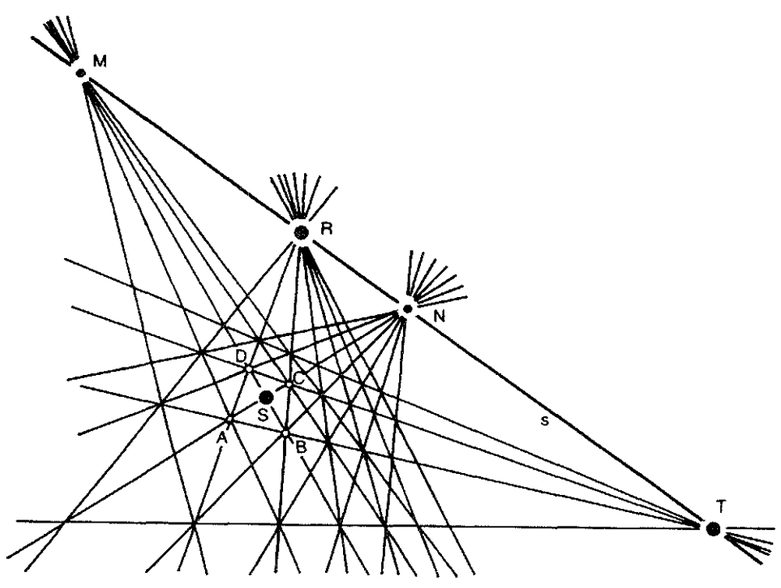
Projektive Geometrie der Gitter: Möbiusnetze und Möbiusgitter

Grundsätzlich ist gemäß Abschnitt 6.2 vermöge einer hexaedrischen Ausgangszelle (**Figur 7.3**) eine harmonische Grundfigur in der «Fernebene» bestimmt. Daraus läßt sich in eindeutiger Weise durch Erweiterung und Fortsetzung der Konstruktion des entsprechenden Möbiusnetzes aus Abschnitt 2.2 (**Figur 7.1**) eine unbegrenzte, zusammenhängende räumliche Anordnung von solchen Zellen konstruieren, ein sogenanntes *Möbiusgitter*. Dieses kann dann als projektive Vervielfältigung der Ausgangszelle aufgefaßt werden (**Figur 7.2**).

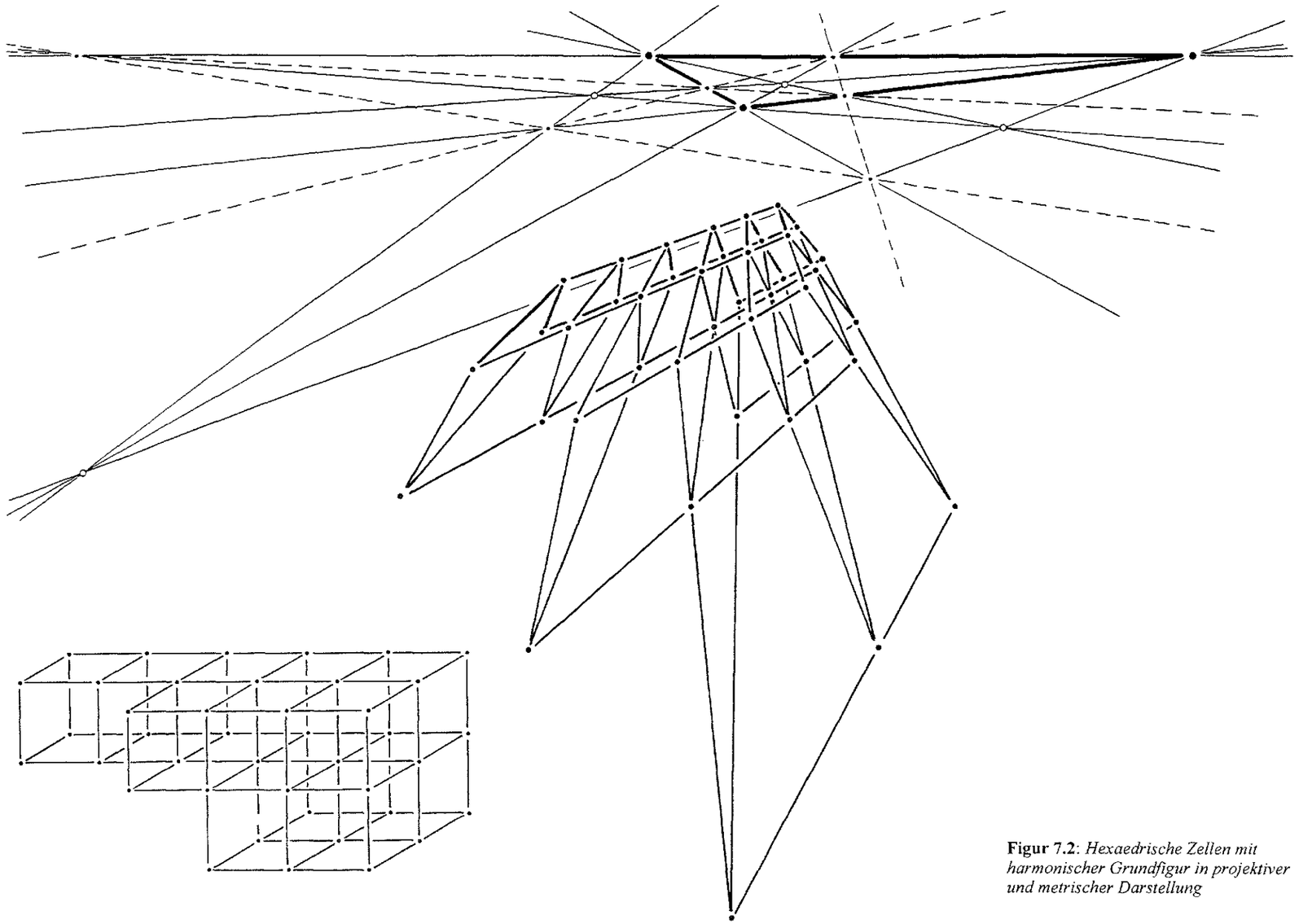
Jede hexaedrische Zelle, welche erstens eindeutig ein Möbiusgitter bestimmt, und welche zweitens durch lückenlose Vervielfältigung dieses Möbiusgitter konstituiert, heißt *Elementarzelle* oder *Einheitszelle des Möbiusgitters*. Die die harmonische Grundfigur enthaltende «Fernebene» heißt auch *Mittelebene* der hexaedrischen Elementarzelle; sie ist allen solchen Elementarzellen gemeinsam und soll deshalb *Mittelebene des Möbiusgitters* heißen.

Ein projektives Möbiusgitter enthält unendlich viele verschiedene Elementarzellen; diese haben dieselbe Mittelebene, aber unterschiedliche harmonische Grundfiguren in derselben.

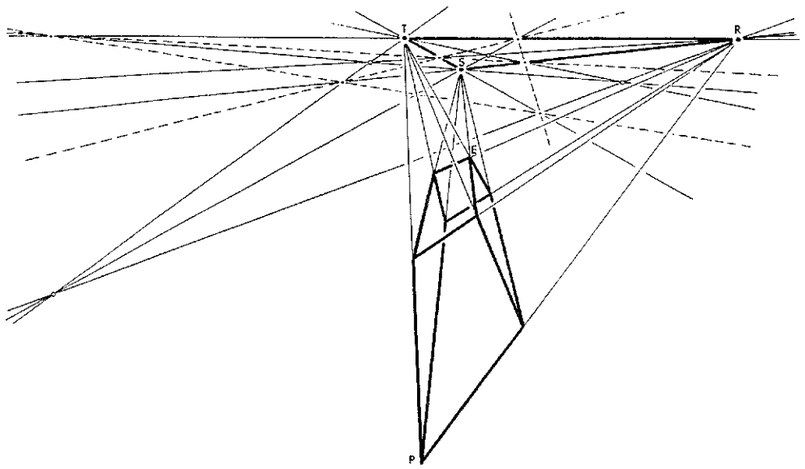
In jedem Gitterpunkt gibt es eine zentrische harmonische Grundfigur mit rationalen Ergänzungen. Die Ebenen dieses Bündels gehen durch Geraden der harmonischen Grundfigur in der Fernebene, welche der hexaedrischen Ausgangszelle und deren Vervielfältigung zu einem Gitter zugrunde liegt, sowie durch deren rationale Ergänzungen.



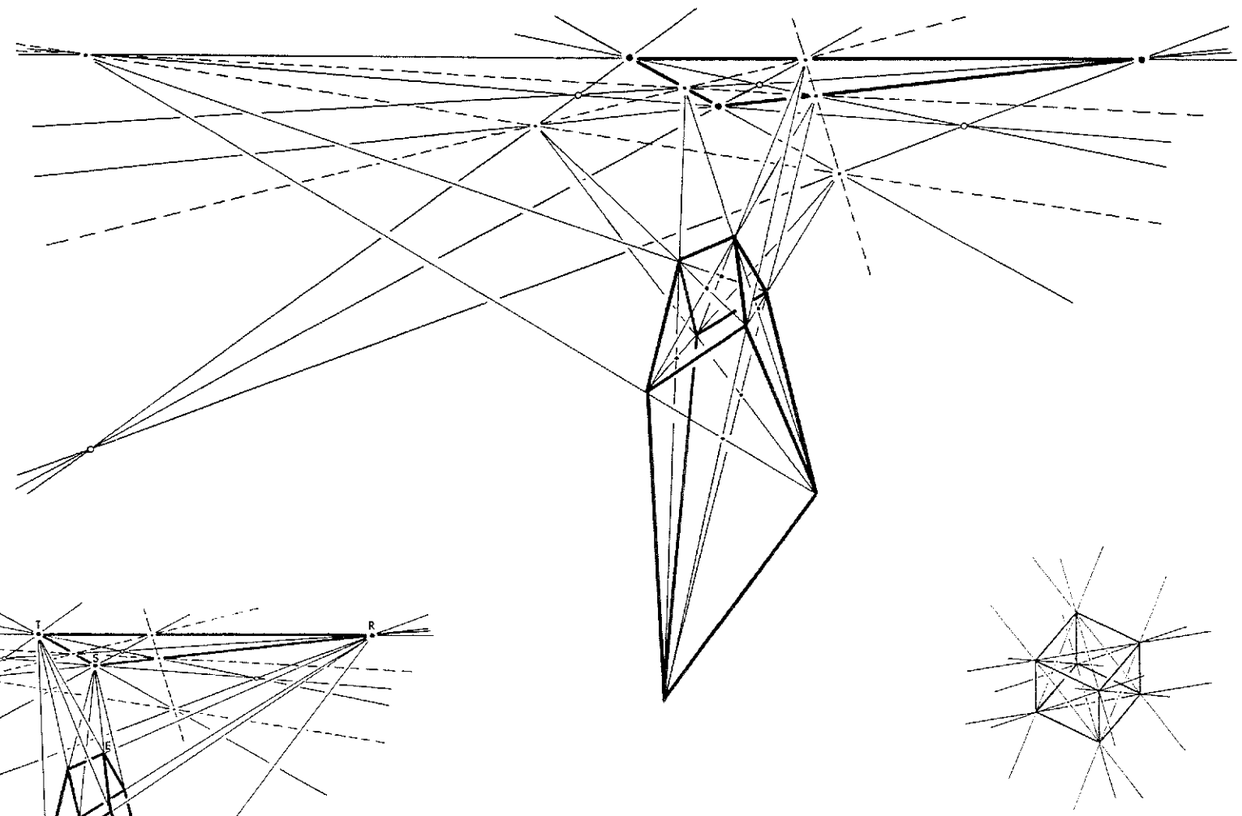
Figur 7.1: *Möbiusnetz*



Figur 7.2: *Hexaedrische Zellen mit harmonischer Grundfigur in projektiver und metrischer Darstellung*



Figur 7.3: *Elementarzelle eines Möbiusgitters mit harmonischer Grundfigur in der «Fernebene» oder Mittelebene in projektiver Darstellung*



Figur 7.4: *Flächendiagonalen im Hexaeder in projektiver und metrischer Darstellung*

Figur 7.4 zeigt, wie eine Elementarzelle eines Möbiusgitters durch Flächendiagonalen weiter unterteilt werden kann und dadurch eine Verfeinerung eines bestehenden Gitters, das heißt ein neues Gitter konstruiert werden kann. Diese Konstruktion spielt im Falle der metrischen Klassifikation der Gitter eine große Rolle (siehe unten).

Anstatt einer hexaedrischen Ausgangszelle, das heißt genauer: eines vollständigen Hexaeders (Abschnitt 6.6) als Elementarzelle, kann auch ein vollständiges Oktaeder der Konstruktion eines Möbiusgitters zugrunde gelegt werden. In beiden Fällen liegt der Konstruktion des Gitters die selbstduale Reye-Konfiguration (Abschnitt 6.6) zugrunde. Daraus ergibt sich: Möbiusgitter sind projektiv selbstduale Gebilde. Ein solches Oktaeder bildet jedoch keine Elementarzelle, da Gitter nicht lückenlose Vervielfältigungen von solchen oktaedrischen Zellen sein können.

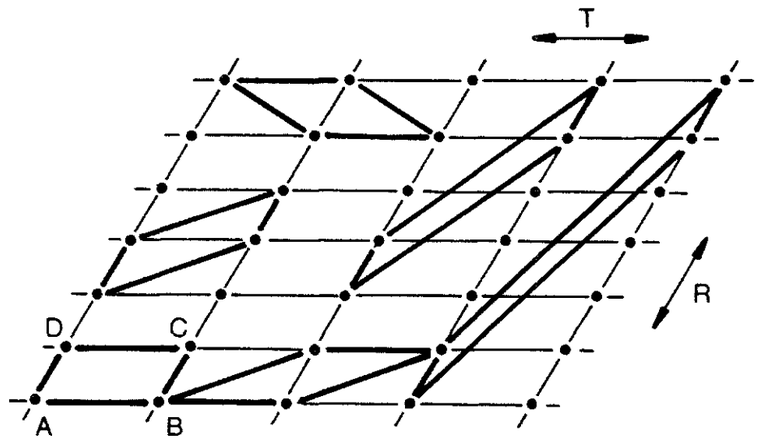
Alle Möbiusgitter sind zueinander projektiv äquivalent, das heißt, zu zwei solchen Gittern gibt es immer eine projektive Transformation, welche das eine Gitter in das andere transformiert. Dieser Satz folgt aus der Tatsache, daß die Elementarzelle eines Gitters durch fünf Punkte eindeutig bestimmt ist, sowie aus dem Satz, daß durch fünf Punktepaare in allgemeiner Lage eine Projektivität im Raum festgelegt ist (zu letzterem siehe Abschnitt 2.4). Ersteres kann unmittelbar aus **Figur 7.3** abgelesen werden, wenn man die fünf Punkte R, S, T, P, E wählt: durch R, S, T, P ist ein Tetraeder bestimmt; nimmt man E hinzu, so sind die 3 übrigen Flächen des Hexaeders samt ihren Möbiusnetzen eindeutig festgelegt. Im weiteren ergibt sich aus den Diagonalen und Diagonalebenen die harmonische Grundfigur in der Ebene R, S, T (Abschnitt 6.6: Vervollständigung der Hexaederkonfiguration).

Alle Elementarzellen eines Möbiusgitters sind zueinander projektiv äquivalent, denn jede Elementarzelle kann auf jede andere durch eine Projektivität bezogen werden, und da sie alle dasselbe Möbiusgitter bestimmen, bleibt das Gitter unter dieser Projektivität unverändert.

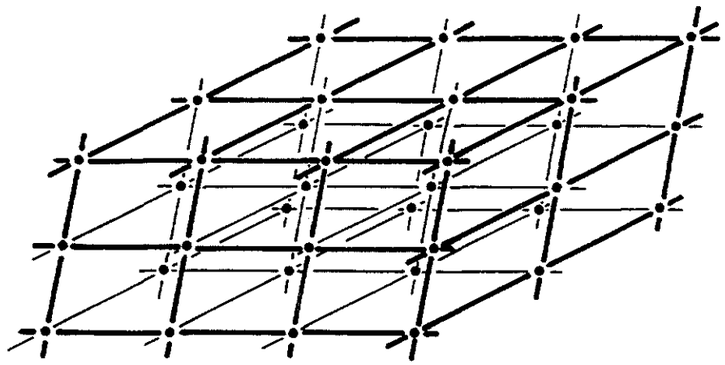
Zusammenfassend ergibt sich: *Jedem Möbiusgitter liegen unendlich viele zueinander projektiv äquivalente Elementarzellen zugrunde. Das Gitter ist durch irgendeine dieser Zellen eindeutig bestimmt und kann als projektive Vervielfältigung einer solchen Zelle aufgefaßt werden.*

Affine Geometrie der Netze und Gitter

Wird die Mittelgerade eines projektiven Netzes (Gerade s in **Figur 7.1**) zur Ferngeraden einer affinen Ebene (Abschnitt 2.5), so entsteht ein *affines Netz* (**Figur 7.5**). Jedem affinen Netz liegen unendlich viele verschiedene, jedoch zueinander affin äquivalente (siehe unten) Elementarzellen mit paarweise parallelen Seiten zugrunde (einige davon sind in Figur 7.5 angedeutet). Umgekehrt ist ein Gitter durch irgendeine dieser Zellen eindeutig bestimmt: das Gitter geht aus einer Elementarzelle durch affine Vervielfältigung hervor.



Figur 7.5: *Affines Netz*



Figur 7.6: *Affines Gitter*

Alle affinen Netze sind untereinander affin äquivalent. Denn offensichtlich ist ein solches Netz durch drei Punkte in den Ecken einer Elementarzelle (etwa *ABD* in Figur 7.5) eindeutig bestimmt: sind *R* und *T* die Schnittpunkte von *AD* bzw. *AB* mit der Mittelgeraden (Ferngeraden) *s*, so ergibt sich der vierte Eckpunkt *C* als Schnitt der Geraden *BR* und *DT*. Nun gibt es aber immer eine ebene Affinität, welche ein Dreieck in ein beliebiges anderes Dreieck überführt (Abschnitt 2.5).

Alle affinen Netze sind untereinander affin äquivalent. Denn offensichtlich ist ein solches Netz durch drei Punkte in den Ecken einer Elementarzelle (etwa *ABD* in Figur 7.5) eindeutig bestimmt: sind *R* und *T* die Schnittpunkte von *AD* bzw. *AB* mit der Mittelgeraden (Ferngeraden) *s*, so ergibt sich der vierte Eckpunkt *C* als Schnitt der Geraden *BR* und *DT*. Nun gibt es aber immer eine ebene Affinität, welche ein Dreieck in ein beliebiges anderes Dreieck überführt (Abschnitt 2.5).

Wird die Mittelebene eines projektiven Gitters (Figur 7.2) zur Fernebene eines affinen Raumes (Abschnitt 2.5), so entsteht ein *affines Gitter* (**Figur 7.6**). In entsprechender Weise wie für den ebenen Fall gilt: Jedem affinen Gitter liegen unendlich viele verschiedene zueinander affin äquivalente Elementarzellen mit paarweise parallelen Flächen zugrunde. Umgekehrt ist ein Gitter durch irgendeine dieser Zellen eindeutig bestimmt und geht aus dieser durch affine Vervielfältigung hervor.

Alle affinen Gitter sind untereinander affin äquivalent, denn eine Elementarzelle ist durch vier Eckpunkte eindeutig festgelegt, und es gibt immer eine Affinität des Raumes, welche vier ein Tetraeder bildende Punkte in beliebige vier andere solche Punkte überführt (Abschnitt 2.5).

Netzebenen und kleine ganzzahlige Indizes

Wählt man bezüglich irgendeines affinen Gitters einen beliebigen Gitterpunkt *O* als Ursprung, so läßt sich damit vermöge der Eigenschaften eines Möbiusgitters ein Koordinatensystem im *affinen* Raum aufbauen, in welchem die Gitterpunkte ganzzahlige Koordinaten haben (Abschnitt 2.7). Wegen der Äquivalenz der affinen Gitter sind natürlich alle solchen affinen Koordinatensysteme untereinander affin äquivalent.

Führt man darüber hinaus in diesem affinen Raum gemäß Abschnitt 2.7 homogene projektive Bündelkoordinaten bezüglich des Punktes *O* ein, so wird jeder Ebenen*stellung* – Ebenen*lage* in der Kristallgeometrie – ein Koordinatentripel zugeordnet, das mit den Flächenindizes äquivalent ist (Abschnitt 3.4). Zueinander parallelen Ebenen kommen dieselben Tripel zu. (Diese Zuordnung bildet den Ausganspunkt für den Aufbau des so genannten *reziproken Gitters*.) Jede Ebene mit ganzzahligen Indizes heißt *Gitterebene* oder *Netzebene* des Gitters. Da die Flächenindizes nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, können *rationale* Indizes immer *ganzzahlig* gemacht werden.

Den vier das Bündelkoordinatensystem und das Gitter festlegenden Ebenen (Koordinatentetraeder) kommen die Bündelkoordinaten oder Indizes (001), (010), (100), (111) zu. Den rationalen geometrischen Operationen des Schneidens und Verbindens – hier von Ebenen bzw. Geraden in einem Bündel – entsprechen Linearkombinationen der entsprechenden Koordinaten (Abschnitt 2.7). Damit sind alle aus den vier Ausgangsebenen des Koordinatentetraeders rational konstruierbaren Flächen Netzebenen des Gitters. *Die Indizeswerte bleiben genau dann klein, wenn nur wenige Schritte zur Konstruktion einer Netzebene notwendig sind.*

Gitter und Translationsgruppen

Die Konstruktion eines affinen Gitters führt auf sogenannte parabolische projektive Skalen auf den die Gitterpunkte tragenden Geraden, insbesondere der durch *R* und *T* gehenden Geraden der Figur 7.5. (Vom metrischen Gesichtspunkt aus haben die Punkte solcher Skalen alle dieselben Abstände.) Solchen Skalen lassen sich nun euklidische Translationen zuordnen, die auf den ganzen Raum übertragbar sind (siehe dazu Ostheimer/Ziegler [1996]). Dabei entspricht jedem Gitter eine diskrete dreidimensionale Gruppe von Translationen. Wegen der affinen Äquivalenz aller Gitter sind auch diese dreidimensionalen diskreten Translationsgruppen alle untereinander affin äquivalent. Umgekehrt gehört zu jeder solchen Gruppe und einem Punkt des affinen Raumes genau ein Gitter als Gruppenbahn dieses Punktes. Wird die Translationsgruppe auf mehrere Punkte angewendet, so entsteht ein mehrfaches oder zusammengesetztes Gitter, ein sogenannter *Gitterkomplex*. Dabei ist die Anzahl und Anordnung der Punkte eines Gitterkomplexes innerhalb einer Elementarzelle irgendeines dieser Gitter für alle zu diesen Elementarzellen translationsäquivalenten Elementarzellen dieses Gitters dieselbe.

7.3 *Metrische Geometrie der Netze und Gitter als Grundlage der Kristallstrukturtheorie*

Vom euklidisch-metrischen Gesichtspunkt aus sind sowohl Netze wie Gitter untereinander nicht mehr äquivalent, da sie je nach ihrer euklidischen Symmetrie verschiedenen Typen angehören. Den folgenden Überlegungen liegt ein in den affinen (und projektiven) Raum eingebetteter euklidischer Raum zugrunde. Es werden nun einige Resultate aus der mathematischen Theorie der Netze, Gitter und Raumgruppen dargestellt; für ausführliche Ableitungen oder Beweise wird auf die Literatur verwiesen.

