RENATUS ZIEGLER

DIE GESCHICHTE DER GEOMETRISCHEN MECHANIK IM 19. JAHRHUNDERT

STEINER

RENATUS ZIEGLER

DIE GESCHICHTE DER GEOMETRISCHEN MECHANIK IM 19. JAHRHUNDERT

BOETHIUS

TEXTE UND ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

BEGRÜNDET VON JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN
FRIEDRICH KLEMM UND BERNHARD STICKER

HERAUSGEGEBEN VON MENSO FOLKERTS

BAND XIII

FRANZ STEINER VERLAG WIESBADEN GMBH
STUTTGART 1985

RENATUS ZIEGLER

DIE GESCHICHTE DER GEOMETRISCHEN MECHANIK IM 19. JAHRHUNDERT

EINE HISTORISCH-SYSTEMATISCHE UNTERSUCHUNG
VON MÖBIUS UND PLÜCKER
BIS ZU KLEIN UND LINDEMANN

FRANZ STEINER VERLAG WIESBADEN GMBH
STUTTGART 1985

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation im Fachbereich Physik der Gesamthochschule Kassel, Universität des Landes Hessen, angenommen.
Tag der Promotion: 14. Juni 1985.

Gutachter Prof. Dr. Ludolf von Mackensen, Kassel
Prof. Dr. Oswald Giering, München
Prof. Dr. Burkhard Fricke, Kassel

Gedruckt mit Unterstützung des Vereins für Mathematisch-Physikalische Forschung, Dornach (Schweiz).

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Ziegler, Renatus:
Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert : e. histor.-systemat. Unters. von Möbius u. Plücker bis zu Klein u. Lindemann / Renatus Ziegler. – Stuttgart : Steiner-Verlag-Wiesbaden-GmbH, 1985.
(Boethius ; Bd. 13)
ISBN 3-515-04544-9
NE: GT

Alle Rechte vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, das Werk oder einzelne Teile daraus nachzudrucken oder auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie usw.) zu vervielfältigen. © 1985 by Franz Steiner Verlag Wiesbaden GmbH, Sitz Stuttgart.
Printed in Germany

GELEITWORT

Man könnte es für gewagt halten, wenn eine Untersuchung der Wissenschaftsgeschichte mit einem Oberbegriff arbeitet, nämlich dem der geometrischen Mechanik, der als solcher in dem betrachteten Zeitraum und auch nach dem Ausklingen der Arbeiten auf diesem Gebiet Anfang des 20. Jahrhunderts in der Literatur nicht vorkommt. Das vorliegende Werk rechtfertigt aber voll und ganz diese dennoch zutreffende Bezeichnung, indem es unter ihr ein innerlich zusammenhängendes Gebiet der Geometriegeschichte sowie der Physikgeschichte in klarer Gliederung erstmals in seinen inhaltlichen Verzweigungen und seiner zeitlichen Folge geschlossen darstellt, und zwar im europäischen Rahmen.

Der deutsche Geometer in Zürich, W. Fiedler, sprach bereits 1876 von Geomechanik, mit der er allerdings nur die Schraubentheorie mit euklidischer Kinematik bezeichnete, ohne die projektive Liniengeometrie einzubeziehen. Dieser zusätzliche Einbezug findet sich in der vorliegenden Arbeit. Sie geht aus von einer eingehenden Aufnahme und Analyse der Arbeiten von Poinsot, Möbius und Plücker, deren Veröffentlichungen in eine heute noch verständliche mathematische Schreibweise „übersetzt" werden. Diese Arbeit wäre dem Autor wohl kaum möglich gewesen, hätte er nicht schon 1981 ein Buch „Synthetische Liniengeometrie" verfaßt und in einem Privatdruck herausgebracht.

Neben der Rolle der projektiven Geometrie legt Ziegler die Bedeutung der Mechanik des starren Körpers für die Entwicklung der Geometrie frei, die insbesondere bei Möbius das befruchtende Element zur Entwicklung des Nullsystems darstellte. In der Erhebung der Geraden zum Raumelement und der entsprechenden Ausarbeitung einer euklidischen Liniengeometrie in den Jahren 1865–1868 lag der entscheidende Beitrag von J. Plücker. Sein starkes Interesse an der Mechanik des starren Körpers übertrug sich auf seinen Schüler F. Klein, der 1871 den genauen Zusammenhang von Liniengeometrie und Mechanik erstmals vollkommen befriedigend klärte. Die Beschäftigung mit der projektiven Liniengeometrie und der nichteuklidischen Geometrie erweckte in Klein das Bedürfnis nach einer Durchleuchtung der Grundbegriffe der geometrischen Mechanik vom erhöhten Standpunkt der projektiven Geometrie aus; in diesem Sinne regte er seinen Schüler F. Lindemann zu dessen grundlegender Dissertation (1874) über die nichteuklidische Statik und infinitesimale Kinematik an.

Ferner werden die Leistungen von Clifford zur geometrischen Mechanik, die offenbar noch nie in der Literatur untersucht worden sind, ebenso wie die Wirkungsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie in Verbindung mit der geometrischen Mechanik in England erstmals dargestellt.

Der Autor vermag auch über die Fachgeschichte hinaus in das weite historische Umfeld zu blicken und Querverbindungen, etwa bei der Erörterung des Begriffspaares analytisch und synthetisch, aufzudecken, so daß ich der Arbeit viel Beachtung wünsche.

Kassel, den 15. Juni 1985 Ludolf von Mackensen

Vorwort

Werden die projektive Geometrie und die Liniengeometrie mit der Mechanik in Verbindung gebracht, so lassen sich die Grundbegriffe der klassischen Mechanik des starren Körpers von einem erhöhten geometrischen Standpunkt aus begreifen. Von daher bietet sich zudem ein Ausblick auf Begriffsbildungen, die kein Äquivalent in der äußeren Wirklichkeit besitzen, nichtsdestoweniger aber klar formulierbar und vorstellbar sind. Die entsprechenden mathematischen Zusammenhänge, d.h. hier die Grundbegriffe der nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers, wurden bereits im 19.Jh. in der ersten Begeisterung für die nichteuklidische Geometrie sehr weitgehend untersucht.

Von der Geometrie, deren Inhalte und Gesetzmäßigkeiten in der inneren Anschauung zur Erscheinung kommen, ging für mich schon seit der Schulzeit eine starke Anziehung aus. Während des Mathematik- und Physik-Studiums wurde ich mit den klassischen Inhalten der projektiven Geometrie und der Liniengeometrie bekannt und durch Dr. Georg Unger und Dr. Peter Gschwind auf die Zusammenhänge mit der Mechanik des starren Körpers aufmerksam gemacht. Das dadurch entfachte Interesse hat mich seither nicht mehr losgelassen.

Da kein Lehrbuch zur Mechanik des starren Körpers unter dem Gesichtspunkt der projektiven Geometrie und der Liniengeometrie existiert, mußte ich mich an die Originalschriften heranarbeiten. Dabei lernte ich Prof. Dr. Ludolf von Mackensen kennen, der mir die konkrete Aufgabe stellte, die historischen Ursprünge und die Entwicklung der Anwendung der projektiven und Liniengeometrie auf die Mechanik des starren Körpers genauer zu analysieren, da dies bisher von niemandem detailliert und umfassend untersucht worden ist. Daraus entstand das vorliegende Buch.

Mein Dank geht insbesondere an Prof. Dr. Ludolf von Mackensen, der die Entwicklung der Arbeit mit Anteilnahme begleitete und förderte, sowie an Prof. Dr. Oswald Giering für seine hilfreichen Anmerkungen. Diese Arbeit wurde in den Jahren meiner Assistentenstelle 1981/1982 an der ETH in Zürich begonnen und während meiner nachfolgenden Unterrichtstätigkeit an einem Gymnasium, sowie der späteren Anstellung am Mathematisch-Physikalischen Institut in Dornach (Schweiz) zu Ende gebracht. Dem Leiter dieses Institutes, Dr. Georg Unger, sei für sein freilassendes Entgegenkommen herzlich gedankt. Ein besonderer Dank gebührt Frau A.Riehl für die mit viel Mühe und Sorgfalt angefertigte Reinschrift des Manuskriptes.

Kassel, im Juni 1985

Renatus Ziegler

Hinweise für den Leser

Mathematische Exkurse in heute üblicher Notation, die als Einführung in die analytische Liniengeometrie (linearer Komplex, Nullsystem, fünfdimensionaler Komplexraum) dienen können, finden sich in den Abschnitten II 6, IV 4 und V 2 und in die euklidische Mechanik des starren Körpers im Abschnitt V 5. Die Weiterführung der Theorie ins Nichteuklidische wird in den Abschnitten VI 3 und VII 1 diskutiert. In den durchgeführten Rechnungen wird allerdings meist nur der allgemeine Fall behandelt.- Da ich an anderer Stelle die synthetische Liniengeometrie ausführlich behandelt habe (vgl. "Synthetische Liniengeometrie", Stuttgart 1981), konnte hier auf eine Darstellung dieses Gebietes verzichtet werden.

Jahreszahlen in runden Klammern, sofern es sich nicht um die Lebensdaten des Autors handelt, bedeuten durchgehend Hinweise auf die Primärliteratur (Quellen), Doppelklammern Hinweise auf die historische Sekundärliteratur. Die dem Autornamen folgende Jahreszahl gibt i.a. bei Zeitschriften das Jahr der Erstpublikation und bei Büchern das Jahr der mir zugänglichen Auflage an. Seitenzahlen werden durch ein Komma von der Jahreszahl getrennt. Details zur Literatur finden sich in der Bibliographie. Es wird jeweils nach der dort zuletzt angegebenen Quelle zitiert. Zusätze in eckigen Klammern innerhalb von Zitaten stammen von mir.

Die hier verwendete Fachsprache hält sich relativ nahe an die historischen Texte, um dem Leser auch von dieser Seite her einen Einblick in den historischen Zusammenhang zu ermöglichen. In neuerer Zeit geht die Tendenz der Fachsprache zu kürzeren Worten für ein und denselben Begriff. So sagt man heute etwa "Schraubung" statt "Schraubenbewegung", "Projektivschraubenlinie" statt "projektive Schraubenlinie", "Fernebene" statt "unendlich ferne Ebene", "Übertragung" statt "Übertragungsprinzip", "Quadrik" statt "Kegelschnitt" oder "(Hyper-)Fläche zweiten Grades". Zudem ist die Bezeichnung "Fundamentalfläche" heute nicht mehr üblich, man sagt statt dessen "Absolutfigur", da die Absolutfigur einer nichteuklidischen Geometrie nicht stets eine Fläche ist. Auch die Ausdrücke "imaginäre Kreispunkte" und "imaginärer Kugelkreis" für die Absolutfiguren der euklidischen Ebene bzw. des euklidischen Raumes werden heute kaum mehr verwendet. -
Wird im folgenden der Ausdruck "nichteuklidische Geometrie" gebraucht, so ist darunter i.a. die hyperbolische Geometrie, gelegentlich mit Einschluß der elliptischen Geometrie, zu verstehen, wie das in dem hier betrachteten Zeitraum durchaus üblich war.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I Einleitung 1

Kapitel II Die Ursprünge der geometrischen Mechanik : Gaspard Monge und die Ecole Polytechnique 5

1. Frankreich als Zentrum mathematischer Forschung und Ausbildung an der Wende zum 19.Jh. 5
   1.1 Die Gründung der Ecole Polytechnique 5
   1.2 Die Entstehung mathematischer Schulen in Frankreich 5
2. Einheit und Gegensatz von analytischer und synthetischer Methode in der Geometrie 7
3. Zur Entwicklung der Mechanik 11
   3.1 Der Siegeszug der analytischen Mechanik 11
   3.2 Gegenbewegungen zur analytischen Richtung der Mechanik 12
4. Ursprünge der geometrischen Grundbegriffe der Mechanik 15
   4.1 Von Euler bis Monge 15
   4.2 Louis Poinsot 15
   4.3 Von Poinsot zu Chasles und Möbius: Die Entdeckung des Nullsystems 19
5. Michel Chasles 21
   5.1 Das Dualitätsprinzip in den mathematischen Wissenschaften 21
   5.2 Chasles' Bemerkungen zur geometrischen Mechanik 21
6. Zusammenfassende Betrachtung der Leistungen von Poinsot und Chasles 24
   6.1 Grundbegriffe der geometrischen Mechanik 24
   6.2 Exkurs in die heute übliche Darstellung einiger Grundbegriffe der geometrischen Mechanik 25

Kapitel III Die Begründung der geometrischen Mechanik: August Ferdinand Möbius 29

1. Die Mathematik in Deutschland im Schatten Frankreichs und der Ecole Polytechnique 29
   1.1 Die Ecole Polytechnique und die Reformierung des Unterrichtswesens in Deutschland 29
   1.2 Der Übergang des Hauptstromes der Entwicklung der Geometrie von Frankreich nach Deutschland 30
2. Möbius' Studien zur geometrischen Mechanik 32
   2.1 Die Entdeckung des Nullsystems 32
   2.2 "Lehrbuch der Statik" 34

2.3 "Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen" 38
2.4 Würdigung des Schaffens von Möbius 38

3. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten 40

4. Die Arbeiten von Chasles zur geometrischen Kinematik 42

5. Die ersten Ansätze zur Liniengeometrie 43
5.1 Eine neue Eigenschaft des linearen Komplexes 43
5.2 Zur Entdeckung der Linienkoordinaten vor Plücker 43

Kapitel IV Euklidische Liniengeometrie und Mechanik: Julius Plücker 47

1. Das Aufblühen der exakten Wissenschaften im Deutschland des 19.Jh. 47
1.1 Der Einfluß Alexander von Humboldts 47
1.2 Zur Entwicklung der synthetischen Geometrie von Poncelet bis von Staudt 48
1.3 Zur Entwicklung der analytischen Geometrie von Möbius bis Plücker 49

2. Plückers wissenschaftliche Methode 53
2.1 Plücker als Mathematiker 53
2.2 Plücker als Experimentalphysiker 56
2.3 Plückers späte Jahre 57

3. Plückers erste Arbeiten zur Liniengeometrie und Mechanik 59
3.1 Liniengeometrie 59
3.2 Mechanik 61

4. "Neue Geometrie des Raumes..." 64
4.1 Euklidische Liniengeometrie 64
4.2 Kräftesysteme und lineare Komplexe 66
4.3 Geometrie des linearen Komplexes 68
4.4 Lineare Strahlenkongruenzen 71
4.5 Würdigung des Schaffens von Plücker 72

5. Metrische Tetraederkoordinaten in der Liniengeometrie 74

6. Geometrische Mechanik in Italien: Giuseppe Battaglini 79

Kapitel V Liniengeometrie und Mechanik: Klärung grundlegender Zusammenhänge durch Felix Klein 83

1. Kleins frühe Beschäftigung mit der Liniengeometrie 83

2. Projektive Liniengeometrie 84
2.1 Projektive Linienkoordinaten 84
2.2 Die linearen Gebilde der Liniengeometrie 86
2.3 Der lineare Komplex als Raumelement 89
2.4 Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten 93

2.4.1 Vorbetrachtung 93
2.4.2 Verallgemeinerte Koordinaten 95
2.5 Die Kleinschen Fundamentalkomplexe 96
2.6 Liniengeometrie und Mechanik 98

3. Würdigung des Schaffens von Klein 103
3.1 Kleins Beiträge zur Liniengeometrie und zur Mechanik des starren Körpers 103
3.2 Kleins mathematische Denkweise 105

4. Zur Schraubentheorie von Robert Ball 109

5. Die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen im Rahmen der euklidischen Liniengeometrie 111
5.1 Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im ruhenden Bezugssystem 111
5.2 Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im mitbewegten Bezugssystem 113
5.3 Formeln für Arbeit und Energie 115

Kapitel VI Nichteuklidische Liniengeometrie und die Grundbegriffe der nichteuklidischen Kinematik und Statik 117

1. Zur Entwicklung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Deutschland durch Felix Klein 117
1.1 Die Geburt der nichteuklidischen Geometrie 117
1.2 Die Cayley-Kleinsche Maßbestimmung 117
1.2.1 Cayleys projektive Maßbestimmung 117
1.2.2 Projektive Maßbestimmung und nichteuklidische Geometrie 119