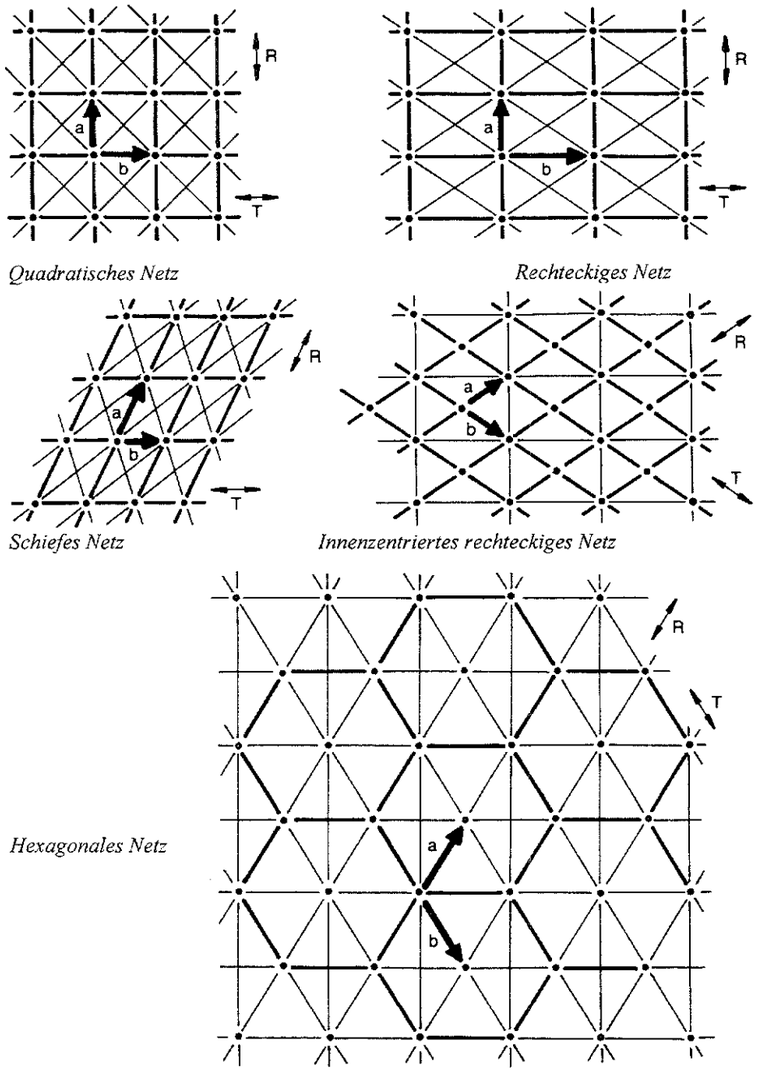
Die fünf metrischen Netztypen

Eine systematische Untersuchung von unendlich ausgedehnten Netzen gemäß ihren euklidischen Symmetrien führt auf 5 verschiedene Typen. Zwei Netze gehören zum selben Typ, wenn (1) ihre Eigensymmetrien derselben Symmetriegruppe angehört und (2) die Netze entweder ähnlich sind oder durch eine stetige Variation ihrer freien Parameter (Verhältnisse der Einheitslängen und Zwischenwinkel der Elementarzellen) unter Beibehaltung mindestens der Eigensymmetrie kontinuierlich ineinander übergeführt werden können. Letzteres bedeutet, daß Netze desselben Typs im Rahmen der Bedingungen einer bestimmten Symmetriegruppe untereinander affin äquivalent sind. Es stellt sich dabei heraus, daß als Symmetriegruppen für Netze nur kristallographische Gruppen in Frage kommen. Das Resultat der Ableitung ist in **Figur** 7.7 dargestellt.

TABELLE 7.2: *Die fünf metrischen Netztypen.* Neben der Symmetriegruppe der jeweiligen Netztypen werden auch die Parameter gemäß den Bezeichnungen in **Figur** 7.7 näher spezifiziert (Vektoren **a**, **b** mit $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ und Zwischenwinkel α). Die «Bedingungen an *R, T, M, N*» beziehen sich auf die Bezeichnungen des allgemeinen Möbiusnetzes der Figuren 7.1 und 6.18. Dabei bedeutet $R \perp T$, daß R und T einander entsprechende Elemente in einer linearen Rechtwinkelinvolution sind (Abschnitt 2.6).

TABELLE 7.2: *Die fünf metrischen Netztypen*

Zweidimensionales Netz	*Quadratisches Netz*	*Rechteckiges Netz*	*Innenzentriertes rechteckiges Netz*	*Hexagonales Netz*	*Schiefes Netz*
Symmetrie	**4mm**	**2mm**	**2mm**	**6mm**	**2**
Parameter	$a = b$ $\alpha = 90°$	$a \neq b$ $\alpha = 90°$	$a = b$ $90° \neq \alpha \neq 120°$	$a = b$ $\alpha = 120°$	$a \neq b$ $\alpha \neq 90°$
Bedingungen an R, T, M, N	$R \perp T$ und $M \perp N$	entweder $R \perp T$ oder $M \perp N$	entweder $R \perp T$ oder $M \perp N$	entweder $R \perp T$ oder $M \perp N$	weder $R \perp T$ noch $M \perp N$



Figur 7.8: *Die fünf ebenen Netztypen*

Metrische Gittertypen: Die 14 Bravais-Gitter-Typen

Die Untersuchung unendlich ausgedehnter regelmäßiger Gitter gemäß ihrer euklidischen Symmetrien führt auf 14 verschiedene Typen, *Bravais-Gitter-Typen* genannt. Zwei Gitter gehören zum selben Typ, wenn (1) ihre Eigensymmetrien derselben Symmetriegruppe angehören und (2) die Gitter entweder ähnlich sind oder durch eine stetige Variation ihrer freien Parameter (Verhältnisse der Einheitslängen und Zwischenwinkel der Symmetrieachsen: Tabelle 3.2 und 3.3) – unter Beibehaltung mindestens der Eigensymmetrie – kontinuierlich ineinander übergeführt werden können. Letzteres bedeutet, daß Gitter desselben Typs im Rahmen der Bedingungen einer bestimmten Symmetriegruppe untereinander affin äquivalent sind. Es stellt sich heraus, daß die Symmetriegruppen von Gittern genau die kristallographischen Gruppen sind. Das Resultat der Ableitung zeigt **Figur 7.9** (siehe Literatur).

Was weiter oben und im Abschnitt 3.4 Koordinatenzelle oder Elementarzelle genannt wurde, heißt in der Gittertheorie *primitive Zelle* oder *Einheitszelle*. Eine solche hat Gitterpunkte nur in den Ecken. Für jedes Kristallsystem ergibt sich zunächst genau ein Gittertyp, wenn als Elementarzelle eine Zelle mit genau der Symmetrie eines der sieben Kristallsysteme gewählt wird (siehe dazu die Zellen in Figur 3.11 und 3.12).

Die übrigen sieben Gittertypen lassen sich ebenfalls durch Zellen aufbauen, die nur in ihren Ecken Gitterpunkte haben. Diesen Zellen kommen dann jedoch nicht genau die Symmetrien des entsprechenden Kristallsystems zu. Es stellt sich heraus, daß sich diese Gittertypen ebenfalls darstellen lassen durch geeignet mit weiteren Gitterpunkten ergänzte Elementarzellen (primitive Zellen) mit der Symmetrie des jeweiligen Kristallsystems. Die *innenzentrierten Zellen* enthalten zusätzlich den Mittelpunkt, die *basiszentrierten Zellen* zusätzlich Punkte in der Mitte der Basisflächen, und die *flächenzentrierten Zellen* enthalten zusätzlich Punkte in allen Flächenmitten. Wie aus **Figur 7.4** (und Figur 6.8) hervorgeht, ergeben sich diese Punkte anhand der Elementarzelle in ihrem Zusammenspiel mit der harmonischen Grundfigur der Linearprojektion. Solche *Punkte* haben dann allerdings keine ganzzahligen Koordinatenwerte mehr. Dagegen können *rationale* Indizes von Flächen immer ganzzahlig gemacht werden, da diese nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind.

Punktdichte und Netzebenenabstände

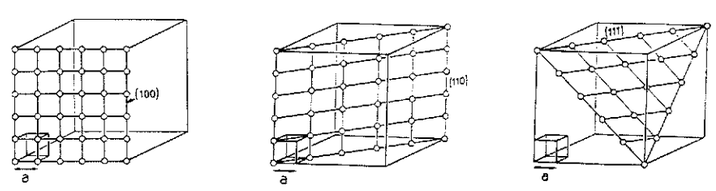
Wird das für den affinen Raum eingeführte Koordinatensystem auf die metrischen Gitter vom primitiven Typ (Figur 7.9) übertragen, so erhält man genau die 7 Typen von Koordinatensystemen der sieben Kristallsysteme. Das im Abschnitt 7.2 für Netzebenen und kleine ganzzahlige Indizes Ausgeführte gilt dann auch hier, das heißt, Netzebenen mit kleinen Indizes sind in wenigen Schritten aus dem Koordinatentetraeder und damit im wesentlichen auch aus dem Symmetriegerüst (siehe Abschnitt 6.3) konstruierbar.

Es folgen einige grundlegende Begriffe der metrischen Gittertheorie, die insbesondere in der Kristallographie eine Rolle spielen. Die *Belegungs- oder Belastungsdichte* (*Punktdichte*) einer Gitterebene oder Netzebene (*hkl*) wird definiert als die Anzahl Gitterpunkte pro Flächeneinheit; sie wird mit L_{hkl} bezeichnet. Im allgemeinen ist L_{hkl} umgekehrt proportional zum Flächeninhalt S_{hkl} der Elementarzelle des Netzes, also $L_{hkl} \sim 1 / S_{hkl}$.

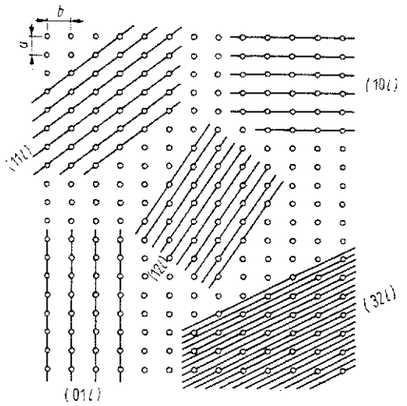
Das Volumen V einer (auch im metrischen Fall nicht eindeutig bestimmten) Elementarzelle des Gitters ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt S_{hkl} der Elementarzelle der Netzebene (*hkl*) mit dem senkrecht zu den Netzebenen gemessenen Netzebenenabstand d_{hkl} der betreffenden Schar von parallelen Netzebenen derselben Dichte: $V = S_{hkl}\, d_{hkl} = d_{hkl} / L_{hkl}$.

Da das Volumen einer Elementarzelle eines gegebenen Gitters eine nicht von h, k, l abhängige Konstante ist, ist die Belegung L_{hkl} einer Netzebene (*hkl*) proportional zum Netzebenenabstand d_{hkl}, das heißt $L_{hkl} \sim d_{hkl}$.

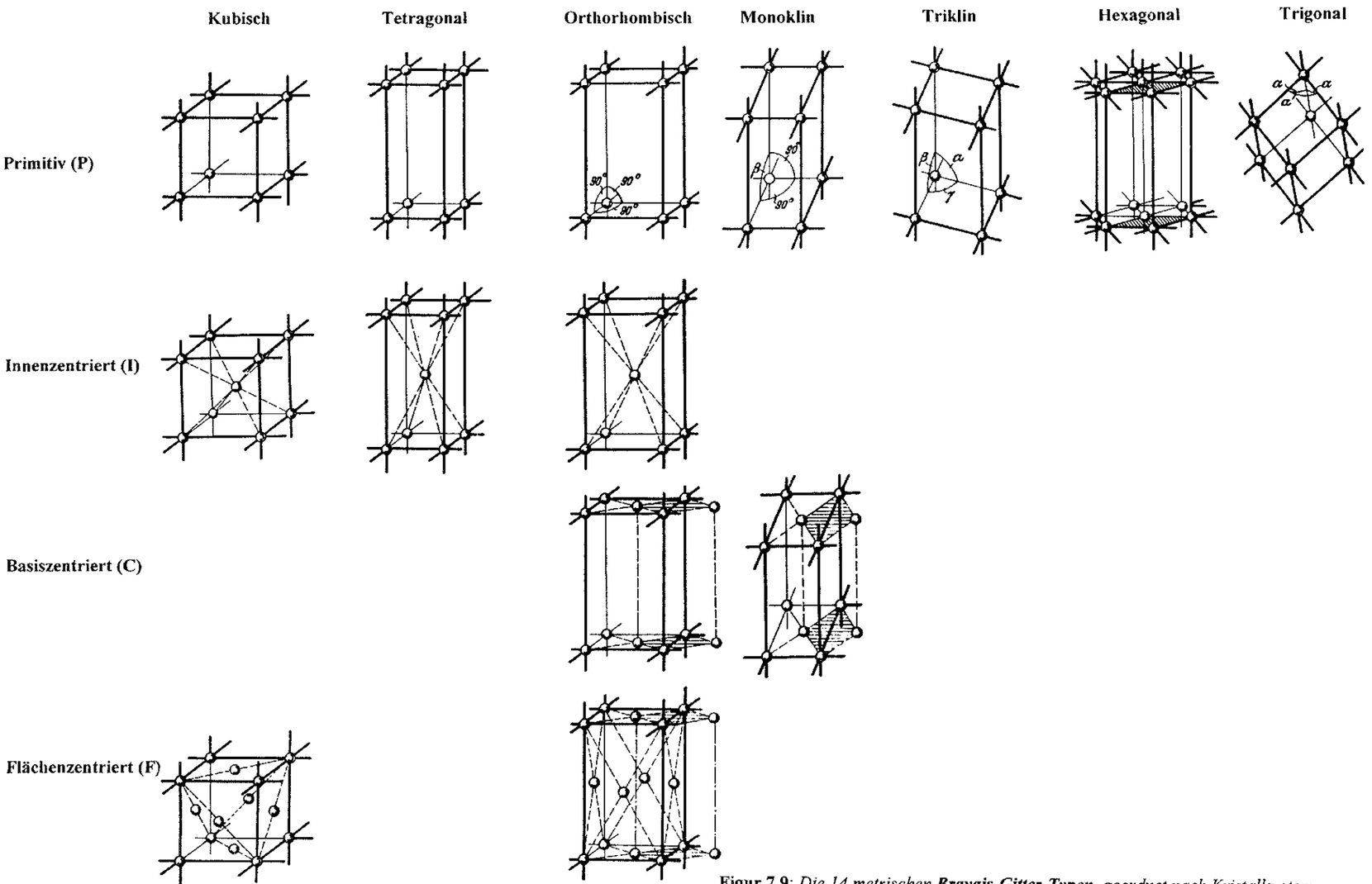
Im weiteren kann man zeigen, daß sich der Netzebenenabstand d_{hkl} im wesentlichen umgekehrt proportional zur Wurzel aus den Quadratsummen der Indizes h, k, l verhält. Mit anderen Worten: großen Netzebenenabständen d_{hkl} entsprechen kleine Indizes der Netzebenen (*hkl*) und damit hohe Belegungen L_{hkl} (**Figur 7.8ab**).



Figur 7.8a: *Zusammenhang zwischen der Belegungsdichte L_{hkl} und dem Netzebenenabstand d_{hkl} für ein primitives kubisches Gitter*



Figur 7.8b: *Zweidimensionale Darstellung verschiedener Belegungsdichten L_{hkl} und Netzebenenabstände d_{hkl} für ein primitives kubisches Gitter*



Figur 7.9: *Die 14 metrischen **Bravais-Gitter-Typen**, geordnet nach Kristallsystem und geometrischer Anordnung der Punkte*

Gittergruppen, Punktgruppen und Raumgruppen

Eine *Gittergruppe* **L** ist eine nichttriviale diskrete Untergruppe der Gruppe **T** der Translationen des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Unterzieht man irgendeinen Punkt dieses Raumes allen Operationen einer Gittergruppe, so entsteht ein *Gitter*. Mit anderen Begriffen: Gitter sind Punkt-Bahnen von Gittergruppen. Eine Gittergruppe heißt dreidimensional, wenn es drei linear unabhängige Translationen in der Gittergruppe gibt. Die oben diskutierten 14 Bravais-Gitter-Typen entsprechen genau den 14 möglichen Arten von Punkt-Bahnen von dreidimensionalen Gittergruppen.

Die Untergruppen der Gruppe der distanzerhaltenden Transformationen des dreidimensionalen euklidischen Raumes (sogenannte *Isometriegruppe* oder *Bewegungsgruppe* des euklidischen Raumes), die ein Gitter sowie einen Punkt desselben invariant lassen, sind genau die *kristallographischen Punktgruppen*. Die Forderung nach Invarianz der Gitterstruktur schränkt die Punktgruppen also genau auf die kristallographischen Fälle ein.

Die Einteilung der kristallographischen Punktgruppen in die sieben Kristallsysteme geschieht gemäß der *kleinsten* Holoedrie, welche die entsprechende Punktgruppe enthält. Die *Holoedrie* eines Gitters wird dabei definiert als die *größte* kristallographische Punktgruppe, die das Gitter und einen Punkt desselben invariant läßt.

Eine Untergruppe der Gruppe der distanzerhaltenden Transformationen des euklidischen Raumes heißt *kristallographische Raumgruppe*, kurz *Raumgruppe*, wenn sie eine diskrete Gruppe ist und ihre Untergruppe aller Translationen eine dreidimensionale Gittergruppe ist. Dabei sind zwei Raumgruppen vom selben Typ, wenn sie isomorph sind, das heißt ihnen dieselbe abstrakte Gruppe zugrunde liegt. Es treten bei den Raumgruppen also (vom rein mathematischen Gesichtspunkt aus) keine verschiedenen Realisierungen ein und derselben abstrakten Gruppe auf.

Da die einen Punkt invariant lassenden Raumgruppen genau die 32 kristallographischen Punktgruppen sind, gehört also zu jeder Raumgruppe genau eine kristallographische Punktgruppe, welche die Kristallklasse der Raumgruppe bestimmt, sowie eine Gittergruppe. Man erhält also aus einer Raumgruppe die entsprechende Kristallklasse, wenn man alle translativen Anteile ignoriert.

Ist die kristallographische Punktgruppe Untergruppe einer Raumgruppe, so heißt letztere *symmorph*. Eine Raumgruppe ist genau dann symmorph, wenn sie Symmetriegruppe eines Gitters ist. Man beachte jedoch: Jede Raumgruppe enthält eine dreidimensionale Gittergruppe, aber nicht jede Raumgruppe läßt ein Gitter invariant. Die nichtsymmorphen Raumgruppen gehören zu solchen Punktgruppen, die keine Untergruppen der entsprechenden Raumgruppen sind; letztere enthalten Schraubungen und Gleitspiegelungen, deren translative Anteile nicht der Gittergruppe der Raumgruppe angehören (diese aber erzeugen müssen).

Es gibt insgesamt 73 Isomorphieklassen von symmorphen Raumgruppen und 146 Isomorphieklassen von nichtsymmorphen Raumgruppen. Also gibt es 219 Isomorphieklassen von Raumgruppen. Dabei spalten sich noch 11 Raumgruppen in je zwei isomorphe Paare auf, wenn die Orientierung der vorhandenen Schraubung mitberücksichtigt wird. Man nennt die entsprechenden Paare von Raumgruppen *enantiomorph.* Die Kristallographen sprechen deshalb von 230 Raumgruppen, obwohl dies streng genommen vom gruppentheoretischen Gesichtspunkt aus nicht gerechtfertigt ist.

Ein interessantes Resultat von Bieberbach [1912] erlaubt, die Raumgruppen auch unabhängig vom Gitterbegriff zu charakterisieren: Jede diskrete Bewegungsgruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes mit endlichem Fundamentalbereich ist eine Raumgruppe.

Einfache und mehrfache Gitter

In diesem Abschnitt betrachten wir Gruppenbahnen von Punkten des euklidischen Raumes für Raumgruppen. Ist **R** eine Raumgruppe, so sei die Gruppenbahn eines Punktes P mit $\mathbf{R}(P)$ bezeichnet. Gemäß der Definition der Raumgruppe ist die Gruppenbahn $\mathbf{R}(P)$ eine Punktmenge, die dreifach periodisch angeordnet ist, das heißt, die Punktmenge $\mathbf{R}(P)$ ist invariant unter den Translationen der zur Raumgruppe **R** gehörenden dreidimensionalen Gittergruppe **L**. Daraus sollen nun einige Folgerungen gezogen werden.

Es werden zwei verschiedene Punkte P und Q betrachtet, wobei auf P nur die Gittergruppe **L** und auf Q die ganze Raumgruppe **R** angewendet werden soll. Man erhält damit ein Gitter $\mathbf{L}(P)$ und eine Punktmenge $\mathbf{R}(Q)$. Es wird dabei angenommen, daß Q kein Punkt des Gitters $\mathbf{L}(P)$ ist. Es soll nun die Struktur von $\mathbf{R}(Q)$ untersucht werden.

In einer beliebigen Elementarzelle Z des Gitters $\mathbf{L}(P)$ liegen gewisse Punkte aus $\mathbf{R}(Q)$, die mit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ bezeichnet werden sollen. Werden auf diese Punkte sämtliche Translationen der Gittergruppe **L** angewendet, so entsteht genau die Punktmenge $\mathbf{R}(Q)$, also ist die Punktmenge $\mathbf{R}(Q)$ die Vereinigung der Gitter $\mathbf{L}(Q_1)$, $\mathbf{L}(Q_2), \ldots, \mathbf{L}(Q_n)$.

Von den Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ in der Elementarzelle Z liegen keine zwei auf derselben Gittergruppenbahn, sie sind also nicht äquivalent bezüglich der Gittergruppe **L**. Damit sind die Gitter $\mathbf{L}(Q_1)$, $\mathbf{L}(Q_2), \ldots, \mathbf{L}(Q_n)$ alle untereinander verschieden, und die Raumgruppenbahn $\mathbf{R}(Q)$ des Punktes Q ist identisch mit der Menge der kongruenten, ineinandergestellen Gitter $\mathbf{L}(Q_1)$, $\mathbf{L}(Q_2), \ldots, \mathbf{L}(Q_n)$. Die Punktmenge $\mathbf{R}(Q)$ kann deshalb als *mehrfaches* oder *zusammengesetztes Gitter* bezeichnet werden; sie wird auch *Gitterkomplex* genannt.

Eine Veranschaulichung der Wirkung einer Raumgruppe auf einen Gitterkomplex erhält man, wenn man allen Punkten innerhalb eines Gitters dieses Komplexes dieselbe Farbe zuordnet. Dann bilden die Translationsanteile der Raumgruppe

Mengen gleichfarbiger Punkte (die einzelnen Gitter) in sich selbst ab. Alle übrigen Symmetrieoperationen vertauschen die farbigen Gitter untereinander. Daher vermischen sich die farbigen Gitter niemals: Jede Symmetrieoperation bildet ein Gitter als Ganzes auf ein anderes (kongruentes) Gitter ab.