2. Das Erlanger Programm und das Aufkommen des modernen Mannigfaltigkeitsbegriffs 122
2.1 Das Erlanger Programm von Felix Klein 122
2.2 Nichteuklidische Geometrie, n-dimensionale Geometrie und der Begriff der Mannigfaltigkeit 122
2.3 Bemerkungen zur Bewußtseinsgeschichte 123

3. Geometrische Grundbegriffe der Mechanik des starren Körpers in Räumen mit projektiver Maßbestimmung: Ferdinand Lindemann 125
3.1 Zur Entstehung der Dissertation Lindemanns 125
3.2 Nichteuklidische Bewegungen 126
3.3 Unendlich kleine Bewegungen in ihrem Zusammenhang mit linearen Komplexen 129
3.3.1 Charakteristiken von Punkten und Geraden 129
3.3.2 Rotationskomplex und Translationskomplex 130
3.3.3 Der lineare Komplex in seiner Beziehung zur Fundamentalfläche der Maßbestimmung 138

3.3.3.1 Die Gleichung der Fundamentalfläche in Linienkoordinaten 138
3.3.3.2 Die nichteuklidischen Hauptachsen des linearen Komplexes 140
3.3.4 Die Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen 142
3.3.5 Geometrische Beziehungen, die durch eine unendlich kleine Bewegung vermittelt werden 144
3.4 Metrische Beziehungen im Linien- und Komplexraum 146
3.4.1 Die Neigung zweier Geraden oder linearer Komplexe 146
3.4.2 Das gegenseitige Moment zweier Geraden oder linearer Komplexe 149
3.4.3 Die Intensität einer unendlich kleinen Bewegung 152
3.5 Über Begriff und Maß der Kraft 153
3.5.1 Grundsätzliches zum Begriff der Kraft 153
3.5.2 Rotationskräfte und Translationskräfte 154
3.5.3 Zusammensetzung von Kräften 155
3.5.4 Zusammensetzung von Kraftsystemen 155
3.5.5 Zusammenfassung: Tabelle der gegenseitigen Beziehungen von unendlich kleinen Bewegungen und Kräften 157
3.6 Theorie der Momente 157
3.6.1 Grundsätzliches zum Begriff des Momentes 157
3.6.2 Drehmomente und Verschiebungsmomente 159
3.6.3 Momente von Kraftsystemen 159
3.7 Der Begriff der Arbeit 161
3.7.1 Grundsätzliches zum Begriff der Arbeit 161
3.7.2 Die Analogie zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen als Polarität im Komplexraum 163
3.8 Zusammenfassende Würdigung Lindemanns 165
3.8.1 Über die Bedeutung der nichteuklidischen Fassung mechanischer Grundbegriffe 165
3.8.2 Lindemanns weiterer Werdegang 167

Kapitel VII Zur Wirkungsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie und der geometrischen Mechanik 171
1. Zur Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in England 171
1.1 Zum Charakter der Mathematik in England um die Mitte des 19.Jh. 171
1.2 William Kingdon Clifford und die Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in England 172
1.2.1 Clifford als Wegbereiter der nichteuklidischen Geometrie in England 172
1.2.2 Die Cliffordschen Schiebungen des elliptischen Raumes 176

1.2.3 Die Cliffordschen Biquaternionen 180
1.3 Dynamik des starren Körpers im elliptischen Raum: Robert Samuel Heath 183
1.3.1 Zur Entstehung und Vorgeschichte der Arbeit von Heath 183
1.3.2 Mechanik des starren Körpers im elliptischen Raum 185
1.3.2.1 Kinematik im elliptischen Raum 185
1.3.2.2 Dynamik im elliptischen Raum 188
1.3.3 Diskussion der Ergebnisse von Heath 191
2. Zur Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in Italien 196
2.1 Verarbeitung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Italien 196
2.1.1 Guiseppe Battaglini und Eugenio Beltrami 196
2.1.2 Nichteuklidische Liniengeometrie: Enrico d'Ovidio 197
2.2 Dynamik des starren Körpers in einem Raum konstanter Krümmung: Domenico de Francesco 198
2.2.1 Kinematik 198
2.2.2 Integration der Bewegungsgleichungen 198
3. Zur Weiterentwicklung der geometrischen Mechanik in Deutschland 200
3.1 Präzisierung der geometrischen Grundlagen und des algebraischen Apparates durch Eduard Study 200
3.2 Untersuchungen zur nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers: Wilhelm Killing 203

Kapitel VIII Zusammenfassung und Ausblick 207

1 Zusammenfassung 207

2 Ursachen für den Rückgang der Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik 209

3 Ausblick ins 20. Jahrhundert 213
3.1 Geometrische Mechanik im euklidischen Raum 213
3.2 Geometrische Mechanik im nichteuklidischen Raum 214
3.3 Axiomatik der Mechanik 215
3.4 Schraubenrechnung und die Theorie der Mechanismen 215

Anmerkungen 217

Bibliographie 229

1. Bibliographische Hilfsmittel 229

2. Abkürzungen 239

3. Primärliteratur (chronologisch) 231

4. Sekundärliteratur (alphabetisch) 244

Register 252

Kapitel I

Einleitung

Das 19.Jh. ist für die Physik- und Mathematikgeschichte von herausragender Bedeutung. Vieles, was noch heute das Gesicht der exakten Wissenschaften prägt, kann auf Entdeckungen und methodische Errungenschaften des 19.Jh. zurückgeführt werden. Wie der Mathematikhistoriker J.L. Coolidge (1873-1954) mit Nachdruck betonte war die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie sowie der Mengenlehre entscheidend an der Entstehung der modernen Auffassung der Mathematik beteiligt ((1940; 87)). Für das Gebiet der Physik schuf B. Riemann (1826-1866) mit seinem Mannigfaltigkeitsbegriff die mathematische Grundlage für die Formulierung einer Gravitationstheorie durch A. Einstein (1879-1955).

Das 19.Jh. war auch ein Jahrhundert der Geometrie. Bis dahin erlebte dieses Teilgebiet der Mathematik in seinem gesamten Umfange noch kaum eine solche Blüte; und doch sank manches um die Jahrhundertwende fast zur Bedeutungslosigkeit herab. Die Mechanik des starren Körpers erhielt durch J.L. Lagrange (1736-1813), W.R. Hamilton (1805-1865) und C.G.J. Jacobi (1804-1851) eine ausgeprägt analytische Ausrichtung, die die Geometer und Praktiker nicht befriedigen konnte. So kam es, daß im 19.Jh. zum ersten Mal in umfassender Weise die geometrischen Grundbegriffe der Mechanik herausgearbeitet, d.h. geometrische Methoden auf die Mechanik des starren Körpers angewendet wurden. Und mit diesen wird sich die vorliegende Arbeit im besonderen beschäftigen.

Seit Lagranges "Méchanique Analitique" von 1788 wurde versucht, die grundlegenden Prinzipien der Mechanik in solcher Allgemeinheit zu formulieren, daß sie für Massenpunkte, starre Körper und Kontinua zugleich Gültigkeit hatten. Die mathematischen Physiker waren sich dabei immer mehr oder weniger im klaren, daß sich die entscheidenden Prinzipien der Bewegung eines starren oder gar eines deformierbaren Körpers nicht aus den Prinzipien der Mechanik des Massenpunktes deduktiv ableiten lassen.

Wie der Physiker und Physikhistoriker C.A. Truesdell nachgewiesen hat, machte sich Lagrange und die sich an ihn anschließende Entwicklungsrichtung der analytischen Mechanik keine großen Gedanken um solche prinzipiellen Fragen.[1] Mehr ahnend als voll bewußt empfanden einige Geometer diesen Mangel der analytischen Mechanik und gingen daran, in Ergänzung der bekannten analytischen Methoden, die die Bewegung eines starren Körpers beherrschenden Gesetze geometrischer Natur möglichst aus dessen Bewegungsverhalten selbst abzuleiten, und nicht auf die Mechanik des Massenpunktes zu "reduzieren". Das daraus entstandene, methodisch und inhaltlich ganz anders als die analytische Mechanik orientierte Gebiet kann man kurz g e o m e t r i s c h e M e c h a n i k nennen; ein Begriff, der so noch nicht verwendet wurde. Es sei an dieser Stelle dazu nur soviel gesagt, daß es sich dabei nicht bloß um eine Umformulierung und anschaulich-geometrisch präparierte analytische Mechanik handelt, sondern um wesentlich andersartig gefasste Gesetze der Kinematik und

Dynamik des starren Körpers, und zwar mit Hilfe der projektiven Geometrie und Liniengeometrie. Die geometrische Mechanik in diesem Sinne hat kaum etwas zu tun mit den immer wieder auftauchenden graphischen Verfahren zur Lösung statischer, kinematischer und dynamischer Probleme.[2] Ebensowenig hat sie einen Zusammenhang mit den im Anschluß an H. Poincaré (1854-1912) erfolgten Geometrisierungen des Phasen-und Konfigurationsraumes mechanischer Systeme.

Hierdurch sind die systematischen Grenzen des Gegenstandes dieser Arbeit klar vorgezeichnet: auf die Statik wird nur insofern eingegangen, als sie sich mehr oder weniger explizit auf Methoden der Liniengeometrie stützt. Die sich mitunter auch projektiver Methoden bedienende graphische Statik wird nicht behandelt; hier liegt noch ein offenes Feld historischer Forschung.[3] Entsprechendes gilt für die euklidische Kinematik [4] und die euklidische Schraubentheorie.[5] Es wird ebenfalls auf eine Darstellung der Entwicklung der analytischen Prinzipien der Mechanik verzichtet, da diese bereits an anderer Stelle ausführlich abgehandelt werden.[6]

Die vorliegende Arbeit versteht sich einerseits als Beitrag zur Geschichte der Physik und andererseits als ein Beitrag zur Geschichte der Geometrie, insbesondere der projektiven Geometrie, nichteuklidischen Geometrie und Liniengeometrie, sowie deren Anwendungen auf die Mechanik des starren Körpers. Sie umfasst in diesem Sinne ein Teilgebiet der Physik und stellt sich zur Aufgabe, die dort zur Anwendung kommenden Methoden zu analysieren und historisch einzuordnen.

Bei diesem Gebiet, eben der geometrischen Mechanik, handelt es sich um einen bisher nirgendwo geschlossen dargestellten Gegenstand. Daher war es notwendig, neben den rein historischen Betrachtungen auch einige inhaltliche Ausführungen vorzubringen, die den sachlichen Hintergrund der historischen Analyse bilden werden.

Die meisten Darstellungen der Geschichte der Geometrie enden dort, wo sich die nichteuklidische Geometrie und die Liniengeometrie erst eigentlich zu entfalten beginnen.[7] So werden etwa bei F. Klein ((1926/27)) die genannten Gebiete sehr knapp und nur in ihren allerersten Anfängen diskutiert - über die geometrische Mechanik erfährt man überhaupt nichts. Darüber hinausgehende Darstellungen sind selten und dann so kurz, daß von einer historischen Analyse kaum die Rede sein kann; zudem wird selten erwähnt und ausgeführt, welche konkreten A n - w e n d u n g e n die projektive Geometrie und Liniengeometrie in der Mechanik erfuhren.[8] Auf der anderen Seite wird in nahezu keiner Geschichte der Physik oder der Mechanik etwas von dem, was hier unter dem Begriff der geometrischen Mechanik des starren Körpers zusammengefasst wird, erwähnt.[9] Hier will die vorliegende Arbeit eine Lücke schließen. Bei der Fülle der Einzelheiten und methodischen Verfahren, sowie der bisherigen nur punktuellen historischen Verarbeitung, drängte sich eine Beschränkung auf das Studium der wichtigen publizierten Arbeiten auf.

Auf die Auswertung von Archivmaterial mußte verzichtet werden.

Diese Arbeit wird sich primär mit dem Verlauf der Wechselwirkung der Mechanik des starren Körpers mit der projektiven Geometrie und Liniengeometrie beschäftigen. Hierbei wird sich der Gegensatz der analytischen und der synthetischen Methode (vgl. Abs. II 2) und seine Überwindung als eines der fruchtbarsten Spannungsverhältnisse erweisen, das wesentliche Impulse zur Entwicklung der projektiven Geometrie und Liniengeometrie und deren Anwendung in der Mechanik gegeben hat und letztlich für das Heranwachsen der geometrischen Mechanik hauptsächlich verantwortlich war.

Das mathematische Umfeld der geometrischen Mechanik lag am Ausgangspunkt der Forschungen vieler großer Geometer des 19.Jh.. (L.Poinsot (1777-1855), M. Chasles (1793-1880), A.F.Möbius (1790-1868), F. Klein (1849-1925), F. Lindemann (1852-1939), W.K. Clifford (1845-1879), E. Study (1862-1930)), das dementsprechend deren Lebenswerk prägte und sie auch immer wieder zu diesem Gebiet zurückkehren ließ. Die Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik hatte so wesentlichen Anteil an der Entwicklung der methodisch-mathematischen Fähigkeiten dieser Persönlichkeiten, ein Aspekt, der in den bisherigen mathematikhistorischen Einzeluntersuchungen noch kaum berücksichtigt wurde.

In diesen Zusammenhang gehören auch die Betrachtungen zur wissenschaftlichen Methode von J. Plücker (1801-1868) und Klein, welche insbesondere bei Plücker zu einem Resultat kommt, das einiges Interesse beanspruchen darf. Dabei wird sich zeigen, daß Plücker gar nicht primär Analytiker, wie er oft genannt wurde, war, sondern zuerst und vor allem Geometer, der sich der analytischen Ausdrücke nur zur bequemen Darstellung seiner geometrischen Erkenntnisse bediente, und den Kalkül nie zum Selbstzweck erhob (Abs. IV 2). Bei Lindemann bietet sich insbesondere Anlaß, seine Bedeutung als Geometer hervorzuheben, während in der einschlägigen Literatur nur auf seine algebraischen Arbeiten (Beweis der Transzendenz von π) ausführlich hingewiesen wird.

Wie sich im Laufe der Arbeit herausstellte, stand die geometrische Mechanik seit Felix Klein in engstem Zusammenhang mit der Rezeption und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie (insbesondere der hyperbolischen und elliptischen Geometrie der Ebene und des Raumes), und bildete ein wichtiges Kapitel in der Wirkungsgeschichte dieses Gebietes, was bisher kaum die nötige Beachtung gefunden hatte. Gemeint ist hier vor allem die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in England durch Clifford, R. Ball (1840-1913), A. Buchheim (1859-1888), R.S. Heath (1861-1940) (Abs. VII 1), sowie in Italien durch G. Battaglini (1826-1894) und E. d'Ovidio (1843-1933) (Abs. VII 2).[10] Hier lagen auch die Keime zur Sprengung und Erweiterung des klassischen euklidischen Raumbegriffs, die zu ganz neuen Denkansätzen führten und letztlich eine notwendige Voraussetzung zur modernen Auffassung der Mathematik einerseits und der Physik (Einsteinsche Gravitationstheorie, Quantentheorie) andererseits waren.

Kaum von direkter historischer Auswirkung, aber nichtsdestoweniger von geistesgeschichtlicher Bedeutung waren die Überlegungen einiger Mathematiker, allen voran Klein und Lindemann, zur mathematischen Form eines nichteuklidischen Kraft- und Energiebegriffs. Nach den damaligen

physikalischen Erfahrungen waren diese weit jenseits der für möglich gehaltenen Erscheinungen anzusiedeln und es kam deshalb zu keiner tiefergehenden Auseinandersetzung damit.

Die zeitliche Eingrenzung der vorliegenden Arbeit ergibt sich ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Ursprünge der projektiven und Liniengeometrie auf den Lehr- und Forschungsbetrieb an der 1794 gegründeten Ecole Polytechnique in Paris zurückgehen, wo auch die ersten Anfänge der geometrischen Mechanik zu suchen sind. Trotz der großen Bedeutung der projektiven Geometrie für die mathematische Forschung am Anfang des 19. Jh., ist gegen Ende des Jh. ein bemerkenswerter Rückgang der Beschäftigung mit der projektiven und Liniengeometrie festzustellen. Dies hatte entsprechende Konsequenzen für die auf ihren Methoden beruhende geometrische Mechanik. Letzte Ausläufer dieser Forschungsrichtung reichen etwa bis 1910, wo auch diese Untersuchung endet.