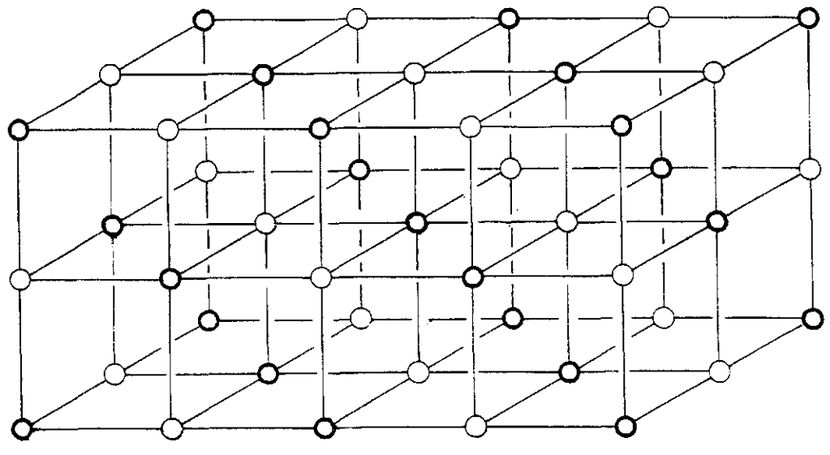
Einen der einfachsten Gitterkomplexe zeigt **Figur 7.10**. Hier handelt es sich um zwei in sehr spezieller Weise ineinandergestellte kubisch flächenzentrierte Gitter. Für das Gitter mit den fett gezeichneten Punkten sind genau zwei nebeneinander liegende Elementarzellen dargestellt. Diese enthalten Punkte des anderen Gitters in den Kantenmitten und im Zentrum der Elementarzelle.

Die Anzahl n der Punkte Q_i in einer Elementarzelle des Gitters $\mathbf{L}(P)$ ist immer endlich. Diese Zahl hat einen für jede Raumgruppe charakteristischen Wert, der zusätzlich von der Lage von Q bezüglich des Gitters $\mathbf{L}(P)$ abhängt. Denn liegt zum Beispiel Q auf einer Symmetrieebene oder -achse, so ist die Anzahl n sicher kleiner, als wenn Q auf keinem Symmetrieelement der Raumgruppe liegt.

Das mehrfache Gitter kann durch beliebig viele weitere Punktbahnen der Raumgruppe **R** ergänzt werden. Die so entstehenden Punktmengen sind dann invariant unter den Operationen von **R**, das heißt **R** ist die Symmetriegruppe aller derartigen Punktsysteme. Man nennt **R** in diesem Falle auch eine kristallographische Symmetriegruppe. Dies ist die Gruppe aller euklidischen Symmetrien einer «Kristallstruktur», die etwa so definiert werden kann: Ein Objekt K des dreidimensionalen euklidischen Raumes heißt *Kristallstruktur*, wenn (1) unter den Transformationen des euklidischen Raumes, welche K invariant lassen, drei linear unabhängige Translationen existieren und wenn (2) jede Translation, welche K in sich abbildet, mindestens die Länge $t > 0$, t eine reelle Zahl, hat. – Eine etwas anschaulichere Definition einer Kristallstruktur folgt im nächsten Abschnitt 7.4 unter dem Namen «Gitterstrukturhypothese».

Will man direkt die Raumgruppen ableiten unter Umgehung der Punktgruppen, so ist es sinnvoll, geradezu von dieser Definition einer Kristallstruktur K auszugehen und die Raumgruppe von K als die Gruppe aller euklidischen Symmetrieoperationen von K zu definieren (siehe dazu Brown et al. [1978]). Man beachte, daß man hier aus mathematischen Gründen die Kristallstruktur als unendlich ausgedehnt betrachten muß.

Geht man von den Bahnen einer beliebigen dreidimensionalen Gittergruppe **L** aus, so bestimmen die Bahnen $\mathbf{L}(Q_1)$, $\mathbf{L}(Q_2)$, ... , $\mathbf{L}(Q_m)$ von m beliebig gewählten Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ im allgemeinen keine Bahn einer Raumgruppe **R** mit der Gittergruppe **L**. Die Raumgruppe stellt sehr einschneidende Bedingungen an die Anordnung der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Denn das Vorhandensein gewisser Punkte in einer Elementarzelle fordert das Vorhandensein aller übrigen zu diesen bezüglich **L** nichtäquivalenten Punkten.

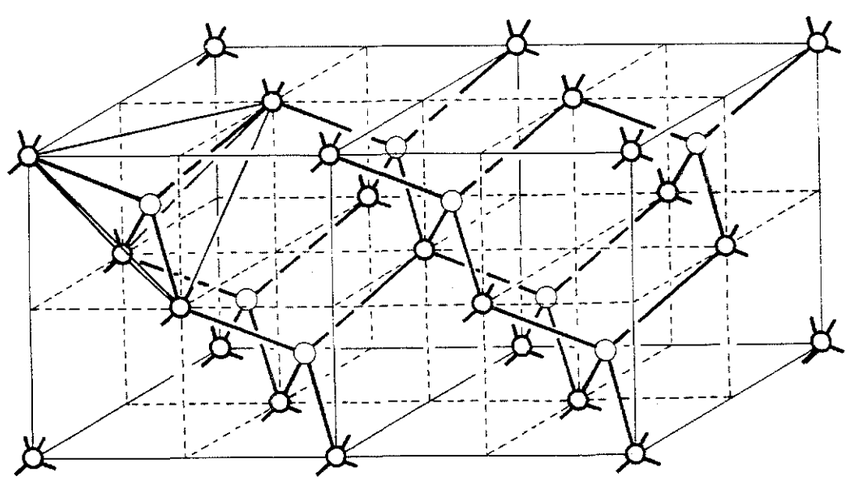


Figur 7.10: *Einfacher Gitterkomplex aus zwei kubisch flächenzentrierten Gittern (NaCl-Struktur)*

Kristallographische Strukturmorphologie

Die Erforschung möglicher Kristallstrukturen vom Gesichtspunkt der Kristallographie beschränkt sich nicht auf die Symmetrie allein, sondern berücksichtigt auch mögliche Bindungsverhältnisse zwischen den Atomen. Dadurch kommt es zur Untersuchung von sogenannten *regulären räumlichen Netzwerken.* Solche Netzwerke haben die Eigenschaft, daß alle Punkte derselben Art in derselben Weise mit anderen Punkten verbunden sind (kombinatorische Regularität).

Figur 7.11 zeigt einen Auschnitt eines regulären räumlichen Netzwerkes. Dort sieht man zwei Elementarzellen eines kubisch flächenzentrierten Gitters mit fetten Punkten, welche jeweils vier weitere dünne Punkte enthalten. Die letzteren liegen im Zentrum von je vier ein reguläres Tetraeder bildenden fetten Punkten (die Kanten eines solchen innerhalb eines der gestrichelten Würfel liegenden Tetraeders sind links oben in der Figur gezeichnet). Eine genauere Betrachtung der Figur zeigt, daß auch die dünnen Punkte auf einem kubisch flächenzentrierten Gitter liegen, das gegenüber dem ersten parallel verschoben ist (um ein Viertel der Raumdiagonalen einer Elementarzelle).



Figur 7.11: *Reguläres räumliches Netzwerk, dem ein Gitterkomplex mit zwei kubisch flächenzentrierten Gittern zugrunde liegt*

Reguläre Punktsysteme

Es soll zum Schluß dieses Abschnittes noch auf ein interessantes mathematisches Resultat hingewiesen werden, das zeigt, inwiefern globale Eigenschaften durch lokale Bedingungen determiniert sein können.

Die abstrakteste Repräsentation einer Kristallstruktur ist diejenige durch eine Menge von Punkten im euklidischen Raum mit bestimmten Eigenschaften. B. N. Delaunay (auch Delone geschrieben) betrachtete sogenannte (r, R)-*Systeme*; dies sind Punktmengen mit den folgenden Eigenschaften: (1) sie sind diskret, das heißt, es gibt einen minimalen Abstand r zwischen irgend zwei Punkten des Systems; und (2) relativ dicht, das heißt, es gibt keine Sphäre mit einem Radius $R > 0$, die keine Punkte des Systems enthält. Aus letzter Bedingung folgt, daß (r, R)-Systeme unendlich viele Punkte enthalten. Die wenigen Bedingungen an (r, R)-Systeme haben zur Folge, daß es sich um sehr allgemeine Objekte handelt. In der Kristallographie kommen nur sehr spezielle (r, R)-Systeme vor; insbesondere gehören dazu alle Gitter.

Ein (r, R)-System heißt *regulär*, wenn es von jedem Punkt des Systems aus gleich aussieht, das heißt, wenn die Konfiguration der Verbindungsstrecken eines beliebigen Punktes mit jedem anderen Punkt des Systems für alle Punkte kongruent ist. Bereits Schönflies zeigte in [1891], daß aus der Regularität eines (r, R)-Systems dessen Periodizität folgt, das heißt, jedes reguläre (r, R)-System ist entweder ein Gitter oder ein Gitterkomplex.

Delone et al. [1976] haben den entscheidenden Satz bewiesen, der besagt, daß die Regularität eines (r, R)-Systems bereits aus der lokalen Kongruenz folgt. Genauer: Wenn die Konfiguration von Punkten eines (r, R)-Systems, die in einer Sphäre mit einem genügend großen, aber endlichen Radius liegen, alle kongruent sind, dann ist das System regulär. Dies bedeutet, daß die lokale geometrische Ordnung in einem genügend großen, aber endlichen Bereich die globale Ordnung (Regularität) erzwingt.

7.4 *Kristallstrukturtheorie*

In diesem Kapitel soll die Gitterstrukturhypothese eingeführt und anschließend untersucht werden, unter welchen zusätzlichen Annahmen es zu morphologisch relevanten Einsichten kommen kann. Es soll gezeigt werden, daß die Struktureigenschaften ergänzende, die Vielfalt der möglichen makroskopischen Formen einschränkende, aber keine allein bestimmende Funktion haben.

Gitterstrukturhypothese

Es ist ein mannigfach experimentell bestätigtes Faktum, daß unter wohldefinierten und zum Teil sehr verschiedenartigen physikalischen Bedingungen – am eindrücklichsten bei den Röntgenbeugungsbildern von Kristallen – sich Kristallpolyeder so verhalten, wie wenn ihrem inneren Aufbau regelmäßig-gitterförmig angeordnete kleinste Teilchen (Atome, Ionen, Moleküle) zugrunde lägen. Bei diesen gitterförmigen Strukturen handelt es sich im allgemeinen nicht um *ein* Gitter, das heißt *einen* Repräsentanten einer der 14 Bravais-Gitter-Typen, sondern um *Gitterkomplexe* oder *zusammengesetzte Gitter* (Abschnitt 7.3).

Unter der *Gitterstrukturhypothese* versteht man die Annahme, daß kristalline Materie im wesentlichen aus einer im zeitlichen Mittel statischen und regelmäßigen, auf ein Bravais-Gitter bezogenen Anordnung von endlich vielen Atomen, Ionen oder Molekülen besteht (**Figur 7.11**):

GITTERSTRUKTURHYPOTHESE: *Kristallkörper bestehen aus endlich vielen untereinander kongruenten Bildungseinheiten (Elementarzellen), die in drei verschiedenen Richtungen translationsperiodisch angeordnet sind. Die Bildungseinheiten selbst bestehen aus endlich vielen Elementarteilchen (geometrisch: Punkte; physikalisch: Atome, Ionen, Moleküle) von endlicher Größe und endlichem Abstand.*

Wie schon im Falle der Kristallmorphologischen Hypothese kommt hier allein der geometrische Gehalt der Gitterstrukturhypothese in Betracht.

Aufgrund des hier postulierten Aufbaus spricht man auch von einem *modularen* oder *additiven Bildungsprinzip* bei Kristallen. Entscheidend dabei ist neben der *Periodizität* die *Endlichkeit*, *Diskretheit* und *Homogenität* der Struktur, das heißt die Annahme, daß Kristalle aus endlich vielen, innerhalb einer Bildungseinheit (Elementarzelle) von Kristall zu Kristall in verschiedener Weise angeordneten Teilchen mit endlichem Abstand bestehen, die über die ganze Struktur, in bezug auf die Gitterpunkte eines Bravais-Gitters, gleichmäßig verteilt sind.

In den Untersuchungen der Kapitel 3 bis 6 hat die Gitterstrukturhypothese keine Rolle gespielt – nicht weil sie grundsätzlich abgelehnt wird, sondern weil sie für geometrisch-morphologische Betrachtungen entbehrlich ist.

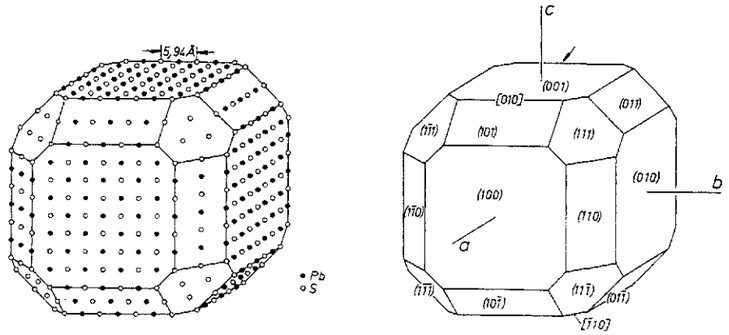
Vom Gitter zur polyedrischen Gestalt

Vom geometrischen Gesichtspunkt aus kann ohne zusätzliche Annahmen aus dem gitterförmigen Aufbau kristalliner Stoffe nicht auf eine polyedrische Gestalt derselben geschlossen werden. Zunächst muß festgehalten werden, daß Kristalle überhaupt ebene Flächen ausbilden; dies ist das Kristallflächengesetz.

KRISTALLFLÄCHENGESETZ: *Kristalle bilden ebene Flächen.*

Im weiteren kommen bei Kristallformen nicht irgendwelche Flächen vor, sondern ganz bestimmte. Dies wird durch das Korrespondenzgesetz festgehalten. Dieses für die Strukturtheorie fundamentale Prinzip beinhaltet die Behauptung, daß eine enge Beziehung zwischen den morphologischen Eigenschaften und der Gitterstruktur besteht (**Figur 7.12ab**).

KORRESPONDENZGESETZ: *Falls ein Kristall ebene Flächen ausbildet, so erscheinen diese bevorzugt in denjenigen Gitterebenen (Netzebenen), welche besonders dicht durch Elementarteilchen belegt sind.*



a: *Kristallstruktur* **b**: *Morphologie*

Figur 7.12: *Beispiel zur Korrespondenz von Kristallstruktur und Morphologie*

Beim Korrespondenzgesetzes geht es nicht darum, ob bei Kristallkörpern ebene Flächen auftreten – dies wird vorausgesetzt –, sondern *welche* Flächen *warum* bevorzugt auftreten.

Das Korrespondenzgesetz in der obigen Form geht im wesentlichen auf A. Bravais zurück und heißt deshalb auch *Bravais-Regel*. Es beruht geometrisch nur auf der Gitterstruktur (Abschnitt 7.3). Eine Verfeinerung, welche auch die nicht-translatorischen Symmetrien der Raumgruppe des entsprechenden Kristallkörpers miteinbezieht, stammt von J. Donnay und D. Harker [1937]. Hier werden nicht nur verschiebungsäquivalente Netzebenen berücksichtigt, sondern auch solche, die vermöge Drehachsen, Schraubungsachsen oder Gleitspiegelebenen äquivalent sind. Dies führt zu einer Modifikation der Bravais-Regel zur *Bravais-Donnay-Harker-Regel*, bei der gewisse Netzebenen bestimmter Dichte enger aufeinander folgen, als es die Gittergeometrie allein verlangt. Hier spielt der ganze Gitterkomplex eine Rolle.

Zusammen mit dem Kristallflächengesetz und dem Korrespondenzgesetz beinhaltet die Gitterstrukturhypothese eine weitere *mögliche* Deutung des für die ganze Kristallographie grundlegenden *Gesetzes der ganzzahligen Flächenindizes*, das heißt des Kristallographischen Grundgesetzes (Abschnitt 7.1). Denn die Netzebenen mit kleinen ganzzahligen Indizes sind genau die Ebenen mit dichtester Belegung sowie Ebenen, die rational aus dem Koordinatentetraeder und damit auch aus dem Symmetriegerüst konstruierbar sind – mit anderen Begriffen, deren Schnittgeraden mit der Fernebene der projektiven Darstellung des Symmetriegerüstes angehören oder in wenigen Schritten aus dieser rational konstruierbar sind (Abschnitt 7.2 und 7.3).

Es wird hier bezüglich der Interpretation des Gesetzes der ganzzahligen Indizes durch die Gitterstrukturhypothese (wie auch schon bezüglich der Kristallmorphologischen Hypothese) Wert gelegt auf den Begriff der «Deutung» oder «Interpretation» im Gegensatz zu «Erklärung», «Ursache» oder Ähnlichem.

Es soll hier ergänzend eine interessante *Parallele zur Chemie* erwähnt werden: das phänomenologisch bedeutsame Gesetz der multiplen (ganzzahligen) Proportionen, das allen chemischen Prozessen und Verbindungen zugrunde liegt, hat ebenfalls eine (mögliche) Deutung durch Atome, Ionen und Moleküle und deren Verknüpfungsmuster erfahren, durch eine Hypothese, die mit der Gitterstrukturhypothese der Kristallographie eng verwandt ist. Diese Zusammenstimmung hat selbstverständlich viel zum Erfolg dieser Hypothese beigetragen. (Es ist heute jedoch eine große Anzahl von Verbindungen bekannt mit teils sehr starken Abweichungen von dieser Regel, die sogenannten nicht-stöchiometrischen Verbindungen, oder Phasen.) Im weiteren ging auch in der Chemie der Entdeckung des Gesetzes der *multiplen* Proportionen die Entdeckung des Gesetzes der *konstanten* Proportionen voraus, ganz entsprechend zu dem Gebiet der Kristallographie, wo auch zuerst das Gesetz der konstanten Winkel vor dem Gesetz der «multiplen Proportionen der Flächenlagen» (Kristallographisches Grundgesetz) entdeckt wurde (siehe dazu Johnsen [1932]).

7.5 *Zum Zusammenhang von Kristallformengesetz, Kristallmorphologischer Hypothese und Gitterstrukturhypothese*

Die *Gitterstrukturhypothese* und die *Kristallmorphologische Hypothese* sind nicht auseinander ableitbar. Denn aus der Gitterstrukturhypothese folgt weder das Kristallflächengesetz noch daß Kristalle sich wie ein Kontinuum verhalten. Dagegen ist die Gitterstrukturhypothese bei entsprechenden Annahmen über die Relation der Größe der Elementarteilchen zur phänomenologischen Gestalt durchaus mit der Annahme ebener Flächen (Kristallflächengesetz) im Sinne des Korrespondenzgesetzes *vereinbar*. Im Gegensatz zur Kristallmorphologischen Hypothese ist jedoch in der Gitterstrukturhypothese das Kristallflächengesetz *nicht* enthalten.

Andererseits kann aus der Kristallmorphologischen Hypothese nicht entnommen werden, daß Kristallkörper aus endlich vielen gitterförmig, das heißt dreifach translationsperiodisch angeordneten Elementarteilchen endlicher Größe und mit endlichem Abstand bestehen. Die Kristallmorphologische Hypothese ist – wiederum bei entsprechenden Annahmen über die Relation der Größe der Elementarteilchen zur phänomenologischen Gestalt – jedoch mit einem solchen gitterförmigen Aufbau vereinbar (siehe unten).

Im weiteren muß festgehalten werden, daß weder die eine noch die andere Hypothese ohne Einschränkung zutrifft: Jedes Experiment, welches eine indirekte Bestätigung der Gitterstrukturhypothese liefert, zeigt zugleich, daß sie nicht vollkommen erfüllt ist (Gitterfehlstellen, Einschlüsse, Mosaikgitter: gegeneinander versetzte Gitterblöcke). Auf der anderen Seite zeigt die Inspektion jedes Realkristalls, daß die Ebenheit und Geradheit der Flächen bzw. Kanten nur annähernd erfüllt ist. Auch hier ergibt sich also weder eine Bevorzugung der einen noch der anderen Hypothese.

Die Entwicklung des *Kristallformengesetzes* aus der Gitterstrukturhypothese unter Zugrundelegung des *Kristallflächengesetzes* sowie des Korrespondenzgesetzes, das heißt der Annahme, daß die *ebenen* Begrenzungsflächen bevorzugt in dicht belegten Netzebenen auftreten, gehört zum Standardstoff der modernen Kristallographie und Symmetrielehre. Wesentlich dabei ist vom mathematischen Gesichtspunkt aus, daß für diese Ableitung die Raumgruppen als Symmetriegruppen aller Typen *unendlich* ausgedehnter Gitterkomplexe aufgefaßt werden und die kristallographischen Punktgruppen als diejenigen Gruppen, die ein solches Gitter und *einen* Punkt desselben in sich überführen (Abschnitt 7.3). Dies bedeutet, daß das Kristallsymmetriegesetz (Abschnitt 3.1 und 7.1) streng genommen *nicht* aus der Gitterstrukturhypothese abgeleitet werden kann, wenn nicht – wie es in der Kristallographie üblich ist – explizit die nicht den Tatsachen entsprechende Hypothese eines den *ganzen* Raum ausfüllenden unendlichen Kristallgitters gemacht wird.

Unter den Bedingungen eines unendlich ausgedehnten Gitters gibt es natürlich keine Morphologie mehr. Dieser prinzipielle Einwand läßt sich nicht entkräften durch den Hinweis auf die «sehr große» Anzahl von Atomen innerhalb eines Kristallkörpers, der diesen unter dem strukturellen Gesichtspunkt als «praktisch unendlich groß» erscheinen läßt. Mathematisch gesehen besteht zwischen endlich und unendlich ein prinzipieller Unterschied und nicht ein bloß gradueller oder approximativer, wie groß auch immer «endlich» sei.

Daraus folgt, daß das *Kristallformengesetz* aus der *Gitterstrukturhypothese* nur zusammen mit dem Kristallflächengesetz, dem *Korrespondenzgesetz und* dem *Kristallsymmetriegesetz* abgeleitet werden kann, wenn man auf die Annahme eines unendlich ausgedehnten Gitters verzichten will.

Die Untersuchungen der Abschnitte 3.2 und 6.1 zeigen, daß der geometrische Kern der Kristallmorphologischen Hypothese mit dem Zonengesetz oder dem Kristallographischen Grundgesetz äquivalent ist. Das *Kristallformengesetz* folgt demnach aus der *Kristallmorphologischen Hypothese* nur zusammen mit dem Symmetriegesetz, das heißt zusammen mit der Tatsache, daß die Tangentialpolyeder der durch diese Hypothese bestimmten Polyeder *symmetrisch* sind (Abschnitte 5.2 und 5.3).

Aus der Tatsache, daß weder die Gitterstrukturhypothese aus der Kristallmorphologischen Hypothese noch umgekehrt die Kristallmorphologische Hypothese aus der Gitterstrukturhypothese ableitbar ist, ergibt sich, daß die Gitterstrukturhypothese wesentlich andere «Informationen», das heißt begriffliche Bestandteile, als die Kristallmorphologische Hypothese enthält. Damit ist klar, daß die letztere Komponenten umfaßt, die an der Gestalt eines Kristalls nicht unmittelbar zum Ausdruck kommen und es zusätzlicher Mittel bedarf (wie der Intensitätsvermessung der Punkte von Röntgenbeugungsbildern), um sie «sichtbar» zu machen. Ebenso enthält die Kristallmorphologische Hypothese begriffliche Komponenten, die in der Gitterstrukturhypothese nicht zu finden sind, insbesondere das Auftreten von kontinuierlichen polyedrischen Gestalten bei Kristallkörpern.

Zusammenfassend gilt (**TABELLE 7.3**): *Kristallmorphologische Hypothese und Gitterstrukturhypothese stehen in einem* ***komplementären*** *Verhältnis*.

Man beachte, daß weder die Kristallmorphologische Hypothese noch die Gitterstrukturhypothese den Tangentialpolyedern oder Idealgestalten einen Vorrang gibt, es hier also zum Wesen von Kristallkörpern gehörig betrachtet wird, daß diese «verzerrt» sein können. Damit wird zum Ausdruck gebracht, daß Tangentialpolyeder zwar ein unabdingbares Hilfsmittel der geometrischen Kristallographie sind, aber *künstliche* Idealgestalten darstellen, und es deshalb nicht sinnvoll erscheint, Kristallpolyeder als «Verzerrungen» dieser künstlichen Idealgestalten anzusprechen. Daraus erklärt sich auch die hier gegebene Fassung des Kristallformengesetzes.

TABELLE 7.3: KOMPLEMENTARITÄT VON KRISTALLMORPHOLOGIE UND KRISTALLSTRUKTURTHEORIE

GESETZ DER KLEINEN GANZZAHLIGEN FLÄCHENINDIZES

Die Indizes aller Flächenlagen sämtlicher möglicher Kristallpolyeder eines Kristallsystems haben kleine ganzzahlige Werte, wenn sie auf vier ein Tetraeder bildende Flächen eines der Kristallpolyeder dieses Kristallsystems bezogen werden.

Zwei Deutungen

GITTERSTRUKTURHYPOTHESE

Kristallkörper bestehen aus endlich vielen untereinander kongruenten Bildungseinheiten (Elementarzellen), die in drei verschiedenen Richtungen translationsperiodisch angeordnet sind. Die Bildungseinheiten selbst bestehen aus endlich vielen Elementarteilchen (geometrisch: Punkte; physikalisch: Atome, Ionen, Moleküle) von endlicher Größe und endlichem Abstand.

KRISTALLMORPHOLOGISCHE HYPOTHESE

Kristallkörper sind kontinuierliche Gebilde, insbesondere konvexe Polyeder, die durch endlich viele Ebenen (Flächen) begrenzt werden. Die Ebenen und Kanten dieser Polyeder treffen sich in den Geraden bzw. Punkten einer durch wenige Schritte rational ergänzten harmonischen Grundfigur in der Fernebene.

Kristallflächengesetz: *Kristalle bilden ebene Flächen.*
Korrespondenzgesetz: *Falls ein Kristall ebene Flächen ausbildet, so erscheinen diese bevorzugt in denjenigen Gitterebenen (Netzebenen), welche besonders dicht mit Elementarteilchen belegt sind.*
Kristallsymmetriegesetz: *Tangentialpolyeder von Kristallpolyedern sind symmetrisch bezüglich Operationen, die das Zentrum des Tangentialpolyeders invariant lassen und bei welchen die Drehanteile der Symmetrieoperationen nur die Perioden 2, 3, 4, 6 haben.*

Kristallsymmetriegesetz: *Tangentialpolyeder von Kristallpolyedern sind symmetrisch bezüglich Operationen, die das Zentrum des Tangentialpolyeders invariant lassen, und bei welchen die Drehanteile der Symmetrieoperationen nur die Perioden 2, 3, 4, 6 haben.*

KRISTALLFORMENGESETZ

Es gibt 47 verschiedene einfache Kristallformen. Jede geschlossene Flächenform ohne einspringende Ecken, das heißt jedes konvexe Polyeder, das aus einem durch Kombination einfacher symmetrischer kristallographischer Flächenformen gebildeten Polyeder durch Parallelverschiebung einer oder mehrerer Flächen («Verzerrung») hervorgeht, ist ein mögliches Kristallpolyeder.

7.6 *Synthese von Morphologie und Strukturtheorie*

Integration der Gitterstrukturhypothese in die Kristallmorphologische Hypothese

Es soll nun in der Form eines Ganges von der Kristallmorphologischen Hypothese über das Kristallformengesetz bis hin zum Realkristall etwas näher angeschaut werden, wie die Gitterstrukturhypothese in die Kristallmorphologische Hypothese integriert werden kann.

Zunächst ergibt sich anhand der Kristallmorphologischen Hypothese das *Kristallsystem* eines Kristallpolyeders durch das Verhältnis der dem Symmetriegerüst des Kristallpolyeders zugrunde liegenden harmonischen Grundfigur zur Rechtwinkelpolarität in der Fernebene. Denn gemäß den Betrachtungen von Abschnitt 6.4 gibt es zu jedem Kristallpolyeder eine dieses Symmetriegerüst enthaltende harmonische Grundfigur in der Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Diese bestimmt durch ihre Beziehungen zu den euklidischen Maßverhältnissen, insbesondere zur Rechtwinkelinvolution (Abschnitt 2.6), das Kristallsystem. Im weiteren legt diese harmonische Grundfigur und die daraus in wenigen Schritten rational, durch Schneiden und Verbinden, konstruierbaren Punkte und Geraden alle möglichen Flächen- und Punktlagen fest, und damit die grundlegenden geometrisch-morphologischen Eigenschaften jedes Kristallpolyeders.

Die für ein Kristallsystem entscheidenden geometrischen Bestimmungsstücke sind die Symmetrieachsenrichtungen sowie die Längen- und Winkelverhältnisse der entsprechenden *Koordinatenzellen* oder *Elementarzellen*. Diese sind in den Tabellen 3.2 und 3.3 angeführt und in den Figuren 3.11 und 3.12 abgebildet. (Für das *trigonale System* wird hier ausdrücklich das kanonische Koordinatengerüst und die entsprechende Koordinatenzelle herangezogen; siehe Figur 3.12 und Tabelle 3.3.)

Ergänzt man diesen Gesichtspunkt durch die Gitterstrukturhypothese, das heißt durch ein metrisches Gitter mit den durch das Kristallsystem festgelegten Parametern der Koordinatenzellen (Elementarzellen), so ist durch diese Festlegung von Gitterparametern (Gitterkonstanten) der Typ der internen gitterartigen Struktur eines Kristallpolyeders erst in seinen gröbsten Zügen bestimmt. Insbesondere ergibt sich vermöge des Korrespondenzgesetzes, daß alle Kristallflächen bevorzugt in dicht belegten Netzebenen sein müssen (Abschnitt 7.4).

Welcher Gittertyp genau vorliegt (primitiv, innenzentriert etc.), läßt sich vermöge der makroskopischen Merkmale nicht ohne weiteres feststellen. Jedenfalls ergeben sich sämtliche möglichen Gittertypen und Gitterkomplexe unmittelbar aus den in ihrem Ursprung beliebig wählbaren Elementar- oder Koordinatenzellen im Zusammenspiel mit der dazugehörigen harmonischen Grundfigur in der Fernebene (Abschnitt 7.2 und 7.3). Man beachte dabei, daß die durch drei linear unabhängige Gittervektoren bestimmten Elementarzellen bezüglich dieses Gitters nicht eindeutig definiert sind; zur näheren Eingrenzung kann man sich etwa auf diejenigen Elementarzellen einschränken, deren erzeugende Vektoren am kürzesten sind.

In der Kristallographie spricht man bei der Anordnung der Elementarteilchen innerhalb einer Elementarzelle auch von der «Dekorierung» oder der «Basis» der Elementarzelle.

Wird zur Kristallmorphologischen Hypothese das Symmetriegesetz hinzugenommen, so gehört zu jedem Tangentialpolyeder eines Kristalls ein in Gestalt und Lage der Symmetrieelemente wohlbestimmtes Symmetriegerüst, durch welches die *Kristallklasse* und damit die mögliche(n) Klasse(n) der einfachen Flächenformen und deren Kombinationsformen festgelegt sind.

Im weiteren gibt es für jede rein und unter gleichbleibenden äußeren Bedingungen (insbesondere der thermodynamischen Zustandsgrößen Druck und Temperatur) entstehenden Kristalle bestimmte Werte (sogenannte Materialkonstanten) für die innerhalb eines Kristallsystems noch offenen Parameter; dies betrifft insbesondere das Verhältnis der Einheitslängen sowie die Winkel der Symmetrieachsenrichtungen und Elementar- oder Koordinatenzellen (Tabelle 3.2 und Figur 3.3). Diese legen dann die Parameter des dazugehörigen Gitter*typs* und damit auch diejenigen des Typs der einzelnen Gitter der entsprechenden Gitterkomplexe fest. Das Verhältnis der einzelnen Gitter eines Gitterkomplexes untereinander, das heißt die genaue Anordnung der Elementarteilchen mit den entsprechenden absoluten Distanzen, ist auf diesem Wege (das heißt durch morphologische Betrachtungen allein) allerdings nicht feststellbar.

In einem letzten Schritt bestimmen die konkreten Kristallisations- und Substanzverhältnisse die genauen absoluten Abmessungen der endgültigen Form und nicht nur die Achsenverhältnisse bzw. die möglichen Winkel. Darüber hinausgehende Gestaltungsvariationen (Habitus) sind ebenfalls durch Symmetriebetrachtungen und die genauen Koordinatenzellenabmessungen nicht zu erfassen.

Formsynthese

Verknüpft man die Kristallmorphologische Hypothese zusammen mit dem Symmetriegesetz mit der Gitterstrukturhypothese in der Art, daß man als Gitter gerade diejenigen Punktgebilde zuläßt, die anhand der durch die Kristallmorphologische Hypothese festgelegten harmonischen Grundfigur möglich sind, so ergibt sich ein interessantes Resultat:

FORMSYNTHESE: *Aus der Gitterstrukturhypothese, dem Kristallsymmetriegesetz und der Kristallmorphologischen Hypothese folgt das Korrespondenzgesetz.*

Denn einerseits kann mit Hilfe des Symmetriegesetzes aus der Kristallmorphologischen Hypothese das Kristallformengesetz abgeleitet werden, und andererseits schränkt die Kristallmorphologische Hypothese die vermöge der Gitterstrukturhypothese möglichen makroskopischen Formen genau auf solche Polyeder ein, deren Flächen durch Punkte dicht belegte Gitterebenen oder Netzebenen des Raumgitters sind. Letzteres folgt aus der Tatsache, daß vermöge der auf *wenige* Schritte beschränkten rationalen Erweiterung der harmonischen Grundfigur in der Fernebene gerade die am dichtesten durch Punkte belegten Netzebenen ausgewählt werden.

Falls man bezüglich der Gitterstrukturhypothese von einem dem Kristallkörper zugrunde liegenden *unendlich* ausgedehnten Gitter ausgeht, so ergibt sich auf entsprechende Weise das Resultat: *Aus der Synthese von Gitterstrukturhypothese und Kristallmorphologischer Hypothese folgt das Kristallformengesetz.*

Es ist interessant, und nicht nur vom mathematischen Gesichtspunkt aus bedeutsam, daß weder die Gitterstrukturhypothese noch die Kristallmorphologische Hypothese für sich genommen hinreichend zur Bestimmung des Kristallformengesetzes ist. Im weiteren schließen sich diese beiden Hypothesen auch nicht aus, sondern ergänzen sich *komplementär* in dem Sinne, daß die eine begriffliche Komponenten enthält, welche zusammen mit der anderen Hypothese und dem Kristallsymmetriegesetz sowie dem Korrespondenzgesetz das Kristallformengesetz konstituieren (Abschnitt 7.5).

Eine sachgemäße Kristallographie, welche allen bekannten Phänomenen gerecht werden will, kann also weder auf die eine noch auf die andere Hypothese verzichten.

Ein Kristallformungsprinzip

Geht man davon aus, daß die ein Kristallpolyeder konstituierenden Prinzipien den Kristall in seinem ganzen Innern durchdringen, so liegt es nahe, die an seiner äußeren Gestalt erscheinenden Formprinzipien (ebene Flächen, Symmetrie der Tangentialpolyeder, «Verzerrung») auch seiner inneren Formung zugrunde zu legen.

Faßt man demzufolge die Gitterpunkte als Träger von zentrischen harmonischen Ebenenbündeln auf, welche alle die dem Gitter zugrunde liegende harmonische Grundfigur (und deren rationale Ergänzungen) in der Fernebene enthalten, so ergibt sich anstelle der Idee eines Punktgitters aus lokal verknüpften Elementarteilchen die Idee eines Gitters von durch Ebenen fernverknüpften Formungszentren.

Zusammen mit dem Kristallsymmetriegesetz ergibt sich daraus das Kristallformungsprinzip (**TABELLE 7.4**).

KRISTALLFORMUNGSPRINZIP: *Kristallkörper sind kontinuierliche Gebilde, insbesondere konvexe Polyeder, die durch endlich viele Ebenen (Flächen) begrenzt werden und deren Tangentialpolyeder symmetrisch sind. Diese Flächen konstituieren sich aus Ebenen der dem Kristallkörper immanenten zentrischen harmonischen Grundfiguren (mit wenigen rationalen Ergänzungen), deren Zentren einen Ausschnitt eines Möbiusgitters (insbesondere ein Bravais-Gitter) bilden, und deren Ebenen die dem Gitter zugrunde liegende harmonische Grundfigur in der Fernebene enthalten.*

Die begrifflichen Komponenten dieses Prinzips sind hinreichend zur Ableitung des Kristallformengesetzes.

TABELLE 7.4: SYNTHESE VON KRISTALLMORPHOLOGIE UND KRISTALLSTRUKTURTHEORIE

FORMSYNTHESE

GITTERSTRUKTURHYPOTHESE

Kristallkörper bestehen aus endlich vielen untereinander kongruenten Bildungseinheiten (Elementarzellen), die in drei verschiedenen Richtungen translationsperiodisch angeordnet sind. Die Bildungseinheiten selbst bestehen aus endlich vielen Elementarteilchen (geometrisch: Punkte; physikalisch: Atome, Ionen, Moleküle) von endlicher Größe und endlichem Abstand.

KRISTALLMORPHOLOGISCHE HYPOTHESE

Kristallkörper sind kontinuierliche Gebilde, insbesondere konvexe Polyeder, die durch endlich viele Ebenen (Flächen) begrenzt werden. Die Ebenen und Kanten dieser Polyeder treffen sich in den Geraden bzw. Punkten einer durch wenige Schritte rational ergänzten harmonischen Grundfigur in der Fernebene.

KRISTALLFORMUNGSPRINZIP

Kristallkörper sind kontinuierliche Gebilde, insbesondere konvexe Polyeder, die durch endlich viele Ebenen (Flächen) begrenzt werden und deren Tangentialpolyeder symmetrisch sind. Diese Flächen konstituieren sich aus Ebenen der dem Kristallkörper immanenten zentrischen harmonischen Grundfiguren (mit wenigen rationalen Ergänzungen), deren Zentren einen Ausschnitt eines Möbiusgitters (insbesondere ein Bravais-Gitter) bilden, und deren Ebenen die dem Gitter zugrunde liegende harmonische Grundfigur in der Fernebene enthalten.

GENETISCHE SYNTHESE

STRUKTURGENETISCHES PRINZIP DER KRISTALLBILDUNG

Kristalle bilden sich lokal und sukzessiv (additiv) durch Zusammenfügung endlich vieler Elenmentarteilchen, gemäß deren Eigenschaften und Wechselwirkungsgesetzen sowie dem Prinzip der Energieminimierung, zu Gitterkomplexen mit polyedrischer Außengestalt.

MORPHOGENETISCHES PRINZIP DER KRISTALLBILDUNG

Kristallpolyeder bilden sich global und ganzheitlich durch eine Konfiguration der Ferngeraden der Flächen gemäß den Bedingungen einer harmonischen Grundfigur und in ihrer inneren Struktur gemäß dem entsprechenden Möbiusgitter.

KRISTALLGENETISCHES PRINZIP

Kristallkörper bilden sich durch endlich viele Ebenen (Flächen) zu kontinuierlichen konvexen Polyedern, deren Tangentialpolyeder symmetrisch sind. Diese Flächen urständen in Ebenen der dem Kristallkörper immanenten zentrischen harmonischen Grundfiguren (mit wenigen rationalen Ergänzungen), deren Zentren einen Ausschnitt eines Möbiusgitters (insbesondere ein Bravais-Gitter) bilden, und deren Ebenen die dem Gitter zugrunde liegende harmonische Grundfigur in der Fernebene enthalten.

7.7 *Kristallgenese*

Unter Kristallgenese wird hier die Entstehung von Kristallpolyedern verstanden. Bisher wurde im wesentlichen geometrisch argumentiert und auf die fertig ausgebildete Form bzw. Gestalt und deren Gesetzmäßigkeiten geschaut, ohne Berücksichtigung von genetischen Faktoren und bildenden Kräften. Im folgenden sollen einige grundsätzliche Überlegungen zur Kristallgenese vorgeführt werden.

Jede Untersuchung der Kristallgenese muß sich auf die grundlegenden Form- und Strukturprinzipien der Kristallographie beziehen. Aus diesem Grund wird die Kristallgenese als ein Problem der *genetischen Interpretation* der beiden in den vorangehenden Abschnitten besprochenen Hypothesen, der Kristallmorphologischen Hypothese und der Gitterhypothese, behandelt. Im weiteren legt der komplementäre Charakter dieser Hypothesen nahe, entsprechend komplementäre genetische Prinzipien aufzustellen.

Entscheidend für den hier entwickelten, den üblichen komplementär ergänzenden Gesichtspunkt der *Morphogenese von Kristallen* ist, daß sich die wesentlichen Elemente der mit einem Kristallpolyeder zusammenhängenden Gitterstruktur als Ausdruck der morphologischen Merkmale ergeben, sich also als mögliche Folge der Form und nicht notwendigerweise als «Ursache» derselben *denken* lassen.

Strukturgenese von Kristallen

Für die Betrachtung der Strukturgenese wird von der Deutung des Kristallographischen Grundgesetzes durch die Gitterstrukturhypothese ausgegangen. Ausgehend von dieser Deutung werden vom Gesichtspunkt der traditionellen Physik alle makroskopischen Eigenschaften der Kristalle als Konsequenz der Mikrostrukturen gedeutet, oder genauer: als widerspruchsfrei vereinbar mit der Gitterstrukturhypothese aufgefaßt.

Die Diskussion der Kristallgenese hinsichtlich der Struktur erfordert inbesondere eine nähere Betrachtung der Entstehung ebener Kristallflächen, das heißt letztlich von Kristallpolyedern. Zur genaueren Eingrenzung des Problems soll der Kristallbildungsprozeß in drei Phasen gegliedert werden.

(1) Bei der *strukturgenetischen Keimbildung* handelt es sich um lokale Interaktionen von Atomen, Ionen oder Molekülen, die zum Zusammenschluß mehrerer solcher Objekte führen. Hier spielt die indirekt erschlossene lokale geometrische Struktur der Komponenten für die Kombinationsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle (Koordinationspolyeder).

In dieser Phase treten weder Gitterstrukturen noch polyedrische Gestalten mit ebenen Begrenzungsflächen auf.

(2) Die Bildung von *kristallinem Stoff*, *Kristallaggregaten* oder *Kristallkörpern*, auch *Kristallite* genannt, aus Kristallkeimen ist dadurch charakterisiert, daß erstens raumgruppenkonforme Gitterstrukturen indirekt nachweisbar sind und zweitens noch keine eindeutige Morphologie, insbesondere keine polyedrische Gestalt, vorliegt.

Interessanterweise ist die substantielle Zusammensetzung sowie die Form eines Kristallkeimes von untergeordneter Bedeutung für die sich daran entzündende Bildung von Kristallkörpern.

(3) In der dritten Phase entstehen aus dem kristallinen Stoff mit Gitterstruktur gemäß dem Kristallflächengesetz und dem Korrespondenzprinzip ebenflächig begrenzte Körper, die *polyedrischen Kristallformen*.

Die physikalischen Überlegungen oder «Erklärungen» zu diesen verschiedenen Phasen der Strukturbildung und deren Übergängen beruhen im wesentlichen auf dem *Prinzip der Energieminimierung* in seiner auf Transportvorgänge zugeschnittenen, mit den einschlägigen Transportgesetzen (Diffusionsgesetze) gekoppelten Form.

Insbesondere kann durch die Verknüpfung verschiedener Teilgebiete der Physik (phänomenologische Thermodynamik, statistische Mechanik, Quantenmechanik) das Kristallflächenprinzip sowie das Korrespondenzprinzip auf das für die gesamte Physik grundlegende Prinzip der Energieminimierung «zurückgeführt» werden.

Vom Gesichtspunkt einer projektiv gedeuteten mathematischen Physik, insbesondere der mathematischen Quantenphysik, ist diese Tatsache besonders interessant. Denn der Energie-Impuls-Vierervektor der mathematischen Physik kann als Gebilde mit dem geometrischen Charakter einer Ebene interpretiert werden (siehe dazu Gschwind [1986], [1989], [1991]).

Zusammenfassend gelangt man zu folgender genetischen Deutung der Gitterstrukturhypothese zusammen mit dem Kristallflächengesetz und dem Korrespondenzgesetz:

STRUKTURGENETISCHES PRINZIP DER KRISTALLBILDUNG: *Kristalle bilden sich lokal und sukzessiv (additiv) durch Zusammenfügung endlich vieler Elenmentarteilchen, gemäß deren Eigenschaften und Wechselwirkungsgesetzen sowie dem Prinzip der Energieminimierung, zu Gitterkomplexen mit polyedrischer Außengestalt.*

Morphogenese von Kristallen

Für die Betrachtung der Morphogenese von Kristallen wird von der Deutung des Kristallographischen Grundgesetzes durch die Kristallmorphologische Hypothese ausgegangen. Auf der Grundlage dieser Deutung werden alle (sub-)mikroskopischen Eigenschaften der Kristalle als Konsequenz der morphologischen Prinzipien gedeutet, oder genauer: als widerspruchsfrei vereinbar mit der Kristallmorphologischen Hypothese aufgefaßt.

Vom Gesichtspunkt der Morphogenese kann die Kristallbildung in folgender Weise gegliedert werden. Dabei kann nicht von vornherein angenommen werden, daß sich diese Prozesse in zeitlicher Folge abspielen. Im weiteren liegt es in der Natur dieser Deutung der Kristallmorphologischen Hypothese, daß hier die globalen formenden Prinzipien und nicht die sich lokal aggregierenden Substanzen im Vordergrund stehen.

(1) Bei der *morphogenetischen Keimbildung* handelt es sich um eine Konfiguration von Ebenen, deren Ferngeraden gemäß den Bedingungen einer harmonischen Grundfigur angeordnet sind. Dies bedeutet, daß diese Ferngeraden entweder eine Teilmenge einer harmonischen Grundfigur ausmachen oder einer rational ergänzten harmonischen Grundfigur angehören.

(2) Die Bildung eines *Kristallpolyeders* geschieht aufgrund der Kristallmorphologischen Hypothese zusammen mit dem Kristallsymmetriegesetz, also gemäß dem Kristallformengesetz. In dieser Phase der Kristallgenese steht die Morphologie des Kristalls im Vordergrund und es muß noch keine eindeutige Struktur nachweisbar sein.

Für die Bildung des Kristallpolyeders scheint die räumliche Orientierung der harmonischen Grundfigur relativ zur Erde, den Planeten oder den Fixsternen nicht wesentlich zu sein, da bisher keine Bevorzugungen bestimmter Raumrichtung bei der Kristallisation festgestellt worden sind.

(3) In der dritten Phase wird das Innere des Kristallpolyeders gemäß dem durch die harmonische Grundfigur in der Fernebene bestimmten Möbiusgitter sowie dem Korrespondenzprinzip zu einem Gitter oder einem Gitterkomplex durchstrukturiert.

Zusammenfassend gelangt man zu folgender genetischen Deutung der Kristallmorphologischen Hypothese zusammen mit dem Korrespondenzgesetz:

MORPHOGENETISCHES PRINZIP DER KRISTALLBILDUNG: *Kristallpolyeder bilden sich global und ganzheitlich durch eine Konfiguration der Ferngeraden der Flächen gemäß den Bedingungen einer harmonischen Grundfigur und in ihrer inneren Struktur gemäß dem entsprechenden Möbiusgitter.*

Genetische Synthese

Nimmt man das Kristallsymmetriegesetz hinzu, so gelangt man aufgrund einer genetischen Deutung des Kristallformenprinzips zu folgendem synthetischen Prinzip der Kristallbildung (**TABELLE 7.4**).