Kapitel II

Die Ursprünge der geometrischen Mechanik: Gaspard Monge und die Ecole Polytechnique

1. Frankreich als Zentrum mathematischer Forschung und Ausbildung an der Wende zum 19.Jh.

1.1 Die Gründung der Ecole Polytechnique

Die führende Rolle Frankreichs in der Entwicklung der Mathematik in Lehre und Forschung am Ende des 18.Jh. ist auf die Gründung von Militärschulen und -akademien im zweiten Teil dieses Jh. zurückzuführen (Struik 1980, 156f.). Damals spielten die allgemeinen wissenschaftlichen Akademien eine größere Rolle als die Universitäten in der Förderung und Verbreitung der Wissenschaften. Die Universitäten, sowohl in Frankreich wie in Deutschland, führten ein Schattendasein. Sie verharrten in der Überlieferung alter Erkenntnisse und trugen kaum etwas zur Erneuerung bei.

In den Militärschulen Frankreichs kam dem mathematischen Unterricht als Teil der Ausbildung der Militäringenieure eine beträchtliche Bedeutung zu. So lehrten A.M. Legendre (1752-1833) und P.S. Laplace (1749-1829) an den Militärschulen in Paris und G. Monge (1746-1818) an der in Mézières. Selbst Napoléons Interesse an der Mathematik wurzelte in seiner Studentenzeit an den Militärakademien.

Die Gründung der Ecole Polytechnique 1894 fiel in die Zeit der ärgsten Revolutionswirren, als der Mangel an fundiert ausgebildeten jungen, zum Krieg tauglichen Männern immer spürbarer wurde. Diesem Bedürfnis verdankte die Schule ihren militärischen Zuschnitt sowie ihre enge Ausrichtung auf die Bedürfnisse des Staates.[1]

Zu den wenigen während der Revolutionszeit noch nicht eingegangenen Schulen gehörte die 1748 gestiftete Kriegsschule in Mézières. Hier entwickelte Gaspard Monge seine "Géométrie descriptive" und sammelte erste Lehrerfahrungen. Er nahm rasch aktiv am wissenschaftlichen Leben teil, stieg allmählich in verschiedene Staatsämter ein und erwies sich durch sein Organisationstalent als der geeignete Mann zum Aufbau einer zentralen Ingenieur-Schule in Paris - eben der Ecole Polytechnique. Trotz den mannigfachen Beschränkungen während der Revolutionszeit, sowie auch später unter Napoléon, welche die Schule immer wieder an den Rand der Existenz brachten, entwickelte sie sich zur wichtigsten Ausbildungsstätte in Frankreich, und zeitweise in ganz Europa. Es gibt kaum einen berühmten französischen Mathematiker, der dort nicht Schüler oder Lehrer bzw. Examinator gewesen wäre.[2]

1.2 Die Entstehung mathematischer Schulen in Frankreich

Im Zentrum der mathematischen Forschung und Lehre in Frankreich in den Jahren 1800 bis 1840 stand die mathematische Physik, die sich allmählich in ihrer ganzen Breite auszudehnen begann. Dabei vollzog sich der entscheidende Wandel von der durch I.Newton (1643-1727) inspirierten Laplaceschen atomistischen Physik zur eigentlichen mathematischen Physik, in welcher erstere nur ein Teilgebiet ein-

nimmt.[3] Im Bereich der Mathematik wurde diese Entwicklung begleitet durch die Ablösung der Lagrangeschen algebraischen Analysis durch die Analysis im heutigen Sinne, in welcher der Grenzwertbegriff eine fundamentale Stellung einnimmt, verschiedene Zweige der Analysis miteinander verbindend.

Eine entscheidende Rolle für die Förderung und Verbreitung dieser Entwicklung kam der "Académie des Sciences" zu. Zur weiteren Vertiefung und Darstellung ihrer Forschungsergebnisse, die ja ohnehin meist praxisorientiert waren, diente den mathematischen Physikern neben der Ecole Polytechnique vor allem die Ecole Nationale des Ponts et Chaussees und später (Ende der dreißiger Jahre) die Ecole Normale.

Die Entstehung der ganz offenbar produktiven und erfolgreichen Ecole Polytechnique war zum großen Teil eine Folge des Erziehungssystems. So berichtet Felix Klein, wie die Organisation des Unterrichts an der Ecole Polytechnique ganz auf höchste Anspannung der Kräfte, auf möglichst bedeutende Fachleistung ausgerichtet war. "Alle Mittel der Strenge, der Anstachelung des Ehrgeizes, der glänzenden Lebensaussicht werden hier herangezogen, um die Kräfte aufs äußerste zu entfalten. Die Kenntnisse werden bis zur wirklichen Beherrschung des Stoffes in die Köpfe hineingetrieben." ⟪Klein 1926,55⟫

Zur Ecole Polytechnique hatten nur streng Ausgewählte Zugang: Jeder Kandidat mußte eine schwere Aufnahme-Prüfung ablegen. Die besten Köpfe wurden gleich anschließend an das Studium als Repetitoren, später als Examinatoren und Professoren angestellt. Die dadurch entstehende "inzestuöse" Gemeinschaft war demzufolge auf Wett-und Konkurrenzkampf getrimmt: eine starke Triebfeder zu höchsten wissenschaftlichen Leistungen!

Zu den so entstehenden "Gemeinschaften" der einzelnen Schulen, vor allem der Ecole Polytechnique, gesellte sich die ebenso auf Konkurrenzkampf beruhende Gruppe der Bewerber um die Mitgliedschaft in der "Académie". Zwischen den Schulen und zwischen anderen Gemeinschaften gab es kaum wissenschaftlichen Wettstreit! Sie standen relativ isoliert nebeneinander. Noch viel weniger wurde auf dieser Ebene der Kontakt mit dem Ausland gepflegt. Eine derartige Selbstisolation kann als e i n wichtiger Grund für das merkliche Zurückgehen der Bedeutung der französischen Schulen nach 1840 angesehen werden.[4] Diese starben damit keineswegs aus. Sie gingen nur einfach ihre eigenen, vom Ausland unabhängigen Wege, wie wir weiter unten besonders im Falle der Geometrie sehen werden (Abs. III 1.2).

2. Einheit und Gegensatz von analytischer und synthetischer Methode in der Geometrie

Das Aufblühen der projektiven Geometrie im 19.Jh. - das goldene Zeitalter der Geometrie schlechthin - entfaltete sich auf einem Boden, der durch den größten Geometer des 18.Jh., Gaspard Monge (1746-1818), wohl vorbereitet war. Monges mathematische Universalität manifestierte sich in seinen aus Vorlesungen entstandenen Lehrbüchern der Analysis und der Geometrie. Er leistete darin fundamentale Beiträge zur analytischen und synthetischen Geometrie, zur Differentialgeometrie, zur Theorie der Differentialgleichungen und zur darstellenden Geometrie.[5] Was sein Schaffen auszeichnete, ist die innige Verbindung analytischer mit synthetischen Methoden. Damals bezeichnete man eine Methode zum Studium der Geometrie als "analytisch", wenn man ein Koordinatensystem, sowie Hilfsmittel aus der elementaren Algebra und Analysis verwendete, "synthetisch" hieß eine Methode, die wir heute als "konstruktiv" bezeichnen würden.

Die Bedeutungsentwicklung der Bezeichnungen "analytisch" und "synthetisch" innerhalb der Mathematik ist verwickelt und nicht immer in ihren Ursachen durchschaubar.[6] Ursprünglich bezeichnete man damit in der Antike zwei sich ergänzende, nicht ohne einander denkbare mathematisch-philosophische Methoden. Später wandelte sich ihre Bedeutung mannigfach, bis sie am Anfang des 19.Jh. zum Teil zu Bezeichnungen von mathematischen Gebieten wurden, die vom Inhalt her recht stark differierten. In der Zeit von F. Vieta (1540-1603) bedeutete "analytische" Methode noch die Anwendung von Algebra auf Geometrie, erhielt aber im Verlaufe des 18.Jh. immer mehr den Charakter von "nicht geometrisch". Dies traf vor allem für den deutschen und französischen Raum zu. Von großem Einfluß war dabei die Intention von J.L. Lagrange (1736-1813), die Mathematik von ihrem geometrisch-konstruktiven Ballast - wozu auch der damalige Grenzwertbegriff gehörte - zu befreien. Mittlerweile fiel der in ihrer Hochblüte stehenden Differential- und Integralrechnung die Bezeichnung "Analysis" zu - und diese war ja eben in den Händen von Lagrange algebraisch geworden!

Seit den Tagen von Vieta wurde die mathematische Forschung klar durch die "analytische"Methode dominiert und die "synthetische" Methode fristete ein Schattendasein. Sie fanden vor allem im englischen und italienischen Raum ihre Verehrer ((Boyer 1954,458; Cantor 1908,453)). "Synthetisch" scheint im 17./18. Jh. eher eine fest umrissene Bedeutung gehabt zu haben als "analytisch": man bezeichnete damit ein konstruktives Vorgehen,das gerne bei einem gegebenen Problem verweilt, es auskostet, bis hinein in alle Spezialfälle.

Solange "synthetisch" und "analytisch" in der Anfangszeit des 19.Jh.als nähere Bezeichnungen einer Methode - und nicht eines mathematischen Gegenstandes - verwendet wurden, bewegte sich deren qualitative Charakterisierung etwa im folgenden Rahmen:[7]

Die a n a l y t i s c h e Methode war ausgezeichnet durch Universalität und Allgemeinheit der Aussage, sowie vollendete Einheitlichkeit der Methode. Die s y n t h e t i s c h e Methode hatte eine gegenstands-spezifische Ausrichtung, die dem jeweils untersuchten Objekt besonders gut angepaßt war.

Die Polarisierung der Standpunkte und der sich daraus ergebende Konflikt zwischen Analytikern und Synthetikern hatte seine tieferen Wurzeln in der

Zeit vor Monge. Damals hatten die Schriften der Synthetiker teilweise tatsächlich einen sterilen, eingeengten Charakter. Die Fruchtbarkeit ihrer Methode war nicht im Ganzen, sondern nur im Einzelnen aufzuzeigen. Ganz anders die Schriften der Analytiker: Die Macht ihrer Methoden ließ sich an ausgewählten (!) Beispielen demonstrieren - ohne überhaupt je Figuren zu Hilfe zu nehmen, wie etwa Lagrange[8] in seiner "Méchanique analitique" von 1788. Die Überlegenheit der analytischen über die synthetische Methode schien dadurch etabliert. Gleichzeitig hatten führende Mathematiker wie Lagrange, L. Euler (1707-1783), J.B. le Rond d'Alembert (1717-1783) das Gefühl, die Entwicklung der Mathematik sei an ein Ende gekommen, es seien keine großen Ideen mehr in Sicht (Kline 1972, 623ff.). - 1783 starben Euler und d'Alembert. Einige Jahre später erschienen zwei große Arbeiten von Gaspard Monge: "Feuilles d'analyse appliquée à la géomètrie" und "Leçons de géométrie descriptive", die ein neues Zeitalter der Mathematik, insbesondere der Geometrie, einleiten sollten.

Monge, der erste Vertreter der Einheit von synthetischer und analytischer Methode in der Geometrie, verstand es, die sich ergänzenden Aspekte der beiden Methoden so souverän zu handhaben, daß er zum Mitschöpfer zweier neuer Gebiete der Geometrie sowie zum Repräsentant ihrer Einheit wurde: der analytischen und der synthetischen Geometrie im heutigen Sinne.

In den "Feuilles d' analyse..." von 1801 faßte Monge unter anderem seine Studien zur analytischen Behandlung eines traditionellen Gebietes der synthetischen Geometrie, den elementaren metrischen Relationen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, zusammen. Erstaunlicherweise hatte sich vorher die analytische Geometrie im wesentlichen nur mit höheren ebenen Kurven auseinandergesetzt - ganz in der Tradition von P. de Fermat (1601-1665) und R. Descartes (1596-1650). Monge demonstrierte nun auf diese Weise die Schmiegsamkeit und Anpassungsfähigkeit der analytischen Methode für bisher ausschließlich synthetisch zugängliche Gegenstände.

Die "Leçons de géométrie descriptive" von 1799 begründeten und schöpften bereits sehr weitgehend aus, was wir heute "Darstellende Geometrie" nennen. Monge stellte sich in diesem Arbeitsgebiet zwei Aufgaben: 1. Exakte Darstellung dreidimensionaler Objekte. 2. Präzise Ableitung aller wichtigen Eigenschaften dreidimensionaler Objekte aus ihrer obigen Darstellung. - Durch sein systematisches Vorgehen gelang es Monge, die erste Aufgabe brilliant und umfassend zu lösen, bei der Lösung der zweiten sind teilweise Zweifel möglich. Jedenfalls zeigte Monge mit seinen "Leçons...", wie auch die synthetische Geometrie Prinzipien besitzt (hier: die Zweitafel-Methode), die an Universalität kaum zu wünschen übrig lassen.[9]

Die jeweiligen Hauptmängel der analytischen und synthetischen Methode- bei der ersten die Gegenstands-Blindheit und Mangel an Objekt-angepaßten Methoden, bei der zweiten die Gegenstands-Verhaftetheit und der Mangel an Objekt-übergreifenden Methoden - wurden durch Monge in einem ersten Schritt in Frage gestellt, wenn auch noch keineswegs beseitigt. Letzteres geschah erst durch Julius Plücker (1801-1868) - vgl. Abschnitt IV 2 - und Felix Klein (1849-1925), der sich zu Monge folgendermaßen äußert:

Seine geometrische Schule "zeichnet sich dadurch aus, daß sie die lebhafteste räumliche Anschauung auf das natürlichste mit analytischen Operationen verbindet. Die analytische Formel ist nicht Selbstzweck, sondern nur der kürzeste Ausdruck tatsächlich angeschauter räumlicher Beziehungen, ihre Weiterentwicklung wird gewonnen auf Grund räumlicher Konstruktionen. ...Das Ziel ist, ähnlich wie auf anderem Gebiet bei Fourier, nicht die formelle Exaktheit der Schlüsse sondern die Klarheit der Erkenntnis und das Ausspinnen naturgemäßer Fragestellungen." ⟪Klein 1926, 77f.⟫

Die in Monge in so fruchtbarer Weise zu gegenseitiger Ergänzung und Vereinigung strebende analytische und synthetische Methode wurde von seinen Schülern nicht in derselben Intention aufgegriffen - ganz im Gegenteil: Seine größten Schüler L. Carnot (1753-1823), J.D. Gergonne (1771-1859) und J.V. Poncelet (1788-1867) wurden konsequente Verfechter der einen oder anderen Methode. Um dies zu verstehen, sind zwei Dinge zu beachten. Erstens lernten Monges Schüler bei ihm sowohl die analytische wie die synthetische Methode, ihre gegenseitigen Befruchtungen, sowie ihre Grenzen und Einseitigkeiten kennen. Zweitens wurden im Bereich der Geometrie die oben erwähnten Mängel der beiden Methoden nur im Ansatz behoben. Große Gebiete der Elementargeometrie waren der analytischen Methode noch unzugänglich [10] und mit der synthetischen Methode gelang es noch nicht, in einheitlicher Weise elementare und höhere Geometrie zu erfassen. Genau hier griffen die Schüler von Monge ein.[11]

Joseph-Diaz Gergonne[12] (1771-1859) erlangte bleibende Bedeutung durch die Gründung seiner "Annales de mathématiques pures et appliquées" (Nîmes, 1810-1831). Für ihn wurden sie bald zum Forum der Anpreisung der analytischen Geometrie. Gergonne wollte die analytische Methode zum Triumph führen, indem er sie - mit Erfolg - auf einige alte, im Bereich der synthetischen Geometrie liegende Probleme der Elementargeometrie (z.B. die Aufgaben des Apollonius) anwandte. - Bei seiner Durchforschung der elementaren Geometrie stieß er bei gewißen Sätzen auf merkwürdige Symmetrien; er entdeckte, daß durch Vertauschung von "Punkt" und "Gerade" aus diesen neue Sätze entstehen konnten, die auch richtig waren. Er fand ähnliche Symmetrien bei Sätzen aus der Geometrie des Raumes. Etwa 1825/26 war Gergonne von der universellen Gültigkeit des von ihm so genannten "Prinzips der Dualität" überzeugt. Schon früher machte er in seinen "Annales..." häufigen Gebrauch von der Doppel-Kolonnenschreibweise und bewies so zwei Sätze auf einmal.