KRISTALLGENETISCHES PRINZIP: *Kristallkörper werden durch endlich viele Ebenen (Flächen) zu kontinuierlichen konvexen Polyedern gebildet, deren Tangentialpolyeder symmetrisch sind. Diese Flächen urständen in Ebenen der dem Kristallkörper immanenten zentrischen harmonischen Grundfiguren (mit wenigen rationalen Ergänzungen), deren Zentren einen Ausschnitt eines Möbiusgitters (insbesondere ein Bravais-Gitter) bilden, und deren Ebenen die dem Gitter zugrunde liegende harmonische Grundfigur in der Fernebene enthalten.*

7.8 *Aperiodische regelmäßige Strukturen: Quasikristalle*

Es soll hier kurz auf neuere Entwicklungen eingegangen werden, die es notwendig machen, auch aperiodische regelmäßige Strukturen, insbesondere Strukturen ohne Translationssymmetrie, in die geometrische Kristallographie einzubeziehen. Dies wurde durch die Entdeckung der sogenannten *Quasikristalle* in die Wege geleitet. Dies sind (bisher nur auf künstlichem Wege herstellbare) meist komplexe Metallverbindungen (Legierungen meist aus Aluminium mit Mangan, Kupfer, Eisen, Palladium, Lithium etc.), deren Röntgenbeugungsbilder und Elektronenbeugungsbilder «kristallographisch verbotene» Symmetrien zeigen, insbesondere die Symmetrien des Ikosaeders bzw. Pentagondodekaeders sowie, in anderen Quasikristallmaterialien, Symmetrieachsen der Zähligkeiten 8, 10 und 12.

Die Verallgemeinerung der Gitterstrukturhypothese erfolgt unter zwei Aspekten: Erstens wird im allgemeinen an der Endlichkeit, Diskretheit und Homogenität der Gitterstruktur festgehalten; zweitens wird die Forderung der Periodizität und bestimmter Symmetrien der Struktur durch Bedingungen an das durch diese Struktur bedingte Röntgen- oder Elektronenbeugungsmuster ersetzt, welches Angaben über die reziproke Struktur des Kristalls enthält:

VERALLGEMEINERTE GITTERSTRUKTURHYPOTHESE: *Kristalle sind diskrete, homogene Mengen von Elementarteilchen (geometrisch: Punkte; physikalisch: Atome), die ein Röntgen- oder Elektronenbeugungsmuster mit scharfen Punkten erzeugen.*

Dabei entspricht definitionsgemäß die Symmetrie der *Kristalle* der reziproken Symmetrie des Beugungsmusters. Quasikristalle sind davon verschiedene Materialien, deren Strukturen nicht translationsperiodisch sind.

Diese Verallgemeinerte Strukturhypothese schließt sowohl die bisherigen periodischen wie auch die aperiodischen Strukturen ein. Bei Quasikristallen ist eine entscheidende Bedingung der Kristallmorphologischen Hypothese das Vorhandensein *ebener* Flächen, meist von bloßem Auge nicht zu erkennen: sie verhalten sich makroskopisch meist wie mikrokristalline oder amorphe Stoffe, bilden also nur bei freiem Wachstum sehr kleine, *ebene* Flächen, und zwar insbesondere Polyeder mit nichtkristallographischen Symmetrien.

Elektronenmikroskopische Untersuchungen zeigen, daß bei thermodynamisch stabilen Quasikristallen im Nanometer- bis Mikrometerbereich (1 Mikrometer = 1 µm = 1/1000 mm, 1 Nanometer = 1 nm = 1/1000 µm) polyedrische Flächenformen auftreten, welche ikosaedrische Symmetrien sowie Diedersymmetrien mit 8-, 10- oder 12-zähligen Achsen besitzen. Im ersten Fall treten unter anderem als einfache Flächenformen (am häufigsten) Pentagondodekaeder und Rhombentriakontaeder auf und als Kombinationsformen Ikosidodekaeder, Ikosidodekaederstumpf, Dodekaederstumpf sowie ikosaedrische Sternpolyeder (siehe dazu Nissen/Beeli [1990] und Beeli/Nissen [1993]). Interessanterweise hat man bis heute keinen Quasikristall in Ikosaederform gefunden. Als Diederformen treten bisher fast nur Prismen auf.

Es ist eine keineswegs selbstverständliche Tatsache, daß auch bei Quasikristallen das Phänomen der «Verzerrung» beobachtet wird. Dies bedeutet, daß auch hier die Flächenformen nur bis auf Parallelverschiebung der Flächen festgelegt sind und damit die Winkelverhältnisse oder Achsenrichtungen eine bestimmende Rolle spielen.

Von dem Verlust der Gültigkeit der Gitterstrukturhypothese scheint demzufolge auch die sich an phänomenologisch zugänglichen Formen orientierende Kristallmorphologische Hypothese mitbetroffen: Es ist nur in ganz seltenen Fällen gelungen, ebenflächig begrenzte Quasikristalleinheiten mit nichtkristallographischen Symmetrien im Millimeterbereich zu züchten (siehe zum Beispiel bei Dubost et al. [1986]; die Rhomben-30flächner haben etwa 0.5 mm Durchmesser).

Über die genaue dreidimensionale Struktur der aperiodisch angeordneten, geometrisch verschiedenen Bildungseinheiten («tiles») sowie der Elementarteilchen (Atome, Ionen, Moleküle) innerhalb von ikosaedrischen Quasikristallen gibt es unterschiedliche theoretische Modelle, zwischen denen aufgrund des vorliegenden empirischen Materials gegenwärtig keine eindeutige Entscheidung in allen Fällen möglich ist. Die am meisten Erfolg versprechenden Modelle für die Anordnung («Dekorierung») der Elementarteilchen innerhalb der Bildungseinheiten gehen von sogenannten ikosaedrischen *clusters* aus. Dies sind schalenförmige Aggregate von Atomen mit ikosaedrischer Symmetrie. Dies scheint darauf hinzuweisen, daß eine unmittelbare Korrespondenz der morphologischen Symmetrien zu den Symmetrien innerhalb der Gitterstruktur besteht.

Eine zur Gitterstrukturhypothese für Kristalle analoge Gitterstrukturhypothese, die spezifisch auf Quasikristalle zugeschnitten ist, kann zur Zeit nur versuchsweise formuliert werden. Es ist unter anderem auch nicht bekannt, ob Quasikristalle im Prinzip für alle nichtkristallographischen Symmetrien existenzfähig sind oder ob es dabei eine Einschränkung gibt. Es ist deshalb verfrüht, eine allgemeine an der Morphologie von Quasikristallformen orientierte Kristallmorphologische Hypothese aufzustellen. Es steht jedoch fest, daß auch hier die besondere Geometrie mit beschränkter Fernordnung der Atome (etwa vermöge von bestimmten Konfigurationen in der Fernebene des dreidimensionalen euklidischen Raumes) für die jeweiligen Flächenformen eine Rolle spielen.

Literaturhinweise

Abschnitt 7.1: Siehe die Literatur zu Kapitel 3.. Für die Morphologie spezifischer Minerale und Kristallkörper, siehe Offermann [1999].

Zur Röntgenstrukturanalyse siehe etwa Buerger [1977], Vainshtein [1994].

Zur Morphologie der sogenannten *Gleichgewichtsformen* und das Wulff-Theorem siehe Wulff [1901], Liebmann [1914], Laue [1943], Dinghas [1943] sowie Herring [1951] und [1953], Chapter IV. Siehe auch Chernov [1984], Chapter 1.4; Honigmann [1958]; Kern [1987].

Abschnitt 7.2: Coxeter [1981], Kap. 13; Locher [1957], Kap. 21; Locher [1940], Kap. II.8, [1937], Kap. 6; Ziegler [1996].

Abschnitt 7.3: Zur metrischen Geometrie der Gitter siehe Coxeter [1981], Kap. 13; Kleber [1990], §1.9.4; Koch/Wilson [1992]; Quaisser [1994], Kap. II.5; Vainsthein [1994], Ch. 3.5.

Für die Ableitung der 14 Gittertypen nach Bravais, siehe etwa Burckhardt [1966], Miller [1972], Ziegler [1981a]. Andere Ableitungen geben Burzlaff/Zimmermann [1977], [1993] und Delaunay [1933].

Als Einführung in die Theorie der Raumgruppen siehe Hahn [1996]; Hilbert/Cohn-Vossen [1932], Kap. 2; Senechal [1990]. Für mathematisch weiterführende Darstellungen siehe zum Beispiel Belov [1957], Brown et al. [1978], Buerger [1963], Burckhardt [1966], Engel [1986], [1993], Miller [1972], Schönflies [1891], Yale [1968], Ziegler [1981a] sowie die *International Tables for Crystallography* [1995]. Zur Geschichte der Entdeckung der Raumgruppen siehe Lima-de-Faria (ed.) [1990] und Scholz [1989].

Zur Morphologie der Kristallstrukturen, siehe etwa Niggli [1924], [1926] und Wells [1977], [1979], [1984].

Für reguläre Punktsysteme, siehe Engel [1986], Senechal [1986], [1990].

Abschnitt 7.4: Nähere Ausführungen zur Gitterstrukturhypothese als mögliche Interpretation des Kristallographischen Grundgesetzes sowie deren Einbau und Weiterentwicklung im Rahmen der geometrischen Kristallographie oder geometrischen Strukturtheorie auf der Grundlage des Korrespondenzgesetzes findet man in jedem modernen Lehrbuch der Kristallographie, etwa Borchardt-Ott [1997], Buerger [1977], Kleber [1990], Niggli [1941], Rösler [1991]. Für die Geschichte der geometrischen Kristallographie in Zusammenhang mit der Gitterstrukturhypothese siehe Burckhardt [1988], Fabian [1986], Groth [1926], Lima-de-Faria [1990], Scholz [1989].

Zum Verhältnis von Morphologie und Strukturtheorie im Lichte von Wachstumstheorien siehe Hartman [1973], [1979], [1987] und Niggli [1920], [1926], [1953].

Abschnitt 7.6: Adams [1934]; Kötter [1979].

Abschnitt 7.7: Zur *Strukturgenese* siehe Chernov [1984], Bock [1995] und zu ihren Schwierigkeiten und offenen Problemen Lima-de-Faria [1998], Senechal [1986], [1990], § 1.2. Die übliche Argumentationsweise findet sich zusammengefaßt in fast jedem Lehrbuch, etwa in Kleber [1990], Kapitel 1. Zur sogenannten Mikrotopographie von Kristalloberflächen, siehe Sunagawa [1987a], [1987b]. – Für den Mechanismus der Entstehung glatter Kristallflächen wird meist auf Modellvorstellungen von Kossel [1927] und Stranski [1928] über die Kinetik des Kristallwachstums zurückgegriffen (siehe etwa Chernov [1984], Kleber [1990]). – Eine etwas differenziertere physikalische Begründung der durch die Regeln von Donnay-Harker verfeinerten Bravais-Regel liefern P. Hartmann und W. Perdok [1955] mit ihrer PBC-Methode (periodic bond chain method). – Rein mathematische Untersuchungen neueren Datums, die zeigen, wie polyedrische Formen durch Grenzprozesse aus der lokalen Interaktion von Elementarteilchen entstehen können: Untersuchung der dichtesten Packungen von Kugeln, die ihre Mittelpunkte in den Punkten eines Gitters haben: Wills [1996], [1997], [1998]); Modellierung von Kristallwachstum im Rahmen eines Gitters mit zellulären Automaten: Willson [1977].

Abschnitt 7.8: Für Literatur über Quasikristalle vom kristallographischen Gesichtspunkt aus siehe DiVincenzo/Steinhardt (ed.) [1991], Hargittai (ed.) [1990], Janot [1994], Janot/Dubois (ed.) [1988] und die im Text angegebene Literatur, und vom geometrischen Gesichtspunkt aus Senechal [1995]

ANHANG

Literaturverzeichnis

A. Mathematik (Polyedergeometrie, Symmetrietheorie, Projektive Geometrie)

Adam, Paul / Wyss, Arnold [1984]: *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*. Bern und Stuttgart: Verlag Haupt und Freies Geistesleben (2. unveränderte Auflage 1994, erweitert mit Wyss [1986]).

Alexandrow, Alexander D. [1958]: *Konvexe Polyeder*. Berlin: Akademie-Verlag.

Altmann, Simon L. / Herzig, Peter [1994]: *Point-group theory tables*. Oxford: Clarendon.

Aschkinuse, Wladimir G. [1969]: Vielecke und Vielflache. In: Enzyklopädie der Elementarmathematik (P. S. Alexandroff / A. I. Markuschewitsch / A. J. Chintschin [Hrsg.]), Band IV: *Geometrie*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, S. 393–456.

Bachmann, Heinz [1974]: *Vektorgeometrie: Theorie, Aufgaben, Ergebnisse*. Zürich: Sabe (3. Auflage).

Berman, Martin [1971]: Regular-faced convex polyhedra. *Journal of the Franklin Institute*, Band 291, No. 5, S. 329–352.

Bernhard, Arnold [1984]: *Projektive Geometrie aus der Raumanschauung zeichnend entwickelt*. Stuttgart: Freies Geistesleben (Menschenkunde und Erziehung, Band 45).

– [1996]: *Schauendes Geometrisieren*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 1).

Bieberbach, Ludwig [1910]: Über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume I. *Mathematische Annalen*, Band 70, S. 297–336.

– [1912]: Über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume II: Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich. *Mathematische Annalen*, Band 72, S. 400–412.

– [1952]: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Basel: Birkhäuser.

Bigalke, Hans-Günther [1984]: *Kugelgeometrie*. Frankfurt am Main: Salle / Aarau: Sauerländer.

– [1986]: Die flächenäquivalenten Pentagon-Dodekaeder. *Didaktik der Mathematik*, Band 3, S. 204–221.

Böhm, Johannes / Quaisser, Erhard [1991]: *Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Sphäroformen und symmetrische Körper*. Berlin: Akademie Verlag.

Boole Stott, Alicia [1910]: Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam, 1. Sectie, Teil XI, No. 1, S. 3–24.

Burt, Michael [1982]: The wandering vertex method. *Structural Topology*, No. 6, S. 5–12.

Brückner, Max [1900]: *Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte*. Leipzig: Teubner.

Coxeter, Harold S. M. [1955]: *Relle projektive Geometrie der Ebene*. München: Oldenbourg (Mathematische Einzelschriften, Band 3).

– [1965]: *Non-Euclidean Geometry*. Toronto: University of Toronto Press (5. edition).

– [1973]: *Regular Polytopes*. New York: Dover (3. edition).

– [1974]: *Regular Complex Polytopes*. Cambridge: Cambridge University Press (2nd edition 1990).

– [1981]: *Unvergängliche Geometrie*. Basel: Birkhäuser (2. erweiterte und überarbeitete Auflage) (Wissenschaft und Kultur, Band 17).

– [1988]: Regular and Semiregular Polyhedra. In: Senechal/Fleck [1988], S. 67–79.

Coxeter, Harold S. M. / Longuet-Higgins, M. S. / Miller, J. C. P. [1954]: Uniform polyhedra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A: Mathematical and Physical Sciences, Band 246, S. 401–450.

Coxeter, Harold S. M. / Moser William O. J. [1980]: *Generators and Relations for Discrete Groups*. Berlin/Heidelberg: Springer, 4. edition (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 14).

Cromwell, Peter R. [1997]: *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cundy, Henry Martin [1952]: Deltahedra. *The Mathematical Gazette*, Band 36,S. 263–266.

Cundy, Henry Martin / A. P. Rollett [1961]: *Mathematical Models* (Second Edition). London: Oxford University Press (Reprint: Tarquin Publications, Norfolk, England, 1981ff.).

Emde, Helmut [1958]: *Homogene Polytope*. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abhandlungen – Neue Folge, Heft 89.

– [1964]: Zur Struktur des Raumes. In: *Die Erforschung kosmisch-irdischer Gesetzmäßigkeiten*. Dornach: Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum, Bericht von der Mathematisch-Astronomischen Hochschulwoche, Dornach 31. März bis 5. April 1964), S. 10–15.

– [1979]: *Geometrie der Knoten-Stab-Tragwerke*. Würzburg: Strukturforschungszentrum / MERO Raumstruktur.

– [1984]: Zur Geometrie räumlicher Strukturen. In: *Diatomeen I: Schalen in Natur und Technik*, Institut für leichte Flächentragwerke der Universität Stuttgart, IL 28, S. 222–243.

Fejes Tóth, L. [1965]: *Reguläre Figuren*. Leipzig: Teubner.

Field, Judith V. [1997]: Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler. *Archive for History of Exact Sciences*, Band 50, S. 241–289.

Gabriel, Jean François (ed.) [1997]: *Beyond the Cube: The Architecture of Space Frames and Polyhedra*. New York: Wiley.

Gagnon, Sylvain [1982]: Convex Polyhedra with regular faces. *Structural Topology*, No. 6, S. 83–95.

Gerretsen, Johan / Vredenduin, Piet [1967]: Polygone und Polyeder. In: *Grundzüge der Mathematik*, Band II: Geometrie, Teil A: Grundlagen der Geometrie und Elementargeometrie (Göttingen: Vandehoeck & Ruprecht), S. 253–305.

Gévay, Gábor [1992]: Icosahedral Morphology. In: Hargittai (ed.) [1992], S. 177–203.

Grünbaum, Branko [1967]: *Convex Polytopes*. London/New York: Wiley (Pure and Applied Mathematics, Band 16).

– [1977]: Regular polyedra – old and new. *Aequationes Mathematicae*, Band 16, S. 1–20.

Grünbaum, Branko / Shepard, Geoffrey C. [1981]: Patterns on the 2-sphere. *Mathematika*, Band 28, S. 1–35.

– [1988]: Duality of Polyhedra. In: Senechal/Fleck [1988], S. 205–211.

Gschwind, Peter [1986]: *Raum, Zeit, Geschwindigkeit*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 15).

– [1989]: *Methodische Grundlagen zu einer projektiven Quantenphysik*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 6).

– [1991]: *Der lineare Komplex – eine überimaginäre Zahl*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 4).

Hargittai, István [1992]: *Fivefold Symmetry*. Singapore: World Scientific.

Hess, Edmund [1883]: *Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung* (mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder). Leipzig: Teubner.

– [1887]: Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder. Mathematische Annalen, Band 28, S. 167–260.

– [1899]: Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Konfigurationen II: Die Configuration (60_{15}, 72_5) und die ihr zugehörige Gruppe von linearen Transformationen nebst Übertragung auf die Hypersphäre und Anwendung auf die hierdurch bestimmten regelmäßigen Gebilde des vierdimensionalen Raumes. *Nova Acta – Abhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher*, Band 75, S. 273–478.

Hilbert, David / Cohn-Vossen, Stefan [1932]: *Anschauliche Geometrie*. Berlin: Springer (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 37).

Hofmann, Joseph Ehrenfried [1963]: Über Archimedes' halbregelmäßige Körper. *Archiv der Mathematik*, Band 14, S. 212–216.

Huybers, Peter [1997]: The Polyhedral World. In: Gabriel (ed.) [1997], S. 243–279.

Johnson, Norman W. [1966]: Convex polyhedra with regular faces. *Canadian Journal of Mathematics*, Band 18, S. 169–200.

Klein, Felix [1884]: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade*. Leipzig: Teubner.

– [1928]: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Berlin: Springer. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 26).

– [1993]: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade*. Herausgegeben mit einer Einführung und mit Kommentaren von Peter Slodowy. Basel: Birkhäuser / Leipzig: Teubner.

Klix, Wolf-Dieter / Nickel, Heinz [1990]: *Darstellende Geometrie*. Thun: Harri Deutsch.

Knörrer, Horst [1996]: *Geometrie*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Kowol, Gerhard [1995]: *Primzahlen. Ein mathematischer Zugang zu ihren Qualitäten*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 18).

Lalvani, Haresh [1977]: *Transpolyhedra. Dual Transformations by Explosion–Implosion*. New York: Published by Haresh Lalvani.

Lang, Serge [1979]: *Algebraische Strukturen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht (Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, Band 18).

Locher, Louis [1937]: *Urphänomene der Geometrie*. Zürich: Orell Füssli (2. Auflage: Dornach, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum 1980).

– [1940a]: *Projektive Geometrie und die Grundlagen der Euklidischen und Polareuklidischen Geometrie*. Zürich: Orell Füssli (2. Auflage: Dornach, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum 1980).

– [1940b]: Räumliche Gestaltung durch die Vierzahl. *Mathematisch-Astronomische Blätter*, Heft 1, S. 34–40.

– [1952]: Wie viele regelmäßige Polyeder gibt es? *Archiv der Mathematik*, Band 3, S. 193–197.

– [1953]: Bilder zur Geometrie der regelmäßigen Figuren. *Elemente der Mathematik*, Band 8, S. 97–102.

– [1957]: *Raum und Gegenraum*. Dornach, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, 3. Auflage 1988.

Magnus, Wilhelm [1974]: *Noneuclidean Tesselations and Their Groups*. New York: Academic Press (Pure and Applied Mathematics, Band 61).

Martini, Horst [1994a]: A hierarchical classification of Euclidean polytopes with regularity properties. In: Bisztriczky, T. et al. (ed.), *Polytopes: Abstract, Convex and Computational*. Dordrecht: Kluwer 1994 (NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, Band 440), S. 71–96.

– [1994b]: Reguläre Polytope und Verallgemeinerungen. In: *Geometrie und ihre Anwendungen* (Giering, Oswald / Hoschek, Josef, Hrsg.). München/Wien: Hanser, S. 245–281.

McMullen, Peter [1967]: Combinatorially regular polytopes. *Mathematika*, Band 14, S. 142–150.

– [1968]: Affinely and projectively regular polytopes. *Journal of the London Mathematical Society*, Band 43, S. 755–757.

Miller, Willard [1972]: *Symmetry Groups and Their Applications*. New York: Academic Press.

Moise, Edwin Evarist [1977]: *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. New York: Springer (Graduate Texts in Mathematics, Band 47).

Nooshin, Hoshyar et al. [1997]: Computer-aided processing of polyhedric configurations. In: Gabriel (ed.) [1997], S. 343–384.

Nowacki, Werner [1933]: Die nichtkristallographischen Punktgruppen. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 86, S. 19–31.

Ostheimer, Christian / Ziegler, Renatus [1996]: *Skalen und Wegkurven*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 19).

Pugh, Anthony [1976]: *Polyhedra – A Visual Approach*. Los Angeles: University of California Press.

Quaisser, Erhard [1986]: Reguläre Sternpolyeder. In: Gerd Fischer (Hrsg.), *Mathematische Modelle* (2 Bände). Braunschweig: Vieweg, Band 1: S. 63–68, Band 2: Fotos 103–106.

– [1994]: *Diskrete Geometrie. Einführung, Probleme, Übungen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Quaisser, Erhard / Sprengel, Hans-Jürgen [1989]: *Geometrie in Ebene und Raum*. Thun: Harri Deutsch.

Ratcliffe, John G. [1994]: *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. New York / Berlin: Springer (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 149).

Robertson, Stewart A. [1984]: *Polytopes and Symmetry*. Cambridge: Cambridge University Press (London Mathematical Society Lecture Notes Series: 90).

Robertson, Stewart A. / Carter, Sheila / Morton, H. R. [1970]: Finite orthogonal symmetry. *Topology*, Band 9, S. 79–95.