Jean Victor Poncelet (1788-1867) wurde während seines Studiums an der Ecole Polytechnique als Schüler von G.Monge, L.Carnot, S.F. Lacroix (1765-1843) und L. Poinsot (1777-1859) stark beeinflußt durch die damals blühende analytische Geometrie.[13] Sein Interessenschwerpunkt lag aber zunächst bei der synthetischen Geometrie. Während seiner Gefangenschaft in Rußland 1813/14 benutzte er die erzwungene Muße zur Abfassung eines Buches über analytische Geometrie: "Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au Traité des proprietés projectives des figures", das allerdings erst (1862/64) in Paris veröffentlicht wurde. Dieses Buch war gedacht als Einleitung in sein 1822 erschienenes, viel berühmteres "Traité des proprietés projectives des figures."

Aus seiner ernsthaften Beschäftigung mit der analytischen Geometrie schien er auf Prinzipien gestoßen zu sein, die er später in rein synthetischer Weise zu formulieren versuchte. Er hatte einen tiefen Glauben an die Allgemeinheit der Analysis und suchte nach entsprechend tiefen synthetischen Prinzipien. In einer kurz nach der Entlassung aus der Gefangenschaft erschienenen Arbeit[14] brachte Poncelet zum Ausdruck, wie die Überlegenheit der analytischen Methode über die synthetische weniger auf der Anwendung der Algebra und der Koordinatenmethode beruhe, als vielmehr auf ihrer Allgemeinheit. Man brauche nur von ihr das Prinzip der Kontinuität zu übernehmen, um so die synthetische Geometrie in gleicher Weise fruchtbar und elegant werden zu lassen.[15]

Mit größter Genialität nahm Poncelet die Ideen von Monge und Carnot auf und verhalf ihnen unter Überwindung aller Schwierigkeiten zum Durchbruch. Er wurde so zum eigentlichen Schöpfer der projektiven Geometrie. Mit der Verwendung des Projizierens und Schneidens als einheitliche geometrische Prinzipien gelang es ihm überzeugend aufzuzeigen, wie auch die synthetische Methode nicht nur gegenstands-gebundene Prinzipien aufweist. "Die neue Art geometrischer Anschauung, 'das projektive Denken' ist es, was ihn wesentlich über seine Vorgänger hinauswachsen läßt." ((Klein 1926, 80))

Über die Polarentheorie der Kegelschnitte stieß Poncelet ebenfalls auf das Gesetz der Dualität, brachte es aber, wie schon Gergonne, zu keiner schlüssigen Einsicht in dessen universelle Gültigkeit, die erst von A.F. Möbius (1790-1868) und J. Plücker (1801-1868) erreicht wurde. Wegen ihren aus unabhängigen Quellen gespeisten, teilweise aber sehr ähnlichen geometrischen Resultaten, verwickelten sich Gergonne und Poncelet in den zwanziger Jahren des 19.Jh. in einen polemischen Prioritätsstreit[16], der auf einige Zeit hin die Geometer wieder in zwei Lager spalten sollte: in die Analytiker und die Synthetiker.

3. Zur Entwicklung der Mechanik

3.1 Der Siegeszug der analytischen Mechanik

Im Bewußtsein seiner Zeitgenossen sowie seiner unmittelbaren Nachfolger markiert die "Méchanique Analitique" aus dem Jahre 1788 von Joseph Louis Lagrange (1736-1813) einen gewaltigen Fortschritt und Wendepunkt gegenüber allen früheren Arbeiten zur Mechanik. Daß dies keinesfalls der historischen Wahrheit entspricht, sondern die eigentlichen Geistesgrößen der Mechanik des 18.Jh., abgesehen von Isaac Newton (1643-1727), Leonhard Euler (1707-1783), Johann und Daniel Bernoulli (1667-1748 und 1700-1782) sind, wissen wir spätestens seit den Forschungen C.A. Truesdells.[17] Lagranges Werk ist eigentlich kein Lehrbuch der rationalen Mechanik, sondern eher eine Monographie einer bestimmten Methode zur Ableitung von Differentialgleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung. Hat man diese eingeschränkte Bedeutung vor Augen, war das Werk sicher erfolgreich und manchmal elegant ((Truesdell 1960, 411)). Was die Mechanik betraf, ihre Prinzipien und Methoden, blieb Lagrange eher hinter Euler und den Bernoullis zurück. Auf irgendwelche tiefer- oder weitergehende Überlegungen zu den Grundprinzipien der Mechanik legte er keinen großen Wert. "Statt sich mit der Ableitung der Grundsätze zu beschäftigen, zeigt er, mit welchem Erfolg man sie benutzen kann." ((Mach 1933, 421, Bailhache 1975, 188f.)) So wollte er zeigen, daß sich die ganze Statik aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und die Dynamik aus dem von ihm so genannten "d'Alembertschen Prinzip" deduzieren läßt. Das Ziel bestand darin, die höchste Ökonomie und Symmetrie der Überlegungen und Rechnungen zu erreichen. Zu irgendwelchen konkreten neuen Resultaten ist Lagrange kaum gekommen, von ausgewählten (!) Beispielen abgesehen.

Die nächsten entscheidenden Schritte in der Entwicklung der analytischen Mechanik wurden veranlaßt durch William Rowan Hamilton (1805-1865). Ausgangspunkt seiner Forschungen auf mechanischem Gebiet sind Arbeiten zur geometrischen Optik, die, wie Klein ((1926, 194ff.)) bedauernd feststellt, in Deutschland kaum bekannt geworden sind.

Die in den Jahren 1834 und 1835 publizierten Arbeiten Hamiltons zur Mechanik sind in der Tat nur Korollare seiner optischen Grundgedanken. In ihrer eigentlichen, von der Optik herkommenden Gestalt blieben sie damals weitgehend unbekannt. Der Inhalt dieser Arbeiten wurde nämlich gleich von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), unter wiederholter Nennung des Namens Hamilton - aber in ganz selbständiger Art und Weise - , aufgegriffen. Von daher entstand der Eindruck, Hamilton sei nur ein Vorläufer Jacobis gewesen. "Jacobi ist der eigentliche Fortsetzer der französischen Schule die von Lagrange, Poisson usw. ihren Ausgang nahm. ...Der Ausbau, den die Mechanik durch Jacobi erfuhr, liegt wesentlich nach analytischer Seite." ((Klein 1926, 203)) Was Jacobi insbesondere schuf, war eine brauchbare Integrationstheorie. Es gelang ihm mit ihr die Lösung mancher wichtiger Probleme der Mechanik und Astronomie. Die Mechanik erreichte bei ihm allerdings einen Grad von Abstraktheit, der lange nicht überboten wurde. Klein bemerkt dazu: "Trotz der unzweifelhaften Schönheit dieses Gebietes möchte ich jedoch vor einem einseitigen Studium

warnen. Wenn man sich nur mit Mechanik in dieser Abstraktheit beschäftigt, bleibt der Sinn für den konkreten Einzelfall unentwickelt und mit ihm die Fähigkeit, ein vorliegendes mechanisches Problem wirklich anzusetzen und bis zur Beherrschung durchzuführen." ((1926, 207))

Die Weiterentwicklung der analytischen Mechanik bewegte sich bis gegen Ende des 19.Jh. und darüber hinaus im durch Lagrange, Hamilton und Jacobi abgesteckten Rahmen.[18] An der Macht der analytischen Methode ließ sich jedenfalls nicht mehr zweifeln, wenn auch die Variations- und Differentialprinzipien zu einigen Auseinandersetzungen Anlaß boten ((Voss 1901, Abschnitt IV)). Zusammenfassend darf gesagt werden, daß in der Tradition von Lagranges "Méchanique Analitique" versucht wurde, die g e s a m t e Mechanik durch möglichst w e n i g e analytische Prinzipien zu beherrschen. Je umfassender sich ein solches Prinzip auf die Mechanik der Massenpunkte, des starren und des elastischen Körpers, sowie auf ein flüssiges Medium anwenden ließ, je eher konnte man es an die Spitze a l l e r Untersuchungen stellen. Man wollte keine gegenstands-abhängigen Methoden, sondern möglichst allgemeine und analytische elegant handhabbare Leitsätze. Das Ideal war eine auf möglichst wenig empirischen Axiomen beruhende, rein rational erfassbare und algebraisch-analytisch formulierbare Mechanik - in diesem Sinne eine Nachwirkung des Ideals der Aufklärung, das sich mit gewissen Tendenzen des Neuhumanismus traf.

Daß in dieser Betrachtungsweise die meisten interessanten speziellen Probleme der Mechanik kaum Förderung erfuhren, liegt auf der Hand. Eine Ausnahme hiervon machte nur die Mechanik des Massenpunktes ((Cayley 1862, 513ff.)) und, damit zusammenhängend, die Himmelsmechanik. Dies ist nicht erstaunlich, war doch die Mechanik in der Fassung von Lagrange eine Mechanik der Punkte und Systeme von Punkten, so daß diese seit jeher den Hauptgegenstand der Untersuchung bildeten. In diesem Sinne ist ein starrer oder elastischer Körper sowie ein zähes oder flüssiges Medium nur ein Punktsystem mit speziellen Bedingungsgleichungen. Lagrange selbst, sowie seine Nachfolger, haben denn auch wenig Bedeutendes zur Kontinuumsmechanik beigetragen. Erst das Genie von A.L. Cauchy (1789-1857) und andere sich von Lagrange loslösende mathematische Physiker in Frankreich konnten durch neue Ansätze einen Durchbruch schaffen.[19]

3.2. Gegenbewegungen zur analytischen Richtung der Mechanik

Bei Mathematikern und Physikern, die primär auf das Konkrete, Anschauliche und experimentell Verfolgbare schauten, machte sich immer mehr die Überzeugung breit, daß eine Mechanik im Sinne von Lagrange, und in deren späteren abstrakten Erweiterungen durch Hamilton und Jacobi, nicht das alleinige Ziel der ganzen Entwicklung sein könne. Vielmehr ginge es doch darum, die bei der Mechanik des Massenpunktes, bei der Mechanik des starren Körpers und der Mechanik der kontinuierlichen Medien notwendigen Prinzipien fein säuberlich herauszuarbeiten und wohl voneinander zu scheiden.

Im Zentrum der vorliegenden Studie steht nun insbesondere die Mechanik des starren Körpers; es wird die Entstehung und Weiterentwicklung einer Betrachtungsweise untersucht, die unter Verwendung geeigneter geometrischer Methoden das Bewegungsverhalten des starren Körpers als solchen genauer analysiert hat. Diese Art Mechanik hat einen eminent geometrischen Charakter, weshalb sie hier g e o m e t r i s c h e M e c h a n i k genannt wird, ein Ausdruck, der in dieser Weise noch nicht verwendet wurde.

Innerhalb der mechanischen Wissenschaften lassen sich als Gegenbewegungen zum einseitigen und wenig auf das Praktische und Anschauliche gerichteten Strom der analytischen Mechanik zwei Gebiete ausmachen, die sich am Anfang des 19.Jh. zum ersten Male, vor allem in Frankreich, deutlich profilierten:
Erstens die sogenannte technische Mechanik, zweitens die Kinematik und geometrische Mechanik. Die Entwicklung der technischen Mechanik war nach der Erfindung der Dampfmaschine ohnehin eine Forderung der Zeit, das zweite Gebiet wurde zudem getragen vom (Wieder-) Aufblühen der projektiven Geometrie im Anschluß an G. Monge (1746-1818). Wie sich zeigen wird, traten zumindest in der Anfangszeit manche Forscher in mehr als einem dieser Gebiete produktiv hervor.

Wie man im Laufe der vorliegenden Untersuchungen immer deutlicher feststellen wird, ging es den Vertretern der g e o m e t r i s c h e n M e c h a n i k nicht darum, Veranschaulichungen der ohnehin schon vorhandenen analytischen Gesetzmäßigkeiten und Prinzipien auszuarbeiten. Vielmehr war das Ziel, einen völlig neuen, von der analytischen Mechanik mehr oder weniger unabhängigen Weg zur Erschließung und Formulierung der grundlegenden Prinzipien aufzuzeigen. Hier war vor allem L. Poinsot (1777-1859) wegweisend. Später erwies sich als geeignetes Mittel zur Formulierung und Darstellung die neu aufblühende projektive Geometrie, insbesondere die Liniengeometrie.

Die dem Staat dienende, militärische und technische Zwecke verfolgende Ecole Polytechnique mußte naturgemäß einen guten Boden abgeben für die Entstehung eines so in die Zukunft weisenden Gebietes wie die t e c h n i s c h e M e c h a n i k .

Wie nicht anders zu erwarten, war auch hier Monge wegweisend, vor allem durch die in seiner Lehrtätigkeit voll zum Tragen kommende Verbindung des Analytischen mit dem Synthetischen sowie des Theoretischen mit dem Angewandten.

Einer der ersten Schüler von Monge, Lazare Carnot (1753-1823) betonte in seiner 1783 erschienenen kleinen Schrift "Essai sur les machines en général" den experimentellen Charakter der Mechanik - ganz im Gegensatz zur Haltung von d'Alembert, Euler und Lagrange.

Die Arbeiten und die Bedeutung eines weiteren als Wegbereiter der technischen Mechanik geltenden frühen Schülers von Monge, Louis Poinsot (1777-1859), werden weiter unten gewürdigt (Abs. 4.2). Er hatte für die Entstehung der geometrischen Mechanik herausragende Bedeutung.

Neben Charles Dupin (1784-1873), dem "Bahnbrecher für die heutige Ingenieur- und industrielle Mechanik" ⟪Rühlmann 1885, 309⟫, gelten als eigentliche Begründer der technischen Mechanik Gustav Coriolis (1792-1843) und insbesondere

Jean Victor Poncelet (1788-1867). Alle drei waren Schüler von Monge. - Besonders einflußreich waren die Werke "Cours de mécanique, appliqué aux Machines", 1826, von Poncelet und "Traité de la mécanique des corps solide et du calcul de l'effet des Machines", 1829, von Coriolis. "Beide Werke haben im wesentlichen die gleiche Tendenz: sie streben im Gegensatz zu den abstrakten Formulierungen von Lagranges Mécanique Analitique ('die vornehme, reibungslose Mechanik') eine synthetische Betrachtung der in den Maschinen auftretenden Kraftwirkungen an, unter Berücksichtigung der tatsächlichen Verhältnisse wie Reibung usw.. Sie sind mathematisch sehr elementar, wir verdanken ihnen aber die Erarbeitung eines Fundamentalbegriffs, der für die Entwicklung der mechanischen Wärmetheorie und für die Aufstellung des großen Satzes von der Erhaltung der Energie entscheidend werden sollte: des Begriffes der m e c h a n i s c h e n A r b e i t ". ((Klein 1926, 75))

Es muß auffallen, daß sämtliche genannten Persönlichkeiten Schüler von Monge gewesen waren und zudem (oder deswegen!) - außer etwa Coriolis - bedeutende Beiträge zur Entwicklung der Geometrie geleistet haben. Ein glänzender Vertreter in dieser Reihe der Doppelbegabungen für die reine und angewandte Wissenschaft - ein echtes Erbe von Monge - war ohne Zweifel Poncelet. In jungen Jahren legte er das Fundament der synthetischen projektiven Geometrie mit seinem einflußreichen "Traité des propriétés projectives des figures" von 1822, verwickelte sich gleich in einen wilden Streit um die synthetische und analytische Methode, und wendete sich anschließend ganz der technischen Mechanik, sowie der Verwaltungs- und Lehrtätigkeit zu.

Was Poncelets Denkweise auszeichnete, war die innige Verschmelzung des Theoretischen mit dem Konkreten.[20] Er stellte dabei die reale praktische Anwendung über das Ausarbeiten von Theorien und Hypothesen. Poncelet war in diesem Sinne ein typischer Vertreter der Gegenströmung zur abstrakten Ausrichtung der analytischen Schulen.