Robertson, Stewart A. / Carter, Sheila [1970]: On the platonic and archimedean solids. *Journal of the London Mathematical Society*, Serie 2, Band 2, S. 125–132.

Roman, Tiberiu [1987]: *Reguläre und halbreguläre Polyeder*. Thun/Frankfurt am Main: Harri Deutsch (Deutsch Taschenbücher, Band 56).

Rosenfeld, Boris [1997]: *Geometry of Lie Groups*. Dordrecht: Kluwer.

Schumann, Heinz [1989]: Deltaeder – ein raumgeometrisches Entdeckungs- und Übungsfeld. *Didaktik der Mathematik*, Band 4, S. 263–295.

Senechal, Marjorie / Fleck, George [1988]: *Shaping Space. A Polyhedral Approach*. Boston: Birkhäuser 1988.

Shubnikov, Aleksej Vasilevich / Koptsik, Vladimir Aleksandrovich [1974]: *Symmetry in Science and Art*. New York/London: Plenum.

Skilling, John [1975]: The complete set of uniform polyhedra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A: Mathematical and Physical Sciences, Band 278, S. 111–135.

– [1976]: Uniform compounds of uniform polyhedra. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Band 79, S. 447–457.

Steinitz, Ernst [1902]: Rezension von Hess [1899]. *Archiv der Mathematik und Physik*, 3. Reihe, Band 3, S. 302–305.

– [1910]: *Konfigurationen der projektiven Geometrie*. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band III.1, Abschnitt AB 5a, S. 481–516. Leipzig: Teubner.

Steinitz, Ernst / Rademacher, Hans [1934]: *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie*. Berlin: Springer (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 41).

Topell, Michael [1991]: Platonische Körper in Antike und Neuzeit. *Der Mathematik-Unterricht*, Band 37, S. 45–79.

Verheyen, Hugo F. [1996]: *Symmetry Orbits*. Boston: Birkhäuser.

Wenninger, Magnus J. [1971]: *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge University Press.

– [1979]: *Spherical Models*. Cambridge: Cambridge University Press.

– [1983]: *Dual Models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weyl, Hermann [1955]: *Symmetrie*. Basel: Birkhäuser.

Wills, Jürg M. [1996]: Lattice packings of spheres and the Wulff-shape. *Mathematika*, Band 43, S. 229–236.

– [1997]: On large lattice packings of spheres. *Geometriae Dedicata*, Band 65, S. 117–126.

– [1998]: Spheres and sausages, crystals and catastrophes – and a joint packing theory. *Mathematical Intelligencer*, Band 20, S. 16–21.

Wyss, Arnold [1986]: *Die Sonderlinge: Die Archimedischen Körper Cubus simus und Dodecaedrum simum*. Bern und Stuttgart: Verlag Haupt und Freies Geistesleben.

Yale, Paul B. [1968]: *Geometry and Symmetry*. San Francisco: Holden Day.

Zalgaller, Viktor A. [1969]: *Convex Polyhedra with Regular Faces*. New York: Consultants Bureau (Seminars in Mathematics, V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad, Band 2).

Ziegler, Renatus [1981a]: *Untersuchungen zur Mathematischen Kristallographie*. Zürich (Diplomarbeit ETH; unveröffentlichtes Typoskript).

– [1981b]: *Synthetische Liniengeometrie*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum (Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 8).

– [1992]: *Mathematik und Geisteswissenschaft*. Dornach: Verlag am Goetheanum.

– [1996]: Skalen und Projektivitäten. In: Ostheimer / Ziegler: *Skalen und Wegkurven*, S. 3–70.

B. Kristallographie (theoretisch, physikalisch, historisch)

Adams, George [1931]: Synthetische Geometrie, Goethesche Metamorphosenlehre und mathematische Physik. In: *MATHESIS, Beiträge zur Weiterbildung der Mathematik und verwandter Gebiete im Sinne der Geisteswissenschaft*. Stuttgart: Orient-Occident-Verlag 1931, S. 119–173.

– [1934]: Die Kristallgestaltung des Raumes. In *Strahlende Weltgestaltung. Synthetische Geometrie in geisteswissenschaftlicher Beleuchtung*. Dornach: Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum. (2. Auflage: Dornach, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum 1965), Kapitel 7, S. 325–386.

– [1957]: Das «reziproke Gitter» und die Röntgenanalyse der Kristalle. *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz*, Nr. 12, S. 4–8. Wiederabgedruckt in: G. Adams, *Universalkräfte in der Mechanik* (Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum 1996; Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge, Band 20), S. 213–224.

Arnoth, Joseph [1997]: *Kristallform – Kristallgestaltung*. Begleittexte zur Sonderausstellung 24. Oktober 1997 – 28. Juni 1998 (Manuskript von Joseph Arnoth mit einem Beitrag von Renatus Ziegler), Naturhistorisches Museum, Basel. (Zweite erweiterte Auflage: 1998.)

Beeli, Conradin / Nissen, Hans-Ude [1993]: Growth morphology of icosahedral Al-Mn-Pd single quasicrystals. *Philosophical Magazine* B, Band 68, S. 487–512.

Belov, Nikolai V. [1957]: A Class-room Method for the Derivation of the 230 Space Groups. *Proceedings of the Leeds Philosophical and Literary Society* (Scientific Section), Band VIII, S. 1–46.

Bock, Hans [1995]: Was kristallisiert wie und warum? Statische Aspekte molekularer Selbstorganisation aus Einkristall-Strukturdaten. *Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Mainz; Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse*, Jahrgang 1995, Nr. 1, S. 1–59.

Boeke, Hendrik Enno [1911]: *Die Anwendung der stereographischen Projektion bei kristallographischen Untersuchungen*. Berlin: Borntraeger.

– [1913]: *Die gnomonische Projektion in ihrer Anwendung auf kristallographische Aufgaben*. Berlin: Borntraeger.

Borchardt-Ott, Walter [1997]: *Kristallographie*. Eine Einführung für Naturwissenschaftler. Berlin/Heidelberg: Springer (fünfte, vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage).

Brown, Harold / Bülow, Rolf / Neubüser, Joachim / Wondratschek, Hans / Zassenhaus, Hans [1978]: *Crystallographic Groups of Four-dimensional Space*. New York: Wiley.

Buerger, Martin J. [1963]: *Elementary Crystallography. An Introduction to the fundamental geometrical features of crystals*. New York: Wiley (2nd revised edition).

– [1977]: *Kristallographie. Eine Einführung in die geometrische und röntgenographische Kristallkunde*. Berlin: de Gruyter.

Bühler, Walter [1996]: Quasi-Kristallbildung macht das Unmögliche möglich. In: *Das Pentagramm und der goldene Schnitt als Schöpfungsprinzip*. Stuttgart: Freies Geistesleben, S. 354–370.

Burckhardt, Johann Jakob [1966]: *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*. Basel: Birkhäuser (2. Auflage).

– [1988]: *Die Symmetrie der Kristalle*. Basel: Birkhäuser.

Burzlaff, Hans / Zimmermann, Helmuth [1977]: *Symmetrielehre* (Kristallographie – Grundlagen und Anwendung, Band 1). Stuttgart: Thieme.

– [1993]: *Kristallsymmetrie – Kristallstruktur*. Erlangen: Rudolf Merkel Universitäts-Buchhandlung.

Chernov, Alexander [1984]: *Modern Crystallography III: Crystal Growth*. Berlin: Springer (Springer Series in Solid-State Sciences, Band 36).

Cohen, Martin L. / Heine, Volker / Phillips, James C. [1982]: Die Quantenmechanik der Festkörper. *Spektrum der Wissenschaft*, August 1982, S. 78–91.

Delaunay [=Delone], Boris N. [1933]: Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie. Erste Abhandlung. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 84, S. 109–149.

Delaunay, Boris / Dolbilin, N. P. / Stogrin, M. I. / Galiulin, R. V. [1976]: A local criterion for regularity of a system of points. *Soviet Mathematics – Doklady* (Translations from Doklady Akaemii Nauk USSR), Band 17, No. 2, S. 319–322.

Dinghas, Alexander [1943]: Über einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 105, S. 304–314.

DiVincenzo, David P. / Steinhardt, Paul J. (ed.) [1991]: *Quasicrystals: The State of the Art*. Singapore: World Scientific.

Joseph D. H. Donnay / David Harker [1937]: A new law of crystal morphology extending the law of Bravais. *The American Mineralogist – Journal of the Mineralogical Society of America*, Band 22, S. 446–467.

Engel, Peter [1986]: *Geometric Crystallography. An Axiomatic Introduction to Crystallography*. Dordrecht: Reidel.

– [1993]: Geometric crystallography. In: Gruber, P. M. / Wills, J. M. (ed.), *Handbook of Convex Geometry*. Amsterdam: North-Holland, Band B, S. 989–1041.

Fabian, Eginhard [1986]: *Die Entdeckung der Kristalle*. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie.

Fischer, Emil [1955]: *Einführung in die geometrische Kristallographie*. Berlin: Akademie-Verlag.

Galiulin, Rawil V. [1980]: Classification of directions in crystallographic point groups according to the symmetry principle. *Acta Crystallographica*, Band A 36, S. 864–869.

Groth, Paul [1926]: *Entwicklungsgeschichte der mineralogischen Wissenschaften*. Berlin: Springer.

Hahn, Theo (ed.) [1996]: *International Tables for Crystallography, Brief Teaching Edition of Volume A: Space-group Symmetry*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (4th revised and enlarged edition).

Hahn, Theo / Klapper, Helmut [1995]: Point groups and crystal classes. In: *International Tables for Crystallography* A [1995], S. 751–792.

Hargittai, István (ed.) [1990]: *Quasicrystals, Networks, and Molecules of Fivefold Symmetry*. New York: VCH Publishers.

Hartman, Piet [1973]: Structure and Morphology. In: P. Hartmann (ed.), *Crystal Growth: An Introduction*. Amsterdam: North-Holland (North-Holland Series in Crystal Growth, Band 1.)

– [1979]: Zum Verständnis des Mineralwachstums. *Fortschritte der Mineralogie*, Band 57, S. 127–171.

– [1987]: Modern PBC Theory. In: Sunagawa (ed.) [1987], S. 271–319.

Hartman, Piet / Perdok W. G. [1955]: On the relations between structure and morphology of crystals I, II, III. *Acta Crystallographica*, Band 8, S. 49–52, 521–524, 525–529.

Haussühl, Siegfried [1993]: *Kristallgeometrie* (Kristallographie, Band I). Weinheim: VCH (2. Auflage).

Herring, Conyers [1951]: Some theorems on the free energies of crystal surfaces. *Physical Review*, Band 82, S. 87–93.

– [1953]: The use of classical macroscopic concepts in surface-energy problems. In: Gomer, Robert / Smith, Cyrill S. (eds.), *Structure and Properties of Solid Surfaces*. Chicago: University of Chicago Press 1953 (second impression: 1955), S. 5–72, discussion 72–81.

Honigmann, B. [1958]: *Gleichgewichts- und Wachstumsformen von Kristallen*. Darmstadt: Steinkopff.

International Tables for Crystallography C [1992]. Volume C: *Mathematical, Physical and Chemical Tables* (ed. A. J. C. Wilson). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

International Tables for Crystallography A [1995]. Volume A: *Space-Group Symmetry* (ed. Theo Hahn). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (4th revised edition).

International Tables for Crystallography B [1996]. Volume B: *Reciprocal Space* (ed. U. Shmueli). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Janot, Christian [1994]: *Quasicrystals. A Primer*. Oxford: Clarendon (second edition).

Janot, Christian / Dubois, J. M. (ed.) [1988]: *Quasicrystalline Materials (Grenoble, 21–25 March 1988)*. Singapore: World Scientific.

Johnsen, A. [1932]: Die Geschichte einer kristall-morphologischen Erkenntnis. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-Mathematische Klasse, Band 26, S.404–415.

Kern, Raymond [1987]: The equilibrium form of a crystal. In: Sunagawa (ed.) [1987], S. 77–206.

Kleber, Will [1990]: *Einführung in die Kristallographie*. Berlin: Verlag Technik (17., stark bearbeitete Auflage von Hans-Joachim Bautsch, Joachim Bohm und Irmgard Kleber).

Koch, E. / Wilson, A. J. C. [1992]: Crystal geometry and symmetry. In: *International Tables for Crystallography* C [1992], S. 1–21.

Kötter, Dieter [1979]: *Die Phänomene der Kristallformen im Lichte der synthetischen projektiven Geometrie*. (Projektarbeit, Naturwissenschaftliches Studienjahr, Dornach 1978/79; unveröffentlichtes Manuskript.)

Kossel, Walther [1927]: Zur Theorie des Kristallwachstums. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1927*, Mathematisch-Physikalische Klasse, S. 135–143.

Laue, Max von [1943]: Der Wulffsche Satz für die Gleichgewichtsform von Kristallen. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 105, S. 124–133.

Liebisch, Theodor [1881]: *Geometrische Krystallographie*. Leipzig: Engelmann.

– [1896]: *Grundriß der physikalischen Krystallographie*. Leipzig: Veit & Co..

– [1906]: Das krystallographische Grundgesetz und seine Anwendung auf die Berechnung und Zeichnung der Krystalle. In: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band V 7: *Krystallographie* (= Band V 1, Heft 3). Leipzig: Teubner, S. 391–437.

Liebmann, Heinrich [1914]: Der Curie-Wulffsche Satz über die Combinationsformen von Krystallen. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 53, S. 171–177.

Lima-de-Faria, Jose (ed.) [1990]: *Historical Atlas of Crystallography*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

– [1998]: Past, present an future of the classification of minerals. In: Bernhard Fritscher / Fergus Henderson (ed.), *Toward a History of Mineralogy, Petrology, and Geochemistry*. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften (Algorismus, Heft 23), S. 17–28.

Niggli, Alfred [1963]: Zur Topologie, Metrik und Symmetrie der einfachen Kristallformen. *Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen*, Band 43, S. 49–58.

Niggli, Paul [1920]: Beziehung zwischen Wachstumsformen und Struktur der Kristalle. *Zeitschrift für anorganische und allgemeine Chemie*, Band 110, S. 55–80.

– [1924]: *Lehrbuch der Mineralogie. Band I: Allgemeine Mineralogie*. Berlin: Borntraeger (2. Auflage).

– [1926]: Baugesetze kristalliner Materie. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 63, S. 49–121.

– [1941]: *Lehrbuch der Mineralogie und Kristallchemie, Teil I*. Berlin: Borntraeger (3. vollständig umgearbeitete Auflage).

– [1949]: *Probleme der Naturwissenschaften erläutert am Begriff der Mineralart*. Basel: Birkhäuser (Wissenschaft und Kultur, Band 5).

– [1953]: *Vom Wachstum der Kristalle*. Neujahrsblatt der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich auf das Jahr 1953, 155. Stück = Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 97, Beiheft Nr. 3.

Nissen, Hans-Ude / Wessicken, R. / Beeli, C. / Csanady, A. [1988]: Al-Mn quasicrystal aggregates with icosahedral morphological symmetry. *Philosophical Magazine* B, Band 57, S. 587–597.

Nissen, Hans-Ude / Beeli, Conradin [1990]: Electron Microscopy of Quasicrystals. *Periodico Mineralogico*, Band 59, S. 31–67.

Nowacki, Werner [1933]: Die nichtkristallographischen Punktgruppen. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 86, S. 19–31.

Offermann, Erich [1999]: *Kristalle und ihre Formenwelt*. Eine leicht verständliche Einführung in die Kristallmorphologie (erscheint 1999).

Raaz, Franz / Tertsch, Hermann [1958]: *Einführung in die geometrische und physikalische Kristallographie und in deren Arbeitsmethoden*. Wien: Springer (3. Auflage).

Rösler, Hans Jürgen [1991]: *Lehrbuch der Mineralogie*. Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie (5. Auflage).

Rykart, Rudolf [1995]: *Quarz-Monographie*. Thun: Ott-Verlag (2. erweiterte Auflage).

Schmutz, Hans-Ulrich [1986]: *Die Tetraederstruktur der Erde. Eine geologisch-geometrische Untersuchung anhand der Plattentektonik*. Stuttgart: Freies Geistesleben.

Schoenflies, Arthur [1891]: *Kristallsysteme und Kristallstruktur*. Leipzig: Teubner 1891.

– [1906]: Symmetrie und Struktur der Krystalle. In: *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band V 7: *Krystallographie* (= Band V 1, Heft 3). Leipzig: Teubner, S. 437–478.

Scholz, Erhard [1989]: Die Symmetriekonzepte der Kristallographie und ihre Beziehungen zur Algebra des 19. Jahrhunderts. In: Scholz, Erhard, *Symmetrie, Gruppe, Dualität*. Basel: Birkhäuser (Science networks historical studies, Band 1).

Senechal, Marjorie [1986]: Geometry and Crystal Symmetry. *Computers and Mathematics with Applications*, Band 12B, S. 565–578 (= Hargittai, Istvan (ed.): *Symmetry – Unifying Human Understanding* (Part I). Oxford: Pergamon Press 1986).

– [1990]: *Crystalline Symmetries – An Informal Mathematical Introduction*. Bristol: Adam Hilger.

– [1995]: *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.

Shmueli, U. [1996]: Reciprocal space in crystallography. In: *International Tables for Crystallography* B [1996], S. 2–9.

Stockmeyer, Ernst A. K. [1931]: Ein Versuch über die Universalkräfte in der Kristallgestaltung. In: *MATHESIS. Beiträge zur Weiterbildung der Mathematik und verwandter Gebiete im Sinne der Geisteswissenschaft*. Stuttgart: Orient-Occident-Verlag 1931, S. 241–260.

Stranski, Iwan [1928]: Zur Theorie des Kristallwachstums. *Zeitschrift für physikalische Chemie*, Band 136, S. 259–278.

Sunagawa, Ichiro [1987a]: Surface Microtopography of Crystal Faces. In: Sunagawa (ed.) [1987], S. 321–365.

– [1987b]: Morphology of Minerals. In: Sunagawa (ed.) [1987], S. 509–587.

Sunagawa, Ichiro (ed.) [1987]: *Morphology of Crystals*. Tokyo: Terra Scientific / Dordrecht: Reidel; Part A: S. 1–365, Part B: S. 367–743.

Tertsch, Hermann [1935]: *Das Kristallzeichnen auf Grundlage der stereographischen Projektion*. Wien: Springer.

– [1938]: Zur Ableitung der Deckachsen-Zähligkeit. *Zeitschrift für Kristallographie*, Band 98, S. 275–278.

– [1954]: *Die stereographische Projektion in der Kristallkunde*. Wiesbaden: Verlag für angewandte Wissenschaften.

Vainshtein, Boris K. [1994]: *Fundamentals of Crystals: Symmetry, and Methods of Structural Crystallography*. (Modern Crystallography, Band 1.) Berlin/Heidelberg: Springer (2. enlarged edition).

Wells, Alexander Frank [1977]: *Three-Dimensional Nets and Polyhedra*. New York: Wiley.

– [1979]: *Further Studies of Three-Dimensional Nets*. Pittsburgh (PA): Polycrystal Book Service.

– [1984]: *Structural Inorganic Chemistry*. Oxford: Clarendon Press 1984 (5th edition).

Wulff, George [1901]: Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsthums und der Auflösung der Krystallflächen. *Zeitschrift für Krystallographie*, Band 34, S. 449–530.

Ziegler, Renatus [1981a]: *Untersuchungen zur Mathematischen Kristallographie*. Zürich (Diplomarbeit ETH; unveröffentlichtes Typoskript).

Nachweis der Abbildungsvorlagen

Figur	*Original*
3.1	Niggli [1949], S. 54: Fig. 1
3.2abc	Niggli [1949], S. 55: Fig. 2abc
3.20	Niggli [1949], S. 56: Fig. 3
3.24	Borchardt-Ott [1997], S. 37: Fig. 5.9
3.25	Borchardt-Ott [1997], S. 37: Fig. 5.10
3.26	Borchardt-Ott [1997], S. 37: Fig. 5.11
4.22	Coxeter [1974], S. 16: Fig. 2.4A
4.23	Coxeter [1974], S. 16: Fig. 2.4A
4.24	Coxeter [1974], S. 16: Fig. 2.4A
4.25ab	Locher [1940b], S. 36: Fig. 1, 2
4.26ab	Locher [1940b], S. 36: Fig. 5, 6
Tabelle 5.1	Verändert nach Rösler [1991], Tafel 1
Tabelle 5.2abc	Verändert nach Rösler [1991], Tafel 2, 3, 4
5.4	Liebisch [1881], Fig. 193–195
5.5	Liebisch [1881], Fig. 209–211
5.6	Liebisch [1881], Fig. 189–191
5.7ab	Liebisch [1881], Fig. 198–200, 214–216
5.8	Liebisch [1881], Fig. 297–299
5.9ab	Liebisch [1881], Fig. 235, 237, 238, 242
5.50ab	Verändert nach Aschkinuse [1969], S. 445, Fig. 54k; S. 449, Fig. 57k
5.51	Cundy/Rollett [1961], S. 90, 92, 94, 96: Fig. 84, 88, 91, 95
6.6	Locher [1940b], S. 36: Fig. 3, 4
6.37ab	Bernhard [1984], S. 113: Fig. 10, 11
6.38	Locher [1953], S. 101: Fig. 4
7.8ab	Niggli [1941], S. 350: Fig. 314
7.9	Verändert nach Raaz/Tertsch [1958], Fig. 186
7.10	Verändert nach Cohen/Heine/Phillips [1982], Bild 10
7.11	Verändert nach Cohen/Heine/Phillips [1982], Bild 11
7.12	Borchardt-Ott [1997], S. 30: Fig. 5.1ab

Für die Abbildungen 3.1, 3.2abc, 3.20, 4.22 bis 4.26 , 5.4 bis 5.9 und 6.6 sowie für die Tabellen 5.1 und 5.2abc hat Severino Dahint (Basel) photographische Vergrößerungen gemacht.

Folgende Abbildungen sind unter Verwendung von Computergraphik mit SHAPE (© Shape Software) hergestellt worden: 5.3ab, 5.10, 5.18, 5.19, 5.27ab, 5.28ab, 5.30ab, 5.31ab, 5.32ab, 5.33ab, 5.34ab, 5.36ab, 5.38, 5.39abc, 5.40ab, 5.45ab, 5.46ab, 5.47ab.

Die übrigen Abbildungen sind vom Verfasser von Hand konstruiert und gezeichnet.

Symbolverzeichnis

Symbole von

Punktgruppen:	Abschnitt 4.3, Tabelle 4.2, S. 58/59
Kristallographische Gruppen:	Abschnitt 4.4, Tabelle 4.4, S. 62/63
Ikosaedergruppen:	Abschnitt 5.4, Tabelle 5.6, S. 107
Diedergruppen:	Abschnitt 5.5, Tabelle 5.12a, S. 119
Projektive Konfigurationen:	Abschnitt 6.6, S. 199–201.