4. Ursprünge der geometrischen Grundbegriffe der Mechanik

4.1 Von Euler bis Monge

Die Wurzeln der geometrischen Mechanik gehen zurück bis ins 18.Jh.[21] Die ersten Untersuchungen zu den geometrischen Eigenschaften der Bewegung eines starren Körpers stammen von J.B. le Rond d'Alembert (1717-1783) und L. Euler (1707-1783). D'Alembert wies bereits 1749 auf die Existenz einer momentanen Drehachse eines sich um einen Punkt bewegenden starren Körpers hin. Erst etwa 100 Jahre nach d'Alembert konnte L.Poinsot (1777-1859) zeigen, daß jede kontinuierliche Bewegung um einen festen Punkt durch das Abrollen zweier Kegel aufeinander charakterisiert ist (vgl. Abs. 4.2).

Die nähere Beschäftigung mit der allgemeinsten Bewegung eines starren Körpers begann mit einer Schrift von G.Mozzi: "Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi", Napoli 1763. Zum ersten Mal wurde hier der Satz aufgestellt, daß in jedem Zeitpunkt der Bewegung eines starren Körpers die Geschwindigkeitsverteilung gleich derjenigen einer Schraubenbewegung ist. Oder in der Formulierung der damaligen Zeit: Jede unendliche kleine Bewegung eines starren Körpers ist eine Schraubenbewegung. Mozzis Arbeit blieb allerdings weitgehend unbeachtet. Erst die selbständige Wiederentdeckung dieses Satzes durch M. Chasles (1793-1880) brachte die Forschung auf dem Gebiet der geometrischen Mechanik in Bewegung (vgl. Abs. 4.3).*

Sieht man von S. Stevin (1548-1620) und insbesondere von P. Varignon (1654-1722) - er machte das von ihm entdeckte Parallelogramm der Kräfte zur Grundlage der Statik - ab, so liegt der Ursprung der geometrischen Statik ebenfalls im 18.Jh..

Und zwar hat Monge zuerst in seinem "Traité élémentaire de statique" in der 1.Auflage von 1788 die allgemeine Aufgabe behandelt, die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems beliebig gerichteter Kräfte, die an einem starren Körper angreifen, aufzusuchen. Damit im engsten Zusammenhang steht das Problem der Aequivalenz zweier Kräftesysteme, sowie die Reduktion eines Kräftesystems auf ein möglichst einfaches System. Die Verfolgung der letzteren Aufgabe führte Monge sehr nahe an die Entdeckung des Nullsystems, ohne daß er allerdings diese Beziehung erkannt hätte.[22] Monges "Traité ..." hatte vor allem Bedeutung als erste umfassende, vorwiegend geometrische Darstellung der Statik fester Körper. Sie war ohne Zweifel von großem Einfluß auf Poinsot - und konnte sich sogar noch nach dessen "Eléments de statique" von 1803 einige Zeit behaupten.

* Auch Augustin Cauchy (1789-1857) entdeckte diesen Satz 1827 neu in "Sur les mouvements que peut prendre un système invariable, libre, ou assujetti a certaines conditions", Exercices de Mathématiques 2, Paris: De Bure Frères 1827 = Oeuvres (2) 7, Paris: Gauthier-Villars 1889, p. 94-120, insbesondere Théorème VI, p. 116.

4.2 Louis Poinsot

Die "Eléments de statique" (présentée à l'Académie le 21 novembre 1803) zogen zum ersten Mal die Aufmerksamkeit auf den Namen Louis Poinsot (1777-1859). Dem ausgezeichneten Schüler von Monge gelang es, die im wesentlichen bekannten Gesetze der Statik in einer völlig neuen und originellen Weise mit Hilfe der Einführung des Begriffs des Kräftepaares ("couple") darzustellen. Er bewies dort z.B. den Satz, daß sich jedes an einen starren Körper angreifende Kräftesystem auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar reduzieren läßt (1821, 121f.). Im Abschnitt 6.2 wird dieser Sachverhalt in heute üblicher Notation abgeleitet werden.

In dem der 3. bis 10. Auflage der "Eléments de statique" beigefügten[23] Mémoire "Sur la composition des moments et la composition des aires" (1821, 297-328) (présenteé à l'Académie le 28 mai 1804) führte Poinsot die Theorie der Kräftepaare noch wesentlich weiter. Insbesondere erweiterte er hier den schon früher eingeführten Begriff der "axe du couple" (1821, 59) zum Begriff der einem Kräftepaar zugeordneten gerichteten Strecke (Momentenvektor) und studierte die entsprechenden Zusammensetzungsregeln (="composition des moments et des aires"). Die derart bereicherte alte Wissenschaft der Statik wurde etwas später für Möbius[24] zum Anstoß einer tiefgehenden Beschäftigung mit der geometrischen Statik (vgl. Abs. III 2).

Poinsots "Eléments ..." war ein erfolgreiches und vielgelesenes Lehrbuch: es erlebte 12 Auflagen, die letzte erschien 1877.[23] Ebenso wie Monge der darstellenden Geometrie ihre abschließende Form gab, führte Poinsot die mit klassisch-geometrischen Methoden arbeitenden Statik zu einer gewissen Vollendung.

Die im reifen Alter verfaßten Arbeiten von Poinsot zur Dynamik des starren Körpers offenbarten sich als die schönsten Früchte seiner Jugendarbeiten zur Theorie des Kräftepaares. Die "Théorie nouvelle de la rotation des corps" (présentée à l'Académie le 19 mai 1834), die "Théorie des cônes circulaires roulantes" (présentée au Bureau des Longitudes le 17 novembre 1852) und das Mémoire "Sur la précession des équinoxes" (présentée à l'Académie le 29 juin 1857)[25] waren Höhepunkte des Schaffens von Poinsot.

Die erst 1851 zum ersten Mal vollständig gedruckte "Théorie nouvelle de la rotation des corps" von 1834 ist ein Meisterwerk an Klarheit und innerer Vollendung. Im ersten Teil entwickelt Poinsot die geometrisch-kinematischen Grundlagen der Bewegung eines starren Körpers. Dort findet sich zum ersten Mal ein expliziter Hinweis auf die Analogie zwischen der Zusammensetzung von Kräften und derjenigen von unendlich kleinen Rotationen (1851, 14). Die erste richtig durchgeführte Darstellung gab allerdings erst Möbius (1838). - Etwas weiter unten findet sich der berühmte Satz:

> "De quelque manière qu'un corps se meuve en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, si sur la surface d'un autre cone fixe de même sommet". (1851, 18)

Indem er die eine bestimmte Bewegung hervorrufenden Kräfte studierte, entwickelte Poinsot die Theorie der Trägheitsmomente und der Hauptträgheitsachsen. Zu Beginn des zweiten Teils führte er den fundamentalen Begriff des nach ihm benannten Trägheitsellipsoides[26] ein. Er nannte es "l'ellipsoide central" (1851, 67).

Ein Höhepunkt des ganzen Buches ist ohne Zweifel der nach Poinsot benannte Satz:

> "Considérez le centre de gravité du corps, où, si le corps n'est pas libre, le point fixe qui fait le centre de sa rotation. Autour ce point ... imaginez ... l'ellipsoide central.
> Si vous supposez que cet ellipsoide, dont le centre est retenu immobile au même point de l'espace, roule sans glisser sur un plan fixe avec lequel on l'a mis en contact, vous aurez la représentation exacte du mouvement géométrique que suit le corps en vertu du couple qui l'a frappé dans le plan fixe que l'on considère. ... la vitesse angulaire avec laquelle il tourne a chaque instant sur le rayon mené du centre au point de contact, est proportionelle à la longueur même de ce rayon ..." (1851, 77f).

Daran anschließend betrachtete Poinsot die durch die momentane Drehachse auf dem Ellipsoid und auf der invarianten Ebene erzeugten Kurven. Erstere nannte er P o l h o d i e n , letztere H e r p o l h o d i e n (1851, 94). Der zweite Teil schließt mit einer Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen, basierend auf den vorangegangenen kinematischen und dynamischen Überlegungen. Er zeigte, wie durch einige leichte Umformungen der genannten Gleichungen die von ihm unabhängig von denselben abgeleiteten Sätze ohne weiteres abgelesen werden können. Er setzte aber mit Recht hinzu:

> "Car si les théorèmes sont déjà connus, on découvre bien vite les tranformations à faire pour que les équations y répondent; mais quand on n'a aucune idée de ces théorèmes, on ne transforme guère qu'au hasard, et le plus souvent on n'arrive à rien." (1851, 121)

Poinsot hatte sehr genau angegeben, was ihn zu seinen Untersuchungen veranlaßt hatte und zu welchem Ziel er sie führen wollte. In einem sich an den oben zitierten Hauptsatz anschließenden Abschnitt mit der Überschrift "Réflexion générale" schrieb er, auf die synthetische Methode anspielend:

> "Nous voilà donc conduit par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel Exemple qui montre l'avantage de cette méthode si simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours de raisonnement". (1851, 78)

An anderer Stelle, nachdem er die Bemühungen Eulers, d'Alemberts und vor allem Lagranges zur Mechanik des starren Körpers gewürdigt hatte, fuhr er fort:

> "On peut bien, par ces calculs plus au moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné; mais on ne voit point du tout comment le corps y arrive: on le perd entièrement de vue, tandis qu'on voudrait l'observer et le suivre, pour ainsi dire, des yeux dans tout le cours de sa rotation". (1851, 2)

Damit formulierte Poinsot eines der wichtigsten Anliegen der sich mit der geometrischen Mechanik beschäftigenden Mathematiker und Physiker.

Poinsot verdammte keineswegs das rechnerische Vorgehen, er möchte es nur in seine Schranken weisen. In seiner "Théorie nouvelle de la rotation des corps" kommen ausgedehnte Rechnungen vor - aber erst im zweiten und dritten Teil, nachdem er die Theorie geometrisch (synthetisch) begründet hat.

> "Ainsi notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument. Instrument précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche, mais qui n'a par lui-même aucune vertu propre, qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme tout autre instrument." (1851, 79)

Poinsot erwies sich hier als wahrer Schüler von Monge und galt mit Recht als einer der hauptsächlichen Führer und Gestalter der Neugeburt der Geometrie im Frankreich der ersten Hälfte des 19.Jh.. Insbesondere war er z.B. dafür verantwortlich, daß 1846 eigens für Chasles an der Sorbonne ein Lehrstuhl für höhere Geometrie eingerichtet wurde.[27]

Von wenigen Ausnahmen wie, z.B. Chasles abgesehen, rief das neue Werk (1851) von Poinsot über die Rotation eines starren Körpers keine Begeisterung hervor. Man wollte nichts neues darin finden. Was tatsächlich n e u war, war weniger eine Theorie als das m e t h o d i s c h e V o r g e h e n - und mit einem solchen tun sich allemal die Zeitgenossen schwer! Poinsot hatte dies vorausgesehen:

> "... il est bien clair qu'aujourd'hui rien ne serait plus aisé que de retrouver nos théorèmes dans les expressions analytiques d'Euler ou de Lagrange, et même de les en dégager avec un air de facilité qui ferait croire que ces formules devaient les produire spontanément". (1851, 79)

Diese Ableitungen hat Poinsot bereits durchgeführt, wie wir oben erwähnt haben. Er wies dabei auch darauf hin, daß dies im n a c h h i n e i n wohl leicht möglich sei.

Sein Gesamtwerk zur Mechanik würdigend, dürfen wir sagen: Poinsot schuf in genialer Weise eine geometrische Beschreibung der Mechanik des starren Körpers und gab ihr im klassischen Rahmen der Geometrie eine gewisse Abgeschlossenheit. Daraus erklärt sich der zeitlose Charakter seiner Schriften, welcher es heute noch lohnend macht, sie zu studieren.

Eine nähere Analyse des Vorgehens von Poinsot offenbart uns allerdings den Gegensatz zu den Begründern der geometrischen Mechanik sehr deutlich. Poinsot geht in seinen beiden Hauptwerken, den "Eléments de statique" und der "Théorie nouvelle de la rotation des corps" immer von dem statisch bzw. kinematisch und dynamisch Einfachsten aus und schreitet weiter zur Betrachtung immer komplizierterer Fälle, bis hin zum allgemeinsten Fall. In seiner "Théorie nouvelle.." möchte er durchaus den starren Körper ins Zentrum der Betrachtung stellen, spricht aber doch immer wieder von den "molécules" des Körpers und analysiert deren Bewegungen, um sich so ein Gesamtbild der Bewegung gleichsam geometrisch integrierend aufzubauen. Es lag gar nicht in seiner Absicht, die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers zum Ausgangspunkt der Mechanik zu machen, um daraus alle speziellen Bewegungen abzuleiten, sowie die Bewegung von Massenpunkten zu charakterisieren. Dazu hätten ihm auch die geometrischen Hilfsmittel, wie etwa die Liniengeometrie, gefehlt.

Indem er sich auf der einen Seite von seinen analytischen Vorläufern Euler und d'Alembert und seinen Zeitgenossen Lagrange, Hamilton und Jacobi durch seine geometrische Betrachtungsweise distanzierte, konnte sich Poinsot ihrem Einfluß bezüglich des Aufbaus der Mechanik des starren Körpers aus der

Mechanik des Massenpunktes nicht ganz befreien. Auch hier zeigt sich Poinsots Darinnenstehen in zwei Zeitströmungen. Er war weder ein Vertreter der mechanischen Tradition des 18.Jh., noch eigentlich ein Pionier der geometrischen Mechanik des 19.Jh.

> "Très-éloigné de subir l'influence de son époque, Poinsot n'a pris modèle, en effet, sur aucun maître, n'a été imité par aucun disciple; sa manière ne saurait appartenir ni à un siècle ni à une école, elle est individuelle comme celle de Pascal, à laquelle elle ressemble plus qu'à aucune autre, parce que peut-être, en différent sur plus d'un point de l'auteur des 'Pensées', Poinsot, de même que Pascal, était un délicat et vigoureux esprit plus encore qu'un grand géomètre." (Bertrand 1872, XXVIII)

4.3 Von Poinsot zu Chasles und Möbius: Die Entdeckung des Nullsystems

Der Einfluß von Poinsot auf die Entwicklung der geometrischen Mechanik läßt sich nicht allein aus den Resultaten seiner Werke ableiten. Vielmehr wurde seine Methode, sein klarer geometrischer Stil, zum Vorbild mancher Geometer. Hier ist zunächst M. Chasles (1793-1880) zu nennen und dann vor allem A.F. Möbius (1790-1868).

Angeregt durch Poinsots fruchtbare geometrische Behandlung der Statik wendete sich Michel Chasles der Kinematik des starren Körpers zu. Noch vor dem Erscheinen der ersten Abhandlung von Poinsot zur Bewegung eines starren Körpers, der"Théorie nouvelle de la rotation des corps" von 1834, studierte Chasles unter wesentlich erweiterten Gesichtspunkten die momentane Bewegung eines starren Körpers in einer Arbeit aus dem Jahre 1830: "Note sur les propriétés générales du système de deux corps ...". Er bewies dort - ohne die Arbeit von G.Mozzi gekannt zu haben -

> "quand on imprime à un corps solide libre un mouvement infiniment petit, il existe toujours dans ce corps une certain droite qui glisse sur elle-même pendant que le corps tourne autour de cette droite, de sorte que le mouvement du corps n'est autre que celui d'un vis dans son écrou". (1830, 324)

Chasles begann bereits in dieser Arbeit Betrachtungen über geometrische Beziehungen zweier (endlich oder unendlich benachbarter) Lagen eines starren Körpers im euklidischen Raum durchzuführen und legte so die Keime für zwei in der Folge äußerst fruchtbare Forschungsgebiete: Erstens der Zusammenhang der unendlich kleinen Bewegung eines starren Körpers mit dem Nullsystem, und zweitens die durch zwei Lagen eines starren Körpers induzierte kollineare Verwandtschaft zwischen kongruenten Räumen. Letztere gibt Anlaß zur Betrachtung eines quadratischen Komplexes (später von Lindemann (1874) Charakteristikenkomplex genannt),der aus den Verbindungsgeraden entsprechender Punkte besteht. Das Studium der Beziehungen kongruenter Räume wurde zum bevorzugten Forschungsgebiet von Chasles (vgl. Abs. III 5).

Zur vollen Einsicht in die durch die unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers induzierte (Null-) Korrelation gelangte Chasles erst in dem seinem

"Aperçu historique ..." von 1837 angefügten "Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie":

> "... quand une figure, de forme quelconque, éprouve un déplacement infiniment petit, les plans normaux aux trajectoires de ses points enveloppent une seconde figure qui est c o r r é l a t i v e de la première". (1875, 676)

Chasles gilt als eigentlicher Begründer der Geometrie der Bewegung, d.h. desjenigen Teilgebietes der Kinematik, welches vom zeitlichen Verlauf einer Bewegung abstrahiert und nur die räumlichen Lagen ins Auge faßt, die das bewegliche Gebilde nacheinander einnimmt ((Schoenflies/ Grübler 1902,193)). Mit Statik befaßte sich Chasles ohnehin nur am Rande. In dem "Memoire ..." erwähnt zwar Chasles den Zusammenhang des Nullsystems mit der Statik (1875, 679f), ohne jedoch ausführlicher darauf einzugehen. - In einer Abhandlung aus dem Jahre (1839, 349) gibt Chasles eine rein geometrische Definition des Nullsystems mit Hilfe einer Involution auf einer Geradenschar eines einschaligen Hyperboloides.[28]

In seinen späteren Arbeiten kam Chasles von verschiedenen Seiten immer wieder auf das Nullsystem und seinen Zusammenhang mit den unendlich kleinen Bewegungen und den Kräftesystemen zurück. Er entdeckte im Anschluß an derartige Untersuchungen eine Fülle von Sätzen zur infinitesimalen Bewegung eines starren Körpers sowie deren Beziehungen zu höheren geometrischen Gebilden wie Raumkurven dritter Ordnung, Komplexe zweiten Grades usw.[29] Chasles gelangte so in unmittelbare Nähe des fundamentalen Zusammenhangs der Liniengeometrie mit der Mechanik des starren Körpers. Jedoch erst Plücker und Klein machten diesen Zusammenhang zur Grundlage ihrer mechanischen Studien.

Chasles war primär Geometer: er interessierte sich für geometrische Sätze im Zusammenhang mit der Kinematik. Eigentliche mechanische Untersuchungen lagen ihm eher fern. So kommt es, daß Chasles wohl viele Einzelheiten zur geometrischen Mechanik beigesteuert hat, für die eigentliche Begründung derselben als eigenständige Theorie aber kaum Bedeutung hat. Eine gewisse Ausnahme hiervon machen nur seine spekulativen Aussagen zum Dualitätsprinzip in der Mechanik (vgl. Abs. 5).

Neben Chasles und Möbius wird die Entdeckung des Nullsystems noch G.Giorgini (1795-1874) zugeschrieben.[30] Er hat aber für die Entwicklung unseres Gegenstandes keine weitere Bedeutung, sodaß wir nicht näher auf seine Arbeiten einzugehen brauchen.

5. Michel Chasles

5.1 Das Dualitätsprinzip in den mathematischen Wissenschaften

Michel Chasles (1793-1880) war durch und durch Geometer. Obwohl er selbst vor allem die synthetische Methode benutzte, gab er keineswegs der synthetischen oder analytischen Methode allein den Vorzug:

> "Hâtons-nous de dire, cependant, pour éviter toute interprétation inexacte de notre but et de notre sentiment sur les deux méthodes qui se partagent le domain des sciences mathématiques, que notre admiration pour l'instrument analytique, si puissant de nos jours, est sans bornes, et que nous n'entendons pas lui mettre en parallèle, sur tous les points, la méthode géométrique. Mais, convaincu qu'on ne saurait avoir trop de moyens d'investigation dans la recherche des vérités mathématiques ..." (1875, 2f)

unternimmt es Chasles, seinen Beitrag in diesem Sinne zu leisten.[31]

Chasles schien eine besondere Neigung zum Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie des Raumes gefaßt zu haben; dieses besagt, daß jeder Beziehung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen eine andere entspricht, in der "Punkt" und "Ebene" vertauscht sind.

> "L'application des mêmes idées de dualité peut s'étendre à la Mécanique. En effet, l'élément primitif des corps auquel on applique d'abord les premiers principes de cette science, est, comme dans la Géométrie ancienne, le p o i n t mathématique. Ne sommes-nous pas autorisés à penser, maintenant, qu'en prenant le p l a n pour l'élément de l'étendue, et non plus le p o i n t , on sera conduit à d'autres doctrines, faisant pour ainsi dire une nouvelle science? Et s'il existe un principe unique pour passer de cette science à l'ancienne, comme le théorème de Géométrie qui établit la corrélation des propriétés de l'étendue figurée, ce principe sera la base d'une d u a l i t é semblable, dans la science du mouvement des corps". (1875, 409)

Chasles hielt hier nicht inne, sondern überließ sich seinen Spekulationen, die ihn mit sich fortrissen:

> "Peut-on prévoir même où s'arrêteraient les conséquences d'un tel principe de d u a l i t é? Après avoir lié deux à deux tous les phénomènes de la nature, et les lois mathématiques qui les gouvernent, ce principe ne remonterait-il point aux causes mêmes de ces phénomènes? Et peut-on dire alors qu'à la loi de la gravitation ne correspondrait point une autre loi qui jouerait le même rôle que celle de Newton, et servirait comme elle à l'explication des phénomènes célestes? Et si, au contraire, cette loi de la gravitation était elle-même sa corrélative dans l'une et l'autre doctrine, ainsi que peut être une proposition de Géométrie dans la dualité de l'étendue figurée, ce serait alors une grande preuve qu'elle est véritablement la suprême et unique loi de l'Univers". (1875, 412)

5.2 Chasles Bemerkungen zur geometrischen Mechanik

Direkt anschließend an obiges Zitat leitet Chasles seine Bemerkungen zur geometrischen Mechanik mit den Worten ein:

> "Hâtons-nous de justifier ces idées ... par quelques réfléxions sur ce qui nous parait avoir été déjà fait, et pouvoir été continué, dans le sens de cette corrélation [= duale projektive Verwandtschaft, vgl. (1875, 587)] que nous supposons devoir exister entre les théories relatives au mouvement de translation, et celles qui sont relatives au mouvement de rotation". (1875, 412)

Indem er auf die Vorarbeiten von Euler und Lagrange hinwies, erwähnte Chasles seine Arbeit (1830), in welcher er zeigte, daß jede infinitesimale Bewegung eines starren Körpers eine Schraubenbewegung ist (Abs. 4.3).

Sich den Rotationen zuwendend, formulierte er ohne Beweis den Satz, daß sich jedes System von unendlich kleinen Rotationen um beliebige Achsen immer auf unendlich viele Arten durch zwei Rotationen um zwei verschiedene Achsen ersetzen läßt. Dabei kann die eine Achse auch im Unendlichen liegen, falls die andere gerade gleich der Schraubungsachse ist.

Um zu zeigen, wie einfach sich beliebige Systeme von Rotationen konkret zusammensetzen lassen, wies Chasles auf die Analogie der Zusammensetzung von Kräften und derjenigen von unendlich kleinen Rotationen hin. Wie ersteres vonstatten geht, ist damals schon genügsam bekannt gewesen und übertrug sich durch diese Analogie ohne weiteres auf Rotationen.

Diese Analogie schien Chasles nach eigenem Zeugnis zum ersten Mal bei Lagrange kennengelernt zu haben, der sie bei der Zusammensetzung von Drehungen, deren Achsen durch einen Punkt gehen, bemerkte. Chasles dehnte sie ohne weitere Begründung auf die Zusammensetzung beliebiger unendlich kleiner Rotationen aus. Gleichzeitig und unabhängig von Chasles kommt auch Möbius (1837, 263f) über den genannten Spezialfall - ohne hier direkt auf Lagrange hinzuweisen - zur Einsicht in die allgemeine Gültigkeit dieser Analogie (vgl.Abs. III 3.2). Er kann nun allerdings eine Begründung geben, die auf eigenen Vorarbeiten beruht, und die er (1838) ausführlich darstellt.

Nach diesen Vorbereitungen ging Chasles dazu über, bei der Bewegung eines starren Körpers, anstatt auf das Verhalten der Punkte zu achten, das Verhalten von Ebenen, die mit dem Körper starr verbunden sind, zu beschreiben. Solche Ebenen dachte sich Chasles speziell in den Achsen der Rotationen, durch welche die Bewegung eines starren Körpers nach den obigen Ausführungen bestimmt werden kann. Auf dieser Grundlage leitete er einige kinematische Sätze ab, welche die Bewegung der genannten Ebenen genauer, auch quantitativ, charakterisieren. Schließlich kulminierten seine Ausführungen in der Aufstellung eines Prinzips der virtuellen Rotation in Analogie zum Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten:

> "Quand un corps soumis à plusieurs rotations est en équilibre, si on lui fait éprouver un dérangement infiniment petit, les plans menés par les axes de rotation éprouveront des rotations e f f e c t i v e s sur eux-mêmes; nous les appelerons les rotations v i r t u e l l e s de ces plans.
> La condition d'équilibre du corps pourra s'exprimer par une équation qui nous offrira un p r i n c i p e d e s r o t a t i o n s v i r t u e l l e s, analogue au principe des vitesses v i r t u - e l l e s. Voici ce principe:
> Q u a n d d i f f é r e n t s p l a n s d' u n c o r p s s o l i d e s o n t s o u m i s à d e s r o t a t i o n s a u t o u r d e d i f f é r e n t s a x e s c o n t e n u s d a n s c e s p l a n s; p o u r q u e c e s r o t a t i o n s s e f a s s e n t é q u i l i b r e, i l f a u t q u e s i l' o n d o n n e a u c o r p s u n m o u v e m e n t i n f i n i - m e n t p e t i t q u e l c o n q u e, e t q u' o n f a s s e, p o u r c h a q u e p l a n, l e p r o d u i t d e s a r o t a t i o n i m p r i m é p a r s a r o t a t i o n e f f e c t i v e, e t p a r l e c o s i n u s d e l' a n g l e q u e f o n t e n t r e e u x l e s a x e s d e s c e s d e u x r o t a t i o n s, i l f a u t, d i s - j e, e t i l s u f f i t q u e l a s o m m e d e t o u s c e s p r o d u i t s s o i t é g a l e a z é r o". (1875, 414)

Mit Recht faßte Chasles seine kurze Skizze mit den Worten zusammen:

> "Ce qui précède suffira pour bien fair comprendre comment nous avons entendu qu'il était possible de créer de nouvelles doctrines dans la Mécanique rationelle, en substituant dans les theories actuelles, pour ce qui concerne le mouvement général d'un corps, les mouvements de rotation aux mouvement rectilignes, et, pour ce qui concerne les corps eux-mêmes, considérés comme parties de l'étendue, les p l a n s aux points, comme on peut faire dans la Géométrie analytique". (1875, 414)

Chasles war sehr überzeugt von der Fruchtbarkeit seiner Ideen, zumindest für die theoretische (rationelle) Mechanik. Er glaubte gezeigt zu haben, daß sich mit dem Begriff der Rotation genauso leicht umgehen läßt wie mit dem geläufigeren der Translation.

Chasles nähere Angaben zur Dualität zwischen punkthaft-translatorischen und ebenenhaft-rotatorischen Aspekten der mechanischen Grundbegriffe - nahegelegt durch die mit Hilfe von Ebenen studierten Rotationen -, halten allerdings einer näheren Prüfung nicht stand. Die Begeisterung für das Dualitätsprinzip hatte ihn hier zu Aussagen verführt, die er offenbar nicht genauer nachprüfte.[32] So erwähnte er "la singulière analogie qui a lieu entre les forces et leurs moments par rapport à un point fixe" (1875, 415), die sich durch die Poinsotsche Theorie der Kräftepaare erkläre. "Cette concordance se retrouve, dans la Dynamique, entre les mouvements rectilignes et leurs moments par rapport à un point". (1875, 415) Aber weder Einzelkraft und Kräftepaar, noch Translation und Rotation lassen sich im euklidischen Rahmen in irgendeinem präzisen Sinne als analog oder dual zueinander bezeichnen (vgl. dazu Abs. 6).

Die Theorie der Kräftepaare ("couples") nach Poinsot schien für Chasles überhaupt in vollkommenem Einklang mit seinen Ideen zur Korrelation zwischen den mechanischen Grundbegriffen zu sein:

> "Partout, en effet, les couples jouent le même rôle que les simples forces, celles-ci semblent destinées au mouvement de translation, et les couples au mouvement de rotation; les uns et les autres sont soumis aux mêmes lois mathématiques de composition et de décomposition". (1875, 415)

Chasles unterlag hier einem Irrtum, der noch lange das tiefere Verständnis der geometrischen Mechanik behindern sollte. Einzelkräfte verursachen im allgemeinen keineswegs reine Translationen, ebenso wie Kräftepaare (=Drehmomente) im allgemeinen keine reinen Rotationen erzeugen. Der Grundfehler liegt in der Annahme, es müße überhaupt ein unmittelbar ursächliches Verhältnis zwischen den kinematischen Begriffen (Translation und Rotation) und den dynamischen Begriffen (Einzelkraft und Kräftepaar) bestehen. Dies ist aber nicht der Fall. (Dieses Mißverständnis wurde erst von Felix Klein klar durchschaut, vgl.Abs. V 2.6.) Die Beziehungen der Grundbegriffe der geometrischen Mechanik untereinander sind um einiges subtiler, wie sich im Laufe der vorliegenden Betrachtungen herausstellen wird.

Trotz diesen Einwänden zu den Einzelheiten der von Chasles angeführten Begründungen, müssen wir seinen allgemeinen Überlegungen zum Dualitätsprinzip prophetische Bedeutung zumessen. So zeigte sich durch die Einbettung der geometrischen Mechanik in die projektive Geometrie (mit einer allgemeinen Maßbestimmung), daß die translatorischen und rotatorischen Grundbegriffe der Dynamik tatsächlich in einem echt dualen Verhältnis zueinander stehen (vgl. Kap. VI).

6. Zusammenfassende Betrachtung der Leistungen von Poinsot und Chasles

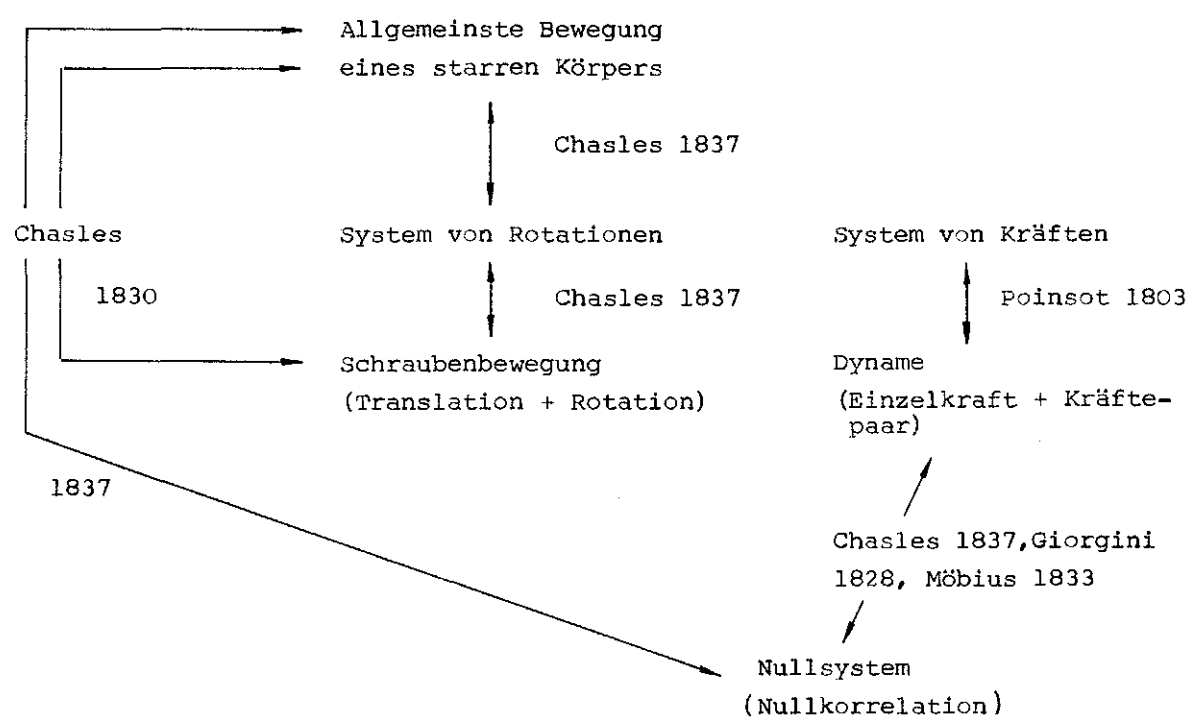
6.1 Grundbegriffe der geometrischen Mechanik

Die Entdeckung des Nullsystems (Tabelle 1)

Historisch wurde das Nullsystem zuerst nicht als eine spezielle Korrelation des projektiven Raumes entdeckt, sondern über dessen Zusammenhang mit der Kinematik und der Statik. Chasles entdeckte es wohl zuerst aus kinematischen Überlegungen heraus (statische Überlegungen spielten bei ihm immer nur am Rande eine Rolle), ging aber sofort zu rein geometrischen Betrachtungen über.