Symbol	***Beispiel***	***Bedeutung***	***Erklärung/ Verwendung auf Seite***
Liebisch [1881]		Hinweis auf Literatur-verzeichnis S. 230–233	4
•	$\mathbf{u} \bullet \mathbf{x}$	Skalarprodukt	17, 24
×	$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	Vektorprodukt	17, 24
×	$\mathbf{O} \times \mathbf{Z}$	direktes Produkt von Gruppen	51ff.
(*hkl*)	(011), (0*kl*)	Flächenindizes, Millersche Indizes, Indizes	20–21, 33–37
[*hkl*]	[111], [*hk*0]	Zonenindizes	21, 33–37
I, II, III, IV, V, VI, VII		Lagetypen der Holoedrie eines Gruppensystems	35–37, 82–84
$^{h}_{2}$, $^{e}_{2}$, $^{p}_{2}$, $^{II}_{2}$ $^{II}_{4}$, $^{II}_{4}$	$VII\,^{h}_{2}$, $VII\,^{e}_{2}$, $VII\,^{p}_{2}$, $VII\,^{II}_{2}$ $VII\,_{4}$, $VII\,^{II}_{4}$	Lagetyp der Hemiedrien und Tetartoedrien der Holoedrie eines Gruppensystems	84, 95
p-q	**4-3**	Symmetrielage zwischen 4- und 3-zähliger Achse	35–37, 82–83
p-q-r	**4-3-2**	Symmetrielage zwischen 4-, 3- und 2-zähliger Achse	35–37, 82–83
/	II / I	Kombinationsart von Polyedern	96, 148
⊕	I ⊕ II ⊕ III	Kombinationsart von Polyedern	96, 148
+	I + II	Kombinationsart von Polyedern	96, 148
P		Platonische Polyeder	95, 158
A		Archimedische Polyeder	95, 158
DA		Dualarchimedische Polyeder	95, 158
N	$3 \cdot \mathbf{N}$	abzählbar unendlich viel	156
$\mathcal{A}_n$, $D\mathcal{A}_n$		*n*-Eck, *n*-Pyramide	121–123
$\mathcal{B}_n$, $D\mathcal{B}_n$		di-*n*-Eck, di-*n*-Seit-Pyramide	121–123
$\mathcal{C}_n$, $D\mathcal{C}_n$		*n*-Prisma, *n*-Dipyramide	121–123
$\mathcal{D}_n$, $D\mathcal{D}_n$		*n*-Antiprisma, *n*-Streptoeder	121–123
$\mathcal{E}_n$, $D\mathcal{E}_n$		schiefes *n*-Antiprisma, *n*-Trapezoeder	121–123
$\mathcal{F}_n$, $D\mathcal{F}_n$		di-*n*-Eck-Prisma, di-*n*-Seit-Dipyramide	121–123
$\mathcal{G}_n$, $D\mathcal{G}_n$		abgeschnittenes *n*-Antiprisma, *n*-Skalenoeder	121–123
/ ‖	$VII\,^{II}_{4}$ / ‖	Parallelschnitt senkrecht auf Hauptachse	124

Verzeichnis der Tabellen

2.1 Duale Gestaltung des Raumes am Beispiel der Vierergebilde ... 9

3.1 Vierflach und Vierkant ... 23
3.2 Die sieben Kristallsysteme: Kristallographische Symmetrieachsenrichtungen und die sieben kristallographischen Koordinatensysteme ... 30
3.3 Kanonisches Koordinatensystem und Symmetrieachsenrichtungen im trigonalen Kristallsystem ... 32
3.4 Flächenlagen der kubischen Kristallfamilie ... 35
3.5 Flächenlagen der hexagonalen Kristallfamilie ... 36
3.6 Flächenlagetypen der sieben Kristallsysteme ... 37

4.1 Gruppentafel aller Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks ... 48
4.2 Punktgruppen: Gruppen von Deckoperationen der Sphäre; abstrakte Gruppen und deren geometrische Realisierungen ... 58/59
4.3 Die 32 kristallographischen Punktgruppen und deren 18 abstrakte Gruppen ... 61
4.4 Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der 32 kristallographischen Punktgruppen ... 62/63
4.5 Untergruppen-Beziehungen der kristallographischen Punktgruppen in einem Kristallsystem ... 65
4.6 Die 7 Kristallsysteme und 2 Kristallfamilien ... 67

5.1 Einfache Flächenformen des kubischen Systems ... 90
5.2a Einfache Flächenformen des tetragonalen Systems ... 91
5.2b Einfache Flächenformen des hexagonalen Systems ... 92
5.2c Einfache Flächenformen des trigonalen Systems ... 93
5.2d Die 9 einfachen Flächen- und Punktformen der 32 kristallographischen Punktgruppen mit irrationalen Indizes ... 94
5.3 Einfache Flächen- und Punktformen des kubischen Kristallsystems ... 98
5.4 Einfache Flächen- und Punktformen der tetragonalen, orthorhombischen, monoklinen und triklinen Kristallsysteme ... 99
5.5a Einfache Flächen- und Punktformen des hexagonalen und trigonalen Kristallsystems ... 100
5.5b Einfache Punktformen des tetragonalen, hexagonalen und trigonalen Kristallsystems bezüglich aller Lagetypen ... 101
5.6 Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems ... 107
5.7 Koordinatenachsen und Symmetrieachsenrichtungen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems ... 109
5.8 Flächenlagen des Ikosaedersystems ... 110
5.9 Einfache Flächen- und Punktformen des Ikosaedersystems und des pentagonalen Systems ... 115
5.10 Klassifizierung der Punktgruppen nach Symmetriegattungen, Symmetriesystemen und Symmetrieklassen ... 116
5.11 Koordinatenachsenrichtungen der Diedersysteme ($n \geq 3$ und $N \geq 1$) ... 118
5.12a Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen der Diedersysteme ($N \geq 1$) ... 119
5.12b Symmetrieoperationen, Symmetrieachsenrichtungen und Symbolik der Gruppen des oktagonalen, dodekagonalen und dekagonalen Diedersystems ... 120
5.13 Flächen- und Punktformen der Diedersysteme ($N \geq 1$) ... 123
5.14 Einfache Flächen- und Punktformen des 4N-gonalen Systems ($N \geq 1$) ... 124
5.15 Einfache Flächen- und Punktformen des (4N+2)-gonalen und des (2N+1)-gonalen Systems ($N \geq 1$) ... 125
5.16 Einfache Formen der Diedersysteme bezüglich aller Lagetypen ($n \geq 3$ und $N \geq 1$) ... 126
5.17 Einfache Flächen- und Punktformen des oktagonalen Systems ... 141
5.18 Einfache Punktformen des oktagonalen Systems bezüglich aller Lagetypen ... 141
5.19a Flächenkombinationen isoedrischer Polyeder ... 149
5.19b Eckenkombinationen isogonaler Polyeder ... 149
5.20 Geometrische Operationen bei den Polyederreihen im Flächen- und Eckenkombinationsdreieck der vollen Oktaedergruppe ... 150
5.21 Geometrische Operationen bei den Polyederreihen im Flächen- und Eckenkombinationsdreieck der vollen Ikosaedergruppe ... 152
5.22 Klassen von isoedrischen und isogonalen Polyedern, welche keine dualarchimedischen bzw. archimedischen Repräsentanten enthalten ... 157
5.23 Klassen von isoedrischen und isogonalen Polyedern, welche dualarchimedische bzw. archimedische Repräsentanten enthalten ... 159
5.24 Die vier regulären Sternkörper ... 162
5.25 Klassen von symmetrischen Polyedern ... 163
5.26 Polyederverbände aus regulären Polyedern ... 164
5.27 Uniforme Polyederverbände ... 164

6.1 Klassifikation von durch Kristallpolyeder induzierten harmonischen Grundfiguren in der Fernebene ... 186
6.2 Aufbau der Reye-Konfiguration ... 200
6.3 Aufbau der Hess-Konfiguration ... 201

7.1 Kristallographische Gesetze ... 205
7.2 Die fünf metrischen Netztypen ... 213
7.3 Komplementarität von Kristallmorphologie und Kristallstrukturtheorie ... 222
7.4 Synthese von Kristallmorphologie und Kristallstrukturtheorie ... 225

Anhang Index der Polyedernamen in Deutsch und Englisch ... 236

Index der Polyedernamen in Deutsch und Englisch

Fette Seitenzahlen verweisen auf Abbildungen, in deren näherer Umgebung sich weitere Erläuterungen zu den entsprechenden Polyedern finden und *kursive* Seitenzahlen auf projektive Darstellungen. Die übrigen Seitenzahlen verweisen meist auf Tabellen und ähnliche Zusammenstellungen.

SYMMETRIE / SYMMETRY	*Name(n) der Flächenformen / names of face forms*		*Seite / page*	*Seite / page*	*Name(n) der Punktformen / name(s) of point forms*	
Kubisch / cubic, octahedral	**ENGLISCH / ENGLISH**	**DEUTSCH / GERMAN**			**DEUTSCH / GERMAN**	**ENGLISCH / ENGLISH**
	hexaoctahedron, hexakisoctahedron	6-Pyramidenoktaeder, Hexakisoktaeder	**90**, **95**, **96**, **97**, 98, **102**, **133**, 150, **151**,159	98, **102**, **133**, 150, **151**,159	Kuboktaederstumpf, abgestumpftes Kuboktaeder	truncated cuboctahedron, great rhombicuboctahedron
	hexakistetrahedron, hexatetrahedron	Hexakistetraeder	**90**, **95**, **97**, 98, **102**, **135**, 157	98, **102**, **135**, 157	Irreguläres abgestumpftes Oktaeder	irregular truncated octahedron
	pentagonicositetrahedron, pentagon-trioctahedron, gyroid	Pentagon-24flächner, Pentagonikositetraeder, Pentagontrioktaeder, Gyroid, Gyroeder	**90**, **95**, 98, **102**, **134**, 158, 159	98, **102**, **134**, 158, 159	Abgeschrägtes Hexaeder, Cubus simus	snub cube, snub cuboctahedron
	didodecahedron, diploid, disdyakisdodecahedron	Disdodekaeder, Dyakisdodekaeder	**90**, **95**, 98, **103**, **136**,157	98, **103**, **136**, 157	Irreguläres Rhombenkuboktaeder	irregular rhombicuboctahedron, rhombitruncated cuboctahedron
	deltoidicositetrahedron, trapezoidicositetrahedron, trapezohedron, tetragontrioctahedron	Deltoid-24flächner, Deltoidikositetraeder, Trapezoeder, Ikositetraeder	**90**, **96**, 98, **103**, **133**, 150, **151**, 159, 161	**88**, 98, **103**, **133**, 150, **151**, 159, **161**, *179*	Rhombenkuboktaeder	rhombicuboctahedron, small rhombicuboctahedron
	trisoctahedron, triakisoctahedron, trigontrioctahedron	3-Pyramidenoktaeder, Trisoktaeder, Triakisoktaeder, Trigontrioktaeder	**90**, 98, **103**, **133**, 150, **151**, 159	98, **103**, **133**, 150, **151**, 159	Hexaederstumpf, abgestumpftes Hexaeder, Würfelstumpf	truncated hexahedron, truncated cube
	tetrahexahedron, tetrakishexahedron	4-Pyramidenhexaeder, Tetrakishexaeder	**90**, 98, **103**, **133**, 150, **151**, 159	98, **103**, **133**, 150, **151**, 159	Oktaederstumpf, abgestumpftes Oktaeder	truncated octahedron
	tristetrahedron, triakistetrahedron, trigontritetrahedron	3-Pyramidentetraeder, Tristetraeder, Triakistetraeder, Trigondodekaeder	**90**, **96**, 98, **104**, **135**, 159	98, **104**, **135**, 159	Tetraederstumpf, abgestumpftes Tetraeder	truncated tetrahedron
	deltoiddodecahedron, deltohedron, tetragontritetrahedron	Deltoiddodekaeder	**90**, 98, **104**, **135**, 157	98, **104**, **135**, 157	Irreguläres Kuboktaeder	(irregular) cuboctahedron
	pentagondodecahedron, dihexahedron, pyritohedron	Irreguläres Pentagondodekaeder, Dihexaeder, Pyritoeder	**90**, **96**, 98, **105**, **136**, 157, **172**	98, **105**, **136**, 157	Irreguläres Ikosaeder	(irregular) icosahedron
	rhombic dodecahedron	Rhomben-12flächner, Rhombendodekaeder	**38**, **39**, **87**, **90**, 98, **105**, **133**, 150, **151**, 158, 159, *177*	**88**, 98, **105**, **133**, 150, **151**, 158, 159	Kuboktaeder	cuboctahedron
	tetrahedral pentagondodecahedron, pentagontritetrahedron, tetardoid	Tetraedrisches Pentagondodekaeder, Tetardoid	**90**, **97**, 98, **104**, **137**, 157	98, **104**, **137**, 159	Abgeschrägtes Tetraeder	snub tetrahedron
	regular octahedron	Oktaeder	**69**, 79, **90**, 98, **105**, **133**, 150, **151**, 158	**68**, **69**, **90**, 98, **105**, **133**, 150, **151**, 158, *176*	Würfel, Hexaeder	cube, regular hexahedron
	cube, regular hexahedron	Würfel, Hexaeder	**68**, **69**, **90**, 98, **105**, **133**, 150, **151**, 158, *176*	**69**, 79, **90**, 98, **105**, **133**, 150, **151**, 158	Oktaeder	regular octahedron
	regular octahedron	Tetraeder	**46**, **47**, **90**, 98, **135**, 158	**46**, **47**, **90**, 98, **135**, 158	Tetraeder	regular tetrahedron

SYMMETRIE / SYMMETRY	*Name(n) der Flächenformen / names of face forms*		*Seite / page*	*Seite / page*	*Name(n) der Punktformen / name(s) of point forms*	
Ikosaeder / icosahedral	**ENGLISCH / ENGLISH**	**DEUTSCH / GERMAN**			**DEUTSCH / GERMAN**	**ENGLISCH / ENGLISH**
	hecatonicosahedron, hexaicosahedron, hexakisicosahedron, disdyakistricontahedron	6-Pyramidenikosaeder, Hekatonikosaeder, Hexakisikosaeder, Dyakishexekontaeder	**111**, **113**, 115, **129**, 152, **153**, 158, 159	**111**, 115, **129**, 152, **153**, 159	Ikosidodekaederstumpf, abgestumpftes Ikosidodekaeder	truncated icosidodecahedron, rhombitruncated icosidodecahedron, great rhombicosidodecahedron
	pentagonhexecontahedron	Pentagon-60flächner, Pentagonhexekontaeder	**111**, **113**, 115, **130**, 158, 159	**111**, 115, **130**, 158, 159	Abgeschrägtes Dodekaeder, Dodecaedron simum	snub dodecahedron, snub icosidodecahedron
	pentakisdodecahedron	5-Pyramidendodekaeder, Pentakisdodekaeder, Dodekakispentaeder	**112**, 115, **129**, 152, **153**, 159	**112**, 115, **129**, 152, **153**, 159	Ikosaederstumpf, abgestumpftes Ikosaeder	truncated icosahedron
	deltoidhexecontahedron, trapezoidhexecontahedron	Deltoid-60flächner, Deltoidhexekontaeder, Hexekontaeder	**112**, 115, **129**, 152, **153**, 159	**112**, 115, **129**, 152, **153**, 159, *194*	Rhombenikosidodekaeder	rhombicosidodecahedron, small rhombicosidodecahedron
	trisicosahedron, triakisicosahedron	3-Pyramidenikosaeder, Ikosakistrieder, Triakisikosaeder, Trisikosaeder	**112**, 115, **129**, 152, **153**, 159	**112**, 115, **129**, 152, **153**, 159	Dodekaederstumpf, abgestumpftes Dodekaeder	truncated dodecahedron
	rhombic triacontahedron	Rhomben-30flächner, Rhombentriakontaeder	**106**, **112**, 115, **129**, 152, **153**, 158, 159, *193*	**106**, **112**, 115, **129**, 152, **153**, 158, 159	Ikosidodekaeder, Triakontagon	icosidodecahedron
	regular icosahedron	Ikosaeder	94, **106**, **113**, 115, **129**, 152, **153**, 158, *189*	94, **106**, **113**, 115, **129**, 152, **153**, 158, *191*, *192*	Pentagondodekaeder	regular dodecahedron
	regular dodecahedron	Pentagondodekaeder	94, **106**, **113**, 115, **129**, 152, **153**, 158, *191*, *192*	94, **106**, **113**, 115, **129**, 152, **153**, 158, *189*	Ikosaeder	regular icosahedron
Dieder / dihedral	*n*-gonal pyramid	offene *n*-Pyramide	**91–93**, 94, 99–101, 121, 123–126, 141, **142–144**	94, 99–101, 121, 123–126, 141, **142–144**	*n*-Eck	regular *n*-gon
	di-*n*-gonal pyramid	offene di-*n*-Seit-Pyramide, Pyramide über ausgeknicktem *n*-Seit	**91–93**, 99–101, 121, **122**, 123–126, 141, **142–144**	99–101, 121, **124**, 124–126, 141, **142–144**, **173**	di-*n*-Eck, abgestumpftes *n*-Eck	truncated *n*-gon
	n-gonal dipyramid	*n*-Dipyramide	**91**, **92**, 94, 99–101, 121, **122**, 123–126, 141, **142–144**, 159, *178*	94, 99–101, 121, **122**, 123–126, 141, **142–144**, 159	*n*-Prisma	right prism, *n*-gonal prism
	di-*n*-gonal dipyramid	di-*n*-Seit-Dipyramide über ausgeknicktem *n*-Seit	**91**, **92**, **96**, 99–101, 121, **122**, 123–126, 141, **142–144**, 157	99–101, 121, **122**, 123–126, 141, **142–144**, 157	di-*n*-Eck-Prisma	right prism based on a truncated *n*-gon
	n-gonal prism	offenes *n*-Prisma	**91**– **93**, 94, 99–101, 121, 123–126, 141, **142–144**	94, 99–101, 121, 123–126, 141, **142–144**	*n*-Eck	regular *n*-gon
	di-*n*-gonal prism	offenes di-*n*-Seit-Prisma über ausgeknicktem *n*-Seit	**91–93**, 99–101, 121, **122** 123–126, 141, **142–144**	99–101, 121, 123–126, 141, **142–144**	di-*n*-Eck, abgestumpftes *n*-Eck	truncated *n*-gon
	n-gonal streptohedron, [*n*-gonal trapezohedron]	*n*-Streptoeder, *n*-Antidipyramide, [*n*-Trapezoeder]	**91**, **93**, 94, 99–101, **114**, 115, 123–126, 141, **142–144**, 159	94, 99–101, **114**, 115, 123–126, 141, **142–144**, 159	*n*-Antiprisma	*n*-gonal antiprism
	n-gonal trapezohedron	*n*-Trapezoeder	**91–93**, **96**, 99–101, **114**, 115, 123–126, 141, **142–144**, 157	99–101, **114**, 115, 123–126, 141, **142–144**, 157	schiefes *n*-Antiprisma	skew *n*-gonal antiprism twisted *n*-gonal antiprism
	n-gonal scalenohedron	*n*-Skalenoeder	**91**, **93**, 99–101, **114**, 115, 123–126, 141, **142–144**, 157	99–101, **114**, 115, 123–126, 141, **142–144**, 157	abgeschnittenes *n*-Antiprisma	antiprism based on a truncated *n*-gon
Reguläre Sternkörper / regular star-polyhedra	small stellated dodecahedron	kleines Fünfstern-Dodekaeder, Zwölfeckiges Sterndodekaeder, Dodekaederstern, kleiner Dodekaederstern, Kepler-Dodekaedersten	**162**, *192*, 201, 202	**162**, 201, 202	Fünfeck-Dodekaederstern, Sterneckiges Dodekaeder, großer Dodekaederstern, großes Dodekaeder, Poinsot-Dodekaederstern,	great dodecahedron
	great stellated dodecahedron	großes Fünfstern-Dodekaeder, Zwanzigeckiges Sterndodekaeder, Ikosaederstern, kleiner Ikosaederstern, großer Dodekaederstern, Kepler-Ikosaederstern	**162**, 201, 202, *203*	**162**, 201, 202	Dreieck-Ikosaederstern, Sterneckiges Ikosaeder, großer Ikosaederstern, großes Ikosaeder, Poinsot-Ikosaederstern	great icosahedron

Sachregister

Fette Seitenzahlen verweisen auf Abbildungen

Abknickung 149, **151**, **153**
Abstumpfung 96, 149, **151**, **153**
Abwicklung **44**
Affine Ebene 14
Affine Geometrie 14
Affine Transformationen 14
Affinität → Affine Transformationen
Ähnlichkeitsäquivalenz 85
Äquivalenz
  Indizesklassen 33
  isoedrische und isogonale Polyeder 86
  Lagetypen 128
Ausknickung 149, **151**, **153**

Bahn → Punktbahn, Ebenenbahn
Basiszentrierte Zellen 214, **215**
Belastungsdichte, Belegungsdichte 214
Beugungsbilder 207
  Symmetrien 207
Bravais-Donnay-Harker-Regel 220
Bravais-Gitter 214, **215**
Bravais-Regel 220
Bündelgeometrie **8**

Charakteristisches Dreieck 72
  → Elementardreieck
Chemie
  Gesetz der konstanten Proportionen 220
  Gesetz der multiplen Proportionen 220
Coxeter-Weyl-Symbole 51–59

Definierende Relationen 49, 61
Dekagonales System 120
Deltaeder **160**
Deltoid 156
Desargues-Konfiguration **8**
Dieder (allgemeiner Zweiflächner) 99
Diedergruppen 51–59, 116–126
  → Flächenformen, Flächenlage, Fundamentaldreieck, Lagetypendreieck, Linearprojektion, Punktformen, Stereographische Projektion, Symmetriegerüst
Disphenoid **91**, 99, 158, 163
Dodekaedergruppe → Ikosaedergruppe
Dodekaederkonfiguration **192**, 200, 201
Dodekagonales Systems 120
Doma → Dieder
Drachenviereck, gleichschenkliges 156
Dreizehngebilde → Harmonische Grundfigur
Duale Polyeder
  projektiv 87, 166
  topologisch (kombinatorisch) 165
Dualformendreieck 154
Dualität
  projektiv 8, 87, 166
  topologisch (kombinatorisch) 165

Ebenenbahn 73, 85, 86
Ebenenlage → Flächenlage
Ebenen-Fundamentalbereich → Fundamentalbereich
Ebenenpolyeder 12
Eckenkombination 147, 148
Eckenkombinationsarten 148
Eckenkombinationspolyeder 147–155, **151**, **153**, 160
Eckenkombinationsreihendreieck **151**, **153**, 154
Eckenstern 165
Einheitszelle eines Möbiusnetzes oder -gitters → Elementarzelle
Elementarbereich 74
Elementardreieck 74, 77
Elementartetraeder 20, 29, 33
Elementarzelle
  Möbiusnetz **10**
  Möbiusgitter 208–211, **209**
  → Gitter, Netz
Eigensymmetrie 85
Elliptische Geometrie 15
Enantiomorphe Gruppen 60
Enantiomorphe Polyeder 158, 163
Erzeugendensystem 49, 61
Erzeugung eines Polyeders durch Symmetriegruppen 85, 86
Euklidische Geometrie 7, 15
Euklidischer Raum 7, 15
Euklidische Transformationen 15