Poinsot legte durch seine "Eléments de statique" und die darin behandelte Reduktion von Kräftesystemen auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar den Grund für die Entdeckung des Nullsystems durch Giorgini und Möbius.

Tabelle 1



Chasles gibt allerdings selten Beweise seiner Entdeckungen. Wie wir sahen, halten seine Resultate auch nicht immer einer genaueren Prüfung stand. Eine klare Einsicht in die Beziehung dieser Begriffe untereinander hatte wohl erst Möbius (vgl. Abs. III 2).

Analogien und Symmetrien in den Grundbegriffen der geometrischen Mechanik (Tabelle 2)

Hier sind die Einsichten von Poinsot und Chasles sehr rudimentär. Man kann erst von einem tastenden Ahnen der richtigen Verhältnisse sprechen. Der Zusammenhang mit der Theorie des Nullsystems wird noch nicht explizit hergestellt. Auch hier war erst wieder Möbius bahnbrechend.

Tabelle 2

	Kinematisch	Dynamisch
(Rotatorisch)	Rotation	Drehmoment = Kräftepaar
	Rotationssystem	
(Translatorisch)	Translation = Rotationspaar	Einzelkraft
		Kraftsystem

(*)

Die Analogie (*) wurde von Poinsot 1834 und Chasles 1837 ausgesprochen, aber nicht in ihrem Wesen aufgeklärt und begründet.

6.2 Exkurs in die heute übliche Darstellung einiger Grundbegriffe der geometrischen Mechanik

Zur Zeit von Poinsot, Chasles und Möbius wurden alle Beziehungen, die wir heute mit Hilfe der Vektor-Notation ausdrücken, in Komponenten ausgeschrieben. Zum besseren Verständnis skizzieren wir hier den heute üblichen Vektorkalkül zur Beschreibung von Kräfte-und Rotationssystemen anhand der Arbeiten von Poinsot und Chasles.

Eine Kraft F mit der Wirkungslinie g ist eindeutig charakterisiert, bezüglich eines Punktes O, durch den Kraftvektor f und das Moment $\bar{f}$ bezüglich O, wobei (Fig.1)

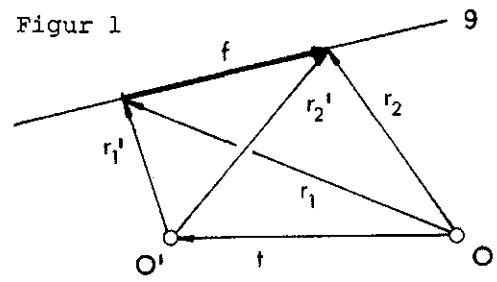
$$f = r_2 - r_1$$

$$\bar{f} = r_1 \times f = r_1 \times r_2$$

und folglich

$$f \cdot \bar{f} = 0 \quad .$$

Figur 1



Man schreibt nun abkürzend die Kraft F als Vektorpaar:
$F = (f;\bar{f})$ mit $f \cdot \bar{f} = 0$. Diese Darstellung von F ist aber abhängig vom Ursprung: Bezüglich eines um t verschobenen Ursprungs O' gilt:
$r_1' = r_1 - t$ und $r_2' = r_2 - t$, folglich

$$f' = r_2' - r_1' = r_2 - r_1 = f$$

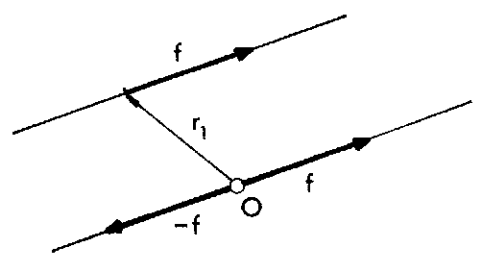
$$\bar{f}' = r_1' \times r_2' = (r_1 - t) \times (r_2 - t) = r_1 \times r_2 + (r_2 - r_1) \times t$$

$$= \bar{f} + f \times t ,$$

also geht $(f;\bar{f})$ über in $(f;\ \bar{f} + f \times t)$.

Vom geometrischen Gehalt her geht diese Darstellung einer Kraft bezüglich eines Punktes O zurück auf Poinsot. Es handelt sich eigentlich um die R e d u k t i o n einer Kraft F bezüglich eines Punktes O (Fig.2). Das Resultat ist eine an O angreifende Einzelkraft $(f;O)$ und ein Kräftepaar $(O;\bar{f}) = (f;\bar{f}) + (-f;O)$, sodaß die Poinsotsche Reduktion sich formal darstellt als

$$(f;\bar{f}) = (f,O) + (O;\bar{f}) .$$



Figur 2

Jede einzelne Kraft eines Kräftesystems läßt sich bezüglich O reduzieren. Wie Poinsot fand, gilt offenbar

$$\sum(f_i\ ;\ \bar{f}_i) = (\sum f_i\ ;\sum \bar{f}_i) .$$

Führen wir die Bezeichnungen $w = \sum f_i$, $\bar{w} = \sum \bar{f}_i$ ein, so wird $\sum(f_i;\ \bar{f}_i) = (w;\bar{w})$, wobei $(w;O)$ wieder eine an O angreifende Einzelkraft und $(O;\bar{w})$ ein Kräftepaar darstellt. Damit haben wir bereits den allgemeinen Satz von Poinsot: Jedes beliebige Kräftesystem läßt sich bezüglich eines Punktes reduzieren auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar.

Im allgemeinen ist dabei $w \cdot \bar{w} \neq 0$, denn sonst wäre das Kräftesystem einer Einzelkraft äquivalent.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht des an einem starren Körper angreifenden Kräftesystems $(f_i\ ;\ \bar{f}_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$ sind nun einfach

$$w = \sum f_i = 0 , \qquad \bar{w} = \sum \bar{f}_i = \sum r_i \times f_i = 0 .$$

In dieser Form, natürlich in Komponenten, stehen sie bereits bei Poinsot (1832, 105-110), und bilden den Höhepunkt des ersten Teils seines Buches "Eléments de statique" von 1803.

Die Trägergerade oder Wirkungslinie g der Kraft F ist durch letztere eindeutig bestimmt. Umgekehrt haben einfach unendlich viele Kräfte dieselbe Wirkungslinie. Sie unterscheiden sich nur durch den absoluten Betrag von f. Deshalb ist es sinnvoll $(p;\bar{p})$ mit $(p;\bar{p}) = \lambda(f;\bar{f})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, als die Koordinaten der Geraden g zu bezeichnen. Bei diesen Koordinaten spielt also der absolute Wert ihrer Komponenten keine Rolle, sondern nur deren Verhältnis. Manchmal ist es bequem, $(p;\bar{p})$ so zu normieren, daß $|p| = 1$, dann ist nämlich $\lambda(p;\bar{p})$ die Kraft mit der Intensität (d.h. dem Betrag) λ längs der Geraden g.

Die formale Behandlung von unendlich kleinen Drehungen geht nun ganz entsprechend, allerdings mit einem grundsätzlichen methodischen Unterschied: Bei der Reduktion und Zusammensetzung von Kräften muß jede mathematische Operation experimentell abgesichert sein; dagegen handelt es sich bei der infinitesimalen Drehung um einen kinematischen Begriff, der rein mathematisch entwickelt werden muß.

Das Vektorpaar $(s;\bar{s})$ mit $s \cdot \bar{s} = 0$ bezeichnet eindeutig eine Drehung, denn auch diese ist bestimmt durch eine Achse und einen darauf verschiebbaren Vektor, den Drehgeschwindigkeitsvektor $\bar{s}$.

Die Reduktions- und Zusammensetzungsregeln sind formal dieselben wie bei den Kräften, sodaß das Reduktionsgesetz hier lautet: Jedes System von Drehungen $(s_i;\bar{s}_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, läßt sich bezüglich eines Punktes O reduzieren auf eine Drehung mit der Achse durch O und ein Drehpaar (das ist eine Translation):

$$\sum(s_i\,;\,\bar{s}_i) = (\sum s_i\,;\sum \bar{s}_i)$$

und mit $d = \sum s_i$, $\bar{d} = \sum \bar{s}_i$ wird

$$\sum(s_i\,;\,\bar{s}_i) = (d;\bar{d}) = (d;0) + (0;\bar{d})$$

$$= \text{Drehung} + \text{Drehpaar (Translation)}.$$

Kapitel III

Die Begründung der geometrischen Mechanik: August Ferdinand Möbius

1. Die Mathematik in Deutschland im Schatten Frankreichs und der Ecole Polytechnique

Bevor wir uns dem Werke von A.F. Möbius (1790-1868) zuwenden, müssen wir untersuchen, weshalb neue Impulse zur Entwicklung der Geometrie nun mehr und mehr aus Deutschland und kaum noch aus Frankreich kamen. Diese Betrachtungen werden zugleich den allgemeinen mathematik- und kulturhistorischen Hintergrund erhellen, vor welchem die Arbeiten von Möbius und J.Plücker (1801-1868) zu sehen sind (vgl. dazu auch Abs. IV 1).

1.1 Die Ecole Polytechnique und die Reformierung des Unterrichtswesens in Deutschland

Seit dem Tode von G.W. Leibniz (1646-1716) wurde es im deutschen Sprachraum still um die Mathematik. Das Feld beherrschten nun Johann und Daniel Bernoulli (1667-1748 und 1700-1782) , L.Euler (1707-1783), die alle ihre Hauptaktivität außerhalb Deutschlands entfalteten oder zur Wirkung brachten.[1] Erst mit C.F. Gauss (1777-1855) begann in Deutschland die eigentliche mathematische Forschung wieder. Seine Bedeutung für das Aufblühen der Mathematik im Deutschland des 19.Jh. läßt sich kaum überschätzen. Gauss wirkte allerdings viel mehr durch das, was er schrieb, als das, was er lehrte. Eine eigentliche Lehrtätigkeit hatte er nie entfaltet, ja sie war ihm zeit seines Lebens eine Last ⟪Klein 1926, 60⟫.

Tatsächlich entfaltete sich erst Anfang des 19.Jh. ein Fachstudium der Mathematik an deutschen Universitäten.[2] Mit entscheidend für diese Entwicklung war der gegen Ende des 18.Jh. entstehende Neuhumanismus. Darunter versteht man die wiedererwachende Beschäftigung mit der Antike, vertreten vor allem durch Wilhelm von Humboldt (1767-1835),ferner durch G.E.Lessing (1729-1781), J.G. Herder (1744-1803), J.W. Goethe (1749-1832) und F. Schiller (1759-1805). Der Humanismus bildete am Anfang der Neuzeit eine Art Gegenbewegung zur Scholastik und der Vorherrschaft der Kirche; seine Ideale, die sich am Studium der Antike orientierten, wurden nun wieder ins Bewußtsein gerufen: Ausrichtung allen Handelns auf den Menschen, auf dessen eigentliche geistige Bestimmung, unter Ausschluß alles desjenigen, was ihn sich selbst entfremdet, wie etwa die Unterwerfung unter übermenschliche Mächte oder Wahrheiten ⟪Schmidt 1978, 282f⟫.

Die 1810 durch Wilhelm von Humboldt gegründete Universität Berlin war streng den Idealen des Neuhumanismus verpflichtet, was insbesondere in der stark geförderten Pflege der Geisteswissenschaften und der Altphilologie zum Ausdruck kam. Der Natur-wissenschaftlichen Forschung sowie den mathematischen Wissenschaften kam zunächst in diesem Rahmen keine besondere Bedeutung zu. Man fühlte sich allgemein mehr zur idealistischen Naturphilosophie hingezogen, in welcher versucht wurde, aus den inneren Gesetzmäßigkeiten der Begriffswelt

heraus zu relevanten Aussagen über die Natur zu kommen. Dabei spielte wohl die Anschauung der Natur, nicht aber ihre experimentelle Zergliederung eine wichtige Rolle. Von dieser Seite allein läßt sich also das in den zwanziger Jahren beginnende Blühen der experimentellen und theoretischen Forschung nicht ableiten. Wir sehen hauptsächlich zwei Strömungen, die den Hintergrund für die Initiativen einiger bedeutender Persönlichkeiten abgaben.

Erstens führte die mit der Verbreitung der Dampfmaschine einhergehende Industrialisierung, sowie der dadurch stark geförderte Handel und Verkehr, zusammen mit der inzwischen eingetretenen Gewerbefreiheit zu einem verstärkten Interesse an den Naturwissenschaften überhaupt, insbesondere der Mathematik. Diese Entwicklungen faßten in Deutschland allerdings nur zögernd Fuß: "Deutschland stand zu Beginn des Jahrhunderts ohne bedeutende Tradition in den Naturwissenschaften, auch auf diesem Gebiet - ebenso wie in seiner wirtschaftlichen Entwicklung - hinter den westeuropäischen Ländern weit zurück. Während in England und Frankreich die geistigen Energien und Leistungen auf die Gestaltung und Umgestaltung der wirtschaftlichen Lebensbereiche gerichtet waren, bedeuteten in Deutschland die Geistesrichtungen des Neuhumanismus, der Romantik und des philosophischen Idealismus zugleich auch Gegenkräfte gegen den Rationalismus und Realismus des neuen, vom Liberalismus beflügelten technisch-industriellen Geistes". ((Manegold 1966, 184))

Zweitens hatten die weitreichenden Auswirkungen der französischen Revolution zur Folge, daß auch die sich an sie anschließenden Entwicklungen vom Ausland, insbesondere von Deutschland, genau verfolgt wurden. Das noch zunächst in den Idealen Freiheit, Gleichheit und Brüderlichkeit zum Ausdruck kommende Selbstbestimmungsrecht des Menschen wurde rasch verdrängt durch das Prinzip der totalen Unterwerfung des Einzelnen unter die Ziele des heraufziehenden napoleonischen Staates.[3] Die verantwortlichen Persönlichkeiten in der Revolutionsregierung und in der Armee erkannten die hohe Bedeutung einer fundierten mathematischen Ausbildung für die Kriegstechnik. In diesem Geiste wurde die Ecole Polytechnique begründet und war auf ihr Wesen von entscheidendem Einfluß.

Die Ecole Polytechnique entfaltete mit revolutionärem Elan eine Produktivität, deren Resultate unübersehbar hervortraten: die Erfolge der Napoleonischen Armee, die Entstehung der Ingenieurwissenschaften, der mathematischen Physik und der technischen Mechanik. Sie war "gewissermaßen der organisatorische Ausdruck einer Mathematisierung der anderen Wissenschaftszweige. Die Ecole Polytechnique ist damit das große und für die Folgezeit unübersehbare, in vielem normsetzende Vorbild für die gleichermaßen als Voraussetzung und in der Folge der industriellen Entwicklung begründeten polytechnischen Anstalten in Deutschland geworden." ((Manegold 1966, 183))[4]

1.2 Der Übergang des Hauptstromes der Entwicklung der Geometrie von Frankreich nach Deutschland

Die bisher umrissenen Verhältnisse beschreiben den allgemeinen Rahmen, in welchen die Untersuchungen einzelner Mathematiker-Persönlichkeiten zu stellen sind. Zunächst entdeckten Poncelet, Gergonne und etwas später Möbius unab-

hängig voneinander das Dualitätsprinzip und ahnten dessen weitreichende Bedeutung. Weiter scheint Möbius auf ganz selbständigem Wege zu seiner Lehre von den geometrischen Verwandtschaften gekommen zu sein, ohne die Untersuchungen von Gergonne und Poncelet, die in ähnliche Richtung gingen, gekannt zu haben.[5] Ebenfalls unabhängig voneinander bemerkten Poncelet, Chasles und Möbius die Invarianz des Doppelverhältnisses bei den neu entdeckten projektiven Verwandtschaften. Entsprechendes gilt für die Entdeckung der homogenen Koordination durch E. Bobillier (1797-1828), Möbius und Plücker ((Kötter 1901, 197 ff.)).