Fahne 166
Fahnenregulär 166
Fernelemente
  Fernpunkt, Ferngerade, Fernebene 6, 7, 14, 15
Flächenbahn → Ebenenbahn
Flächenform
  dual 87
  einfach und zweifach variabel 86
  einfache 86
  invariabel 86
  Linearprojektion 175–180
  offen 86
Flächenformen
  Kubisches System **90**, 98, **102–105**
  Tetragonales System **91**, 99, 101
  Orthorhombisches System 99
  Monoklines und triklines System 99
  Hexagonales System **92**, 100, 101
  Trigonales System **93**, 100, 101
  Ikosaedersystem **111–113**, 115
  Pentagonales System **114**, 115
  Diedersysteme 121–126, **122**, 140–146
Flächenindizes **20**, 21, **22**
Flächenkombination 88, 89, 96, 147
Flächenkombinationsarten 96
Flächenkombinationspolyeder 88, 89, 96, 147–155, **151**, **153**, 160
Flächenkombinationsreihendreieck 148, **151**, **153**
Flächenlage 18
  Äquivalenz 33
  Kubische Familie **34**, **35**, 37
  Hexagonale Familie **36**, 37
  Ikosaedersystem 110, **111**
  Linearprojektion, projektive Darstellung 169, 170, 180–184
    Kubisches System 180, **181**
    Tetragonales System **183**, 184
    Orthorhombisches System **183**, 184
    Monoklines, triklines System 184
    Hexagonales System **182**
    Trigonales System 184
    Ikosaedersystem **195–197**
    Pentagonales System **197**, **198**
    Dekagonales System **198**
    Diedersysteme **197**, **198**
Flächenlagetyp 33, 34–37, 84, 111
Flächennormalenbündel **40**
Flächenpol 41, 169, 170
  projektiv 170, 171
Flächenpolverbandsgesetz
  projektiv 170
Flächenstellung 18
Flächenstern 165
Flächenzentrierte Zellen 214, **215**
Form → Flächenform, Punktform
Friedel-Klassen 186, 207
Fundamentalbereich 73, 81
Fundamentaldreieck 73, 81, 169
  Volle Oktaedergruppe **69**, **76**, **79**, **81**
  Volle Tetraedergruppe **75**, **78**
  Tetragonale Holoedrie **71**, **81**
  Orthorhombische Holoedrie **72**, **82**
  Hexagonale Holoedrie **69**, **82**
  Trigonale Holoedrie **69**, **82**
  Volle Ikosaedergruppe **76**, **109**
  Pentagonale Holoedrie **109**
  Holoedrien der Diedersysteme **117**
  Holoedrie des oktagonalen Systems **140**

Genetische Interpretation 226, 227
Genetische Synthese 225, 227
Gesetz der kleinen ganzzahligen Flächenindizes
  projektiv 2, 21, 24, 205, 221, 222
  metrisch 23, 205, 206
Gesetz der kleinen ganzzahligen Zonenindizes 21
Gesetz der Komplikation 24
Gesetz der rationalen Konstruierbarkeit von Kristallflächenpolen (Flächenlagen) 171
Gesetz der rationalen Konstruierbarkeit von Kristallpolyedern 171, 206
Gesetz der sieben Kristallachsensysteme 29, 205
Gesetz der Winkelkonstanz 19, 20, 24
Gitter
  affin **211**, 212
  Basiszentrierte Zellen 214, **215**
  Einheitszelle → Elementarzelle
  Elementarzelle 208, **210**, **214**
  Flächenzentrierte Zellen 214, **215**
  Indizes 212

Innenzentrierte Zellen 214, **215**
mehrfach → Gitterkomplex
metrisch 213–217, **215**
Mittelebene 208
Netzebenen 212
Belastungs- , Belegungsdichte 214
primitive Zelle 214, **215**
projektiv 208–211, **209**
Translationsgruppe 212
zusammengesetzt → Gitterkomplex
Gitterebene → Netzebene
Gittergruppe 216
Gitterkomplex 212, 216, **217**, **218**, 219
Gitterkonstanten 223
Gitterstrukturhypothese 2, 3, 219–227
Gnomonische Projektion **43**
Gruppe 48
abelsch 49
abstrakt 49
diskret 50, 52
definierende Relationen 49, 61
Erzeugendensystem 49, 61
enantiomorph 60
endlich 49
Index der Untergruppe 50
isomorph 49
kommutativ → abelsch
Modell 49
Ordnung 49
Periode 49
Untergruppe 50
zyklisch 49
Gruppe von Symmetrieoperationen 47
Gruppentafel 48, 49

Habitus 89
Halbformen → Hemieder
Harmonische Grundfigur **9**, **23**, **169**, **170**, 171, **184**
Hebung 149, **151**, **153**
Hemieder **95**– **97**
Hemiedrie 65
hemimorph 65, 71, 97
enantiomorph 65, 71, 97
paramorph 65, 71, 97
II. Art 65, 71
Hemigon 124
Hermann-Mauguin-Symbole 66
Hess-Konfiguration 201, **202**
Hexaederfünfling 164
Hexaedergruppe → Oktaedergruppe
Hexaederkonfiguration 200
Hexagonales System → Kristallsysteme
Holoeder 96, 97
Holoedrie 60, 65, 216
Hologon 124
Hüllbereich 11

Idealform, Idealgestalt 1, 25, 89, 204
Ikosaedergruppe 33, 54, 57, 59, 106, 107
→ Flächenformen, Flächenlage, Fundamentaldreieck, Lagetypendreieck, Linearprojektion, Punktformen, Stereographische Projektion, Symmetriegerüst
Ikosaederkonfiguration 200–202, **203**
Index einer Untergruppe 50
Index, Indizes → Flächenindizes, Zonenindizes
Indizesklassen 33
Inkugel 87, 156
Innenzentrierte Zellen 214, **215**
Internationale Symbole 66
Inversion 46, 47, 174, 186, 207
Involution, involutorisch 13
Inzidenz 6

Kegelgruppen 51, 52
Kernbereich 11
Knickung 148, 149, **151**, **153**
Kollineation 13
Kombination → Flächenkombination, Eckenkombination
Kombinationsarten 96, 148
Kombinationspolyeder → Ecken-, Flächenkombinationspolyeder
Kombinationspolyeder, reine 155, 160, 163
Kombinationsreihendreieck **151**, **153**, 154
Komplementarität von Morphologie und Struktur 4, 204, 224, 225
Konfigurationen, projektive 199–203
im Bündel 199
in Ebene 199
im Raum 199
regulär 199
selbstdual, selbstpolar 199
Konkav 11
Konkaver Kern 13
Konstruktionen ersten Grades → Rationale Konstruktionen
Konvex 11
Konvexe Hülle 13, 85
Konvexer Kern 13, 85
Koordinatentetraeder **20**, 29, 33
Koordinatenzellen 29, **31**, **32**, 226
Korrelate Formen 97
Korrelation 13
Korrespondenzgesetz **219**, 220–227
Kreisgruppen 59
Kristall 1
Anisotropie 1
Diskontinuum 2
Homogenität 1
Idealformen 1
Kontinuum 2
Kristallbildung → Kristallgenese
Kristallfamilie 29, 67
Kristallflächengesetz 220–222, 224, 225
Kristallform, einfache 28, 89–105
→ Flächenformen
Kristallformengesetz 4, 89, 205, 206, 221–224
Kristallformungsprinzip 224, 225
Kristallgenese 225–227
Kristallgenetisches Prinzip 225, 227
Kristallindividuum 1
Kristallkörper 1
Kristallklassengesetz 27, 205
Kristallmorphologie 2
allgemein 1, 204
geometrisch 2, 204
Kristallmorphologische Hypothese 3, 4, 206, 221–227
Kristallographische Blickrichtungen 63
→ Symmetrieachsenrichtungen
Kristallographische Einschränkung 26, 27, 173, 205
Kristallographisches Grundgesetz 2, 3, 24, 28, 205, 206, 220
Kristallographische Punktgruppen 50, 60–67, 216
Untergruppenbeziehungen 60, 64, 65
Kristallographische Raumgruppen 216
enantiomorph 216
isomorph 216
symmorph 216
Kristallpolyeder 1, 18
Kristallstruktur 217
Kristallstrukturtheorie 2, 217, 219–227
Kristallsymmetriegesetz 25, 28, 205, 206, 224–227
Kristallsysteme 1, 19, 29–37, 60–69
→ Flächenformen, Flächenlage, Fundamentaldreieck, Lagetypendreieck, Linearprojektion, Punktformen, Stereographische Projektion, Symmetriegerüst
Kubisches System 30, 31, 34, 35, 37, 60–69
Tetragonales System 30, 31, 37, 60–67, 71
Orthorhombisches System 30, 31, 37, 60–67, 72
Monoklines und triklines System 30, 31, 37, 60–67, 73
Hexagonales System 30, 31, 36, 37, 60–67, 70
Trigonales System 30–32, 36, 37, 60–67, 70
Projektive Charakterisierung 185–187
Einteilungen 187
Kubische Gruppe → Oktaedergruppe
Kugel → Sphäre
Kugelgruppe 52, 57, 59
Kugelgruppen 52
Kugelkreis 15

Lagetyp 34–37, 83, 84, 110, 127–146
Äquivalenz 128
Lagetypendreieck 84, 127–146
Volle Oktaedergruppe 83, 131, **132**–**133**, **138**
Untergruppen der vollen Oktaedergruppe 131, **132**, **133**–**137**, **138**
Tetragonales System 83, **101**
Orthorhombisches System 83
Hexagonales System 83, **101**
Trigonales System **83**, **101**
Ikosaedersystem **109**, 110, 111, **128**–**130**, **138**
Pentagonales System **109**

Diedersysteme **126**, **145–146**
Oktagonales System **140**, 141, **142–145**
Laue-Klassen 186, 207
Lineare Konstruktionen → Rationale Konstruktionen
Linearprojektion des Symmetriegerüstes 22, 44, 169, 174–184, 188–198
Volle Oktaedergruppe **174**, **175**, 180, **181**
Tetragonale Holoedrie **183**, **184**
Orthorhombische Holoedrie **183**, 184
Monokline, trikline Holoedrie 184
Hexagonale Holoedrie **182**
Trigonale Holoedrie 184
Volle Ikosaedergruppe **188**, **190**
Pentagonale Holoedrie **197**, **198**
Dekagonale Holoedrie **198**
Holoedrien der Diedersysteme 197
Linearprojektionen von Polyedern 170, 175, **176–179**, 180, 190, **191–194**

Millersche Indizes → Flächenindizes
Möbiusblüte, Möbiusbündel **10**, **23**
Möbiusgitter 208–211, **209**
Möbiusnetz **10**, 22, **23**, **208**, 209–211
Modell einer Gruppe 49
Monoeder (Einflächner) 99
Monoklines System → Kristallsysteme
Morphogenese 226, 227
Morphgenetisches Prinzip der Kristallbildung 225, 227
Morphologie → Kristallmorphologie

Netz
projektiv → Möbiusnetz
affin **211**, 212
metrisch **213**
Netzebenen 212
Belastungsdichte, Belegungsdichte **214**
Elementarzellen 211–213
Abstände 214

Oktaederfünfling 164
Oktaedergruppe 53, 54, 57, 59, 78, 79
→ Flächenformen, Flächenlage, Fundamentaldreieck, Lagetypendreieck, Linearprojektion, Punktformen, Stereographische Projektion, Symmetriegerüst
Oktaederkonfiguration 200
Oktagonales System 120, 140–145
Orthogonale Gruppe 59
Orthorhombisches System → Kristallsysteme

Parallelität 6, 7, 11–15
Paralleloeder (paralleler Zweiflächner) 99, 124
Parallelprojektion
schief **38**, 39
orthogonal **39**
PBC-Methode 222
Pedion → Monoeder
Pentagonales System 106–109
Periode einer Gruppe 47
Pinakoid → Paralleloeder
Pol 41
Polare Achse 60, 65
Polare Polyeder 87, 166
Polarfigur **40**
Polarität 13, 87
Polarität am Kreis 13, **14**
Polarität an der Sphäre 14, 15, 87
Polfigur 41, **42**
Polkugel 41, **42**
Polyeder 1, 85
Abknickung 149, **151**, **153**
Abstumpfung 96, 149, **151**, **153**
Abwicklung **44**
Äquivalent
affin 166
ähnlich 85
projektiv 166
topologisch (kombinatorisch) 165
Ausknickung 149, **151**, **153**
Darstellungen
eben und zentrisch 38–45
Gnomonische Projektion **43**, **174**
projektiv (Linearprojektionen) 169, 170, 175, **176–179**, 180, 190, **191–194**
Schlegeldiagramm **39**
Stereographische Projektion **41**, **42**
Dual
projektiv 87, 166
topologisch (kombinatorisch) 165
Eigensymmetrie 85
Erzeugende Symmetrie 85
geschlossen 85
Hebung 149, **151**, **153**
Inkugel 87
isomorph (topologisch) 165
Knickung 148, 149, **151**, **153**
konvex 85
Lage
oben/unten 97
positiv/negativ 97
rechts/links 97
ohne Selbstdurchdringung 85
polar 87, 166
symmetrisch 85, 163
Umkugel 87
Polyederklassen
(für Abbildungen von Repräsentanten für einzelne Polyederklassen, siehe die Tabelle *Index der Polyedernamen* im Anhang)
archimedisch 157, 158, 163
catalanisch → dualarchimedisch
dachregulär 164
dualarchimedisch 157, 158, 163
dualhalbregulär
metrisch (euklidisch) → dualarchimedisch
topologisch (kombinatorisch) 165
eckenäquivalent → isogonal
eckenregulär 160, 163
eckentransitiv → isogonal
eckenuniform → uniform
enantiomorph 158, 163
fahnenregulär 166
flächenäquivalent → isoedrisch
flächenregulär 160, 163
flächentransitiv → isoedrisch
flächenuniform 161, 163
gleicheckig → isogonal
gleichflächig → isoedrisch
halbregulär
metrisch (euklidisch) → archimedisch
topologisch (kombinatorisch) 165
halbsymmetrisch → quasiregulär
isoedrisch
metrisch (euklidisch) 86, 156, 163
affin 167
projektiv 167
isogonal
metrisch (euklidisch) 86, 156, 163
affin 167
projektiv 167
isotoxal → quasiregulär
kantenäquivalent → quasiregulär
kantenregulär → quasiregulär
platonisch → regulär
pseudoregulär 160, 163
quasiregulär 158, 163
regulär
metrisch (euklidisch) 158, 162, 163
affin 166
projektiv 166
topologisch (kombinatorisch) 165
regulärflächig → flächenregulär
semiregulär → uniform
sternförmig 162
totalsymmetrisch → totaltransitiv
totaltransitiv 164
uniform 157, 161, 163
Polyedermannigfaltigkeiten
null-, ein- und zweidimensional 127
Polyederverband 85, 88, 164
dachregulär 164
eckenregulär 164
flächenregulär 164
halbregulär 164
regulär 164
totaltransitiv 164
uniform 164
Polygon 85, 121
eben 85, 121
geschlossen 85, 121
konvex 85, 121
ohne Selbstdurchdringung 85, 121
Projektive Bündelkoordinaten 16, 17
Projektive Darstellung → Linearprojektion
Projektive Geometrie 3, 4, 6–17
Projektive Koordinaten 16
Projektiver Raum 3, 4, 6–17
Projektives Zonenverbandsgesetz 23, 205

Pseudorhombenkuboktaeder 160, **161**
Dualform 160, **161**
Punktbahn 73, 85, 86
Punktform
dual 87
eben 86
einfach 86
einfach und zweifach variabel 86
invariabel 86
Punktformen
Kubisches System 98, **102–105**
Tetragonales System 99, 101
Orthorhombisches System 99
Monoklines und triklines System 99
Hexagonales System 100, 101
Trigonales System 100, 101
Ikosaedersystem **111–113**, 115
Pentagonales System **114**, 115
oktagonales System 140, 141, **143**, **144**
Diedersysteme 121–126, **122**, 140–146
Punkt-Fundamentalbereich → Fundamentalbereich
Punktgruppen 51–57
Punktgruppenpolyeder 86
Punktlage 84, 86
projektive Darstellung → Flächenlage
Punktlagetyp 84
Punktpolyeder 12
Pyritoedergruppe 54, 57, 59, 62, 79

Quasikristalle 228

Rationale Konstruktionen 170–173, 206
Raumgruppe → Kristallographische Raumgruppe
Raute 156
Rechtwinkelinvolution 13, 185
Rechtwinkelpolarität 13, 185
Reguläre Punktsysteme 218
Reye-Konfiguration **200**, 201
Rhombus 156
Röntgenbeugungsbilder → Beugungsbilder

Satz von Desargues **8**
Schiefes Dreieck 156
Schiefes *n*-Eck 156
Schlegeldiagramm **39**
Schönflies-Symbole 60
Segment 7
Sphäre
Deckoperationen 51–59
Polarität 14, 15, 87
Sphärische Geometrie 15
Sphenoid → Dieder
Spiegelung an Ebene 47
Spiegelung an Punkt → Inversion
Spiegelungsgruppen 74–77
Stella octangula → Tetraederzwilling
Stellung 18
Stereographische Projektion **41**, **42**
Stereographische Projektion des Symmetriegerüstes
Volle Oktaedergruppe **69**
Volle Tetraedergruppe **47**
Tetragonale Holoedrie **71**
Orthorhombische Holoedrie **72**
Hexagonale Holoedrie **70**
Trigonale Holoedrie **70**
Volle Ikosaedergruppe **108**
Holoedrien der Diedersysteme **117**
Stern → Eckenstern, Flächenstern
Sternkörper **162**
Sternpolyeder **162**
Struktur, Strukturtheorie → Kristallstrukturtheorie
Strukturgenese 225, 227
Strukturgenetisches Prinzip der Kristallbildung 225–227
Symmetrieachsen 25–27, 29–31, 46, 47
Zähligkeit 47
→ Symmetriegerüst
Symmetrieachsenrichtungen 29, 30, 107
Kristallsysteme 29, 30, 62, 63
Ikosaedersystem 107
Pentagonales System 107
oktagonales System 120
Dekagonales System 120
Dodekagonales System 120
Diedersysteme 119
Äquivalenz 63
Symmetrieäquivalenz
Flächenlagen 33
Flächen und Ecken eines Polyeders 86
Symmetrieelemente 47
Symmetriegattung 116
Symmetriegerüst 25, 28, 47, 68–73
→ Linearprojektion, Stereographische Projektion
Volle Oktaedergruppe **68**
Volle Tetraedergruppe **46**
Tetragonale Holoedrie **71**
Orthorhombische Holoedrie **72**
Monokline Holoedrie **73**
Hexagonale Holoedrie **70**
Trigonale Holoedrie **70**
Volle Ikosaedergruppe **106**
Pentagonale Holoedrie **54**
Holoedrien der Diedersysteme **117**
Symmetrielage 34–37, 82, 83
Symmetrieoperationen 46–59
diskret 46
kontinuierlich 46
Synthese von Morphologie und Strukturtheorie 222–227

Tangentialdarstellung 24, 204
Tangentialpolyeder 24, 46, 89, 204
Tetartoeder 97
Tetartoedrie 65, 71, 97
II. Art 65, 71
Tetartogon 124
Tetraederfünfling 164
Tetraedergruppe 53, 54, 56, 57, 59, 62, 78, 79
Tetraederzehnling 164
Tetraederzwilling (stella octangula) 164
Tetragonales System → Kristallsysteme
Totalsymmetrisch → totaltransitiv
Totaltransitiv 164
Tracht 89
Transformation 13–15
Transformationsgruppen 72
transitiv 86
Transitiv 86
Transitive Geradenmenge 183
Translationsgruppen 212, 216
Trapez, gleichschenkliges 156
Trigonales System → Kristallsysteme
Triklines System → Kristallsysteme

Umkugel 87, 156
Untergruppe 50
Index 50

Vektorgeometrische Deutung
projektive Bündelkoordinaten 16, 17
Flächen- und Zonenindizes 24
Verzerrung **18**, 25, 89, 224
Vierflach, Vierkant 9, **22**, **23**, 199
Viertelflächner, Viertelsform → Tetartoeder
Vollformen → Holoeder
Vollständiges Dodekaeder/Ikosaeder 201, **202**
Vollständiges Hexaeder/Oktaeder **200**, 201
Vollständiges Viereck/Vierseit **9**, 199
Vollständiges Vierflach/Vierkant **9**, **10**, **23**, 199

Weyl-Coxeter-Symbolik 51–59
Winkelkonstanz → Gesetz der Winkelkonstanz
Würfelgruppe → Oktaedergruppe
Würfelkonfiguration → Hexaederkonfiguration

Zähligkeit 47
Zentralperspektive **38**
Zentralprojektion **39**
Zentrische Flächendarstellung 39, **40**
Zentrische Zonenachsendarstellung 39, **40**
Zentrische Flächennormalendarstellung **40**
Zone **21**
Zonenachse **21**
Zonenfläche 40
Zonenflächenbündel 40
Zonengleichung 24
Zonenindizes 21
Zonenkreis 41
Zonenrichtung **21**
Zonenverband **21**, 28
Zonenverbandsgesetz 3, 22, 23, 25, 170, 205, 206
metrisch 33, 205, 206
Zwischen 7
Zyklus 185
Zylindergruppen 51, 52

MATHEMATISCH-ASTRONOMISCHE BLÄTTER
NEUE FOLGE

1 ARNOLD BERNHARD. ***Schauendes Geometrisieren***. Vom Würfel über den projektiven zum hyperbolischen und elliptischen Raum. (2. überarbeitete und erweiterte Auflage) 1996.

2 WIM VIERSEN. ***Konstellationen in Bewegung***. Eine neue Phänomenologie von Opposition und Konjunktion. 1976 (vergriffen).

3 GEORG UNGER. ***Kontemplatives Mathematisieren***. Geometrische Verwandlungen. 1988.

4 PETER GSCHWIND. ***Der lineare Komplex – eine überimaginäre Zahl***. (2. umgearbeitete und erweiterte Auflage) 1991.

5 HEINRICH ECKINGER / GEORG UNGER. ***Das Maß der Erde in der babylonischen Kultur***. 1979.

6 PETER GSCHWIND. ***Methodische Grundlagen zu einer projektiven Quantenphysik***. Goetheanismus, synthetische Geometrie und Quantenphysik. (2. Auflage) 1989.

7 JOHN MEEKS. ***Planetensphären***. Versuch eines Ansatzes goetheanistischer Himmelskunde. (2. Auflage) 1990.

8 RENATUS ZIEGLER. ***Synthetische Liniengeometrie***. 1981.

9 CHARLOTTE FRITZSCH. ***Tropfenbilder***. Eine Betrachtungsübung. 1982 (vergriffen).

10 RUDOLF STEINER. ***Texte zur Relativitätstheorie***. 1982 (vergriffen; alle Texte enthalten in Rudolf Steiner, *Die vierte Dimension*, Dornach: Rudolf Steiner Verlag 1995, GA 324a).

11 LOTTE VOLKMER. ***Zahlenphänomene***. 1983.

12 JOACHIM SCHULTZ. ***Tierkreisbilder und Planetenlicht***. Versuche zum Studium ihrer Wirkungen auf das Pflanzenwachstum. 1986 (vergriffen).

13 ANGELO ROVIDA. ***Übungen zur synthetischen projektiven Geometrie***. 1988.

14 GEORGE ADAMS. ***Lemniskatische Regelflächen***. Eine anschauliche Einführung in die Liniengeometrie und Imaginärtheorie. 1989.

15 PETER GSCHWIND. ***Raum, Zeit, Geschwindigkeit***. 1986.

16 STEPHAN BAUMGARTNER. ***Hauschkas Wägeversuche***. Gewichtsvariationen keimender Pflanzen im geschlossenen System. 1992.

17 HANNS-JÖRG STOSS. ***Treffgeraden und Nullinvarianz***. Beiträge zur Liniengeometrie. 1995.

18 GERHARD KOWOL. ***Primzahlen***. Ein mathematischer Zugang zu ihren Qualitäten. 1995.

19 CHRISTIAN OSTHEIMER / RENATUS ZIEGLER. ***Skalen und Wegkurven***. Einführung in die Geometrie von Wegkurven und Wegflächen. 1996.

20 GEORGE ADAMS. ***Universalkräfte in der Mechanik***. Perspektiven einer anthroposophisch erweiterten mathematischen Physik. 1996.

21 RENATUS ZIEGLER. ***Morphologie von Kristallformen und symmetrischen Polyedern***. Kristall- und Polyedergeometrie im Lichte von Symmetrielehre und projektiver Geometrie. 1998.