An diesen Beispielen sieht man, wie sowohl in Deutschland wie in Frankreich die entsprechenden Anlagen zu einer durchgreifenden Umgestaltung der Geometrie vorhanden waren. Zur weiteren Entwicklung auf beiden Seiten wäre ein Austausch der Ideen notwendig gewesen, der sich aber nur in sehr einseitiger Weise realisierte. Die begabten jungen deutschen Mathematiker schulten sich fast alle autodidaktisch an, teilweise ins deutsche übersetzten, französischen Lehrbüchern der Mathematik (insbesondere an Lagranges Werken), sofern sie nicht die Möglichkeit besaßen, selbst einige Zeit in Paris zuzubringen (wie Dirichlet und Plücker). Zudem verfolgten sie mit Aufmerksamkeit die Publikationen der französischen Autoren. Denn Frankreich war damals d a s Zentrum der mathematischen Forschung und Lehre überhaupt. So erwähnte etwa Möbius immer wieder sehr anerkennend die "Eléments de statique" von Poinsot, und Plücker bezeichnete sich gerne als Schüler von Monge (obwohl er ihn nicht mehr erlebte), ja als Fortführer von dessen Intentionen (vgl. Abs. IV 2.1 und 4.5).

In umgekehrter Richtung, von Deutschland nach Frankreich, flossen die Anregungen nur äußerst spärlich. Die Franzosen waren zu sehr in ihren eigenen Zirkeln abgeschlossen, als daß sie auf das mathematische noch kaum entwickelte Deutschland schauen mochten (vgl. Abs. II 1). Hinzu kamen offenbar sprachliche Schwierigkeiten. So bemerkte z.B. Chasles 1827 in einer Anmerkung in seinem "Aperçu historique...":

> "Plusieurs géomètres allemands: MM. Steiner, Plücker, Möbius etc., dignes collaborateurs des célèbres analystes Gauss, Crelle, Jacobi, Lejeune-Dirichlet, etc., écrivent, dans ce dernier recueil [le 'Journal allemand' de M.Crelle] sur les nouvelles doctrines de la Géométrie rationelle. Nous éprouvons un vif regret de ne pouvoir citer ici leurs ouvrages, qui nous sont inconnus, par suite de notre ignorance de la langue, dans laquelle ils sont écrits". (Chasles 1875, 215)

Schwierigkeiten mit der deutschen Sprache dürften es auch anderen Geometern wie Poinsot, Poncelet und Gergonne nicht leicht gemacht haben, den neueren Entwicklungen zu folgen. Chasles großer Bericht ((1870)), eine Art Fortsetzung des "Aperçu historique...", beschränkte sich denn auch auf die Beschreibung der Entwicklung der Geometrie in Frankreich.

Hinzu kam drittens der Prioritätsstreit zwischen Gergonne und Poncelet in den zwanziger Jahren des 19.Jh., welcher insbesondere die Aufmerksamkeit von Poncelet - ein feuriger, impulsiver Charakter - sehr in Anspruch nahm. Der junge Plücker wurde nichtsahnend in diesen polemischen Strudel hineingerissen. Die Folge waren einige gehässige Angriffe von Poncelet gegen Plücker, die die menschlichen Voraussetzungen einer fruchtbaren Zusammenarbeit bereits im Keime erstickten.

2. Möbius' Studien zur geometrischen Mechanik

August Ferdinand Möbius (1790-1868) hatte für die Entwicklung der Mathematik am Anfang des 19.Jh. eine große Bedeutung.[6] Erst Felix Klein erkannte rückschauend in ihm einen Vorläufer seines "Erlanger Programms" von 1872 ((Klein 1926, 118)), worin er die von Möbius gesuchte gruppentheoretische Klassifikation der Geometrie erstmals klar formulierte, während Möbius nur von verschiedenen Arten von "geometrischen Verwandtschaften" sprach.

Lange ließ Möbius seine geometrischen Arbeiten ruhen, bis er sich zu einer Veröffentlichung entschloß. Das zuerst erschienene Buch "Der barycentrische Calcul" (1827) war ein Meisterwerk. Nebst einer Fülle neuartiger Gedanken sind vor allem zwei wesentliche neue Gesichtspunkte hervorzuheben: die Erweiterung des damals engen, traditionellen Koordinatenbegriffs mit Hilfe des Schwerpunktes und die Studien zur geometrischen Verwandtschaft, insbesondere zur Affinität und Kollineation.

2.1 Die Entdeckung des Nullsystems

Möbius' Vorliebe für die Mechanik machte es ihm nicht leicht möglich, sich von dem Begriff des Schwerpunktes zu lösen und so den entscheidenden Schritt zu den allgemeinen homogenen Koordinaten zu vollziehen ((de Vries 1934, Hist.Stud. X, S.54)). Doch ließ ihn diese Liebe zum Schöpfer der geometrischen Mechanik werden. "Nachdem der der Statik entnommene Begriff des Schwerpunktes ihn auf dem Gebiete der Geometrie so wesentliche Dienste geleistet hatte, mochte ihm dieser Erfolg die Anregung gegeben haben, das ganze Gebiet der Statik vom geometrischen Gesichtspunkt aus zu durchforschen." ((Reinhardt 1887, 712))
Im "Barycentrischen Calcul" (1827) finden sich noch keine diesbezüglichen Untersuchungen. Aber schon kurz nach der Drucklegung dieses Werkes, beginnend mit dem 1.November 1827, lassen sich Tagebucheintragungen zum Gebiet der Statik feststellen ((Reinhardt 1887, 712)).

> "Am 5.Februar 1828 fand ... Möbius, daß in Bezug auf ein beliebiges gegebenes Kräftesystem alle Axen in einer Ebene, für welche das Moment des Systems Null ist, durch einen bestimmten Punkt der Ebene gehen, den er den Nullpunkt der Ebene nannte (das heute sogenannte Nullsystem). Er erkannte sofort, daß die geometrischen Sätze, welche aus dieser Lehre von den Axen einer Ebene fließen, sich auch rein geometrisch, unabhängig von statischen Begriffen, herleiten lassen. Diese Bemerkung wurde die Veranlassung zu der allerdings erst im Jahre 1833 erschienenen Abhandlung 'Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume' ... .
> Eine Folge dieser Betrachtungen über die Nullpunkte der Ebenen war ferner die am 11.Februar 1828 gemachte Entdeckung, daß sich zwei Tetraeder konstruieren lassen, von denen ein jedes dem anderen zugleich um- und eingeschrieben ist, eine Entdeckung, die er bereits in demselben Jahre veröffentlichte." ((Reinhardt 1887, 712f.))

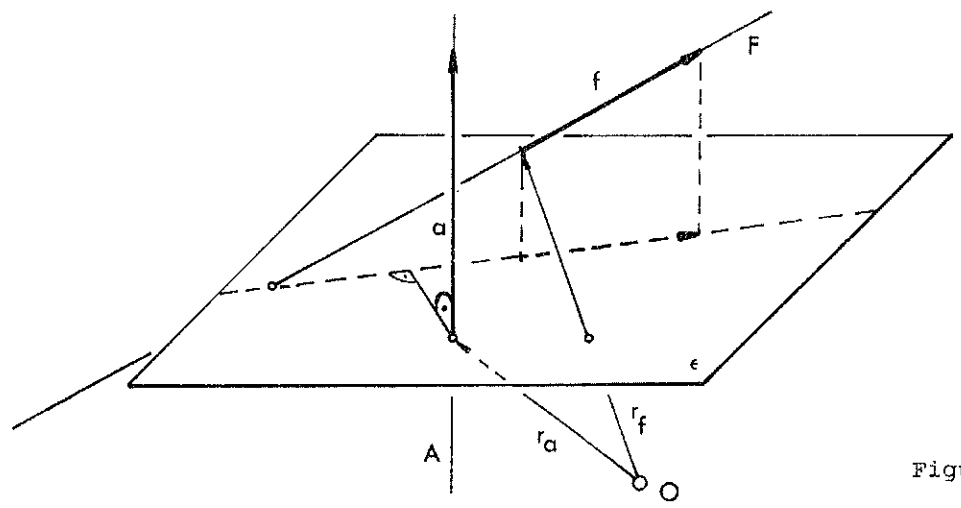
In dieser Arbeit (1828) findet sich keinerlei Hinweis auf den statischen Ursprung des genannten Satzes. Möbius bewies ihn mit Hilfe seines barycentrischen Calculs.

Bevor Möbius' Studien zum Nullsystem zur vollen Reife gelangten, die ihm einer Publikation würdig erschienen, veröffentlichte er zwei Abhandlungen zur Statik, welche bereits seine auf die Grundbegriffe gerichtete Absicht er-

kennen lassen. In der (1829) publizierten Arbeit "Beweis eines neuen, von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes ..."[7] bewies Möbius das Folgende:

> "Wie auch die Kräfte, welche auf ein freies und seiner Form nach unveränderliches System wirken, auf zwei Kräfte reduziert werden mögen, so ist das Tetraeder, welches zu den gegenüberliegenden Kanten die Geraden hat, wodurch die zwei resultierenden Kräfte ihrer Stärke und Richtung nach vorgestellt werden, immer von demselben Inhalte". (1829, 501)

Was Möbius zu dieser Veröffentlichung veranlaßte, war die von ihm entwickelte Beweismethode. Er ging aus von der damals bekannten Tatsache (wir verwenden wieder die heute übliche Schreibweise - vgl. Abs. II 6.2): das Moment einer Kraft $F = (f;\bar{f})$ bezüglich einer Achse $A = (a;\bar{a})$ ist gleich dem Produkt der Projektion von F auf eine zu A senkrechte Ebene ε mit dem Abstand dieser Projektion von A. Möbius stellte dann fest, daß dies gleich dem sechsfachen Inhalt des durch $a/|a|$ und f aufgespannten Tetraeders ist (Fig. 1).



Figur 1

In moderner Notation bedeutet dies, daß das Moment gleich dem Spatprodukt $[a, r_a - r_f, f]/|a|$ ist (vgl. dazu Abs. IV 5).

Nun machte Möbius die entscheidende Bemerkung:

> "Da es aber bei den Momenten nicht sowohl auf ihre absolute Größe, als vielmehr auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, so kann man die Momente ... geradezu den Tetraedern ... gleich setzen." (1829, 502)

Bis auf einen Faktor 6 führte hier also Möbius das g e g e n s e i t i g e M o m e n t z w e i e r K r ä f t e F' und F ein, und gab diesem den Wert $[f', r_{f'} - r_f, f]$. Dieser Begriff war für die geometrische Mechanik von fundamentaler Bedeutung. Mit ihm gelang es nun Möbius leicht, den genannten Satz zu beweisen.

In den Händen von Möbius wurde die Darstellung des Momentes einer Kraft bezüglich einer Achse durch ein Tetraeder zu einem fruchtbaren Instrument im Erschließen neuer Sätze in der Statik. Möbius verfolgte die Absicht, seine Sätze aus "den ersten Prinzipien der Statik" abzuleiten und zwar mit Hilfe des Begriffs des Kräftepaares von Poinsot. Poinsot begann seinen Aufbau der "Eléments de statique" von 1803 mit der Untersuchung von speziellen Fällen, wie der Zusammensetzung paralleler Kräfte und solcher, die auf einen Punkt wirken.

Möbius meinte dazu:

> "Es scheint mir aber noch vorteilhafter zu sein, wenn man die Elemente der Statik nach Auseinandersetzung der Fundamentalbegriffe von Kraft, Gleichgewicht, gleichwirkenden Kräften, u.s.w. mit der Theorie der Kräftepaare sogleich beginnen läßt." (1831, 509f.)

Möbius war sich also über den fundamentalen Charakter des Begriffes des Kräftepaares ganz im Klaren. Die Theorie der Kräfte in dieser Weise aufbauend, leitete Möbius "die sechs bekannten allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts eines Kräftesystems, als den endlichen Zweck dieser kleinen Abhandlung," (1831, 501) ab.

Nach der bereits 1828 erfolgten Entdeckung des Nullsystems ließ sich Möbius lange Zeit, bis er (1833) mit der ausgereiften Abhandlung "Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume" hervortrat. In vollendeter Art und Weise analytische mit synthetischen Überlegungen verknüpfend, leitete Möbius alle grundlegenden Beziehungen zwischen Nullpunkten, Nullebenen, konjugierten Geraden und Nullgeraden ab. Er sprach in diesem Zusammenhang allerdings noch von "Punkten" und "Gegenebenen" bzw. "Ebenen" und "Gegenpunkten", "Linien" und "Gegenlinien" sowie von "Doppellinien". Die Hauptachse des Nullsystems nannte er "Hauptlinie des Systems". Wie Möbius selbst in der Einleitung schrieb,

> "[bin ich] ... zu den vorliegenden geometrischen Untersuchungen ... zunächst durch einige, bei der Beschäftigung mit der Statik erhaltene, an sich sehr einfache Resultate veranlaßt worden. ... Ich habe nun diese Verhältnisse, abgesehen von ihrem statischen Ursprunge, rein geometrisch zu behandeln gesucht." (1833, 491)

Durch die Aufnahme der Möbiusschen Gedanken in seine damals vielverwendete "Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes" (1837, §27, S. 139-145) sorgte L.J.Magnus für eine systematische Einordnung dieser Ideen in ein Lehrgebäude und damit für deren weitere Verbreitung.

Den Abschluß dieser Abhandlung bildete die Erörterung des Zusammenhangs der betrachteten Dualitätsverhältnisse mit der Statik. Dort findet man etwa den Satz, daß jedes Kräftesystem nach zwei Kräften in Richtung von zwei konjugierten Geraden des entsprechenden Nullsystems zerlegt werden kann; die eine dieser Geraden kann dabei beliebig gewählt werden (1833,512). Möbius kam schließlich zur Einsicht, daß die T h e o r i e d e r K r ä f t e - s y s t e m e i m w e s e n t l i c h e n m i t d e r T h e o r i e d e r N u l l s y s t e m e ä q u i v a l e n t ist.- Zum Schluß zeigte er, wie die "Doppellinien", d.h. die Nullinien, die Linien von verschwindendem Moment sind.

2.2 "Lehrbuch der Statik"

In dem 1837 bei Georg Joachim Göschen in Leipzig erschienenen "Lehrbuch der Statik" brachte nun Möbius seine Untersuchungen zur Statik zu einem abschließenden Höhepunkt. Das Buch stieß bei seinen Zeitgenossen auf kein großes Interesse - nur ein kleiner Teil der Auflage wurde verkauft ((Reinhardt 1887, 713)).

Wie Möbius selbst in der Vorrede betonte, wurzelte seine anhaltende Beschäftigung mit der Mechanik in Poinsots "gehaltreichen und elegant" (Möbius 1837, 3) geschriebenen Werk über die Statik.

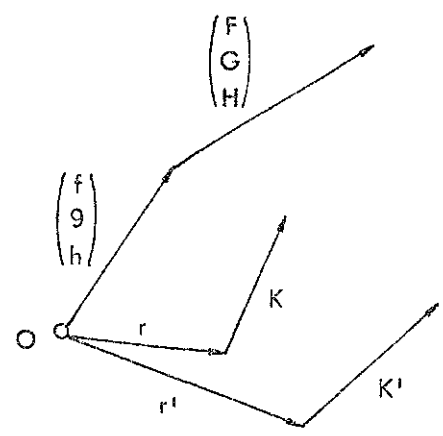
> "Die Methode, deren ich mich in diesem Lehrbuche bedient habe, ist ausschließlich weder die synthetische noch die analytische. Doch habe ich in der Regel der ersteren den Vorzug gegeben, wenn eine einfache geometrische Construktion zur Führung eines Beweises oder zur Lösung einer Aufgabe hinreichend war, so wie ich auch nicht selten die schon durch Analysis gefundenen Sätze durch geometrische Betrachtungen noch zu erläutern gesucht habe: beides aus dem Grunde, weil bei Untersuchungen, welche räumliche Gegenstände betreffen, die geometrische Betrachtung eine Betrachtung der Sache an sich selbst und daher die natürlichste ist, während bei einer analytischen Behandlung, so elegant diese auch sein mag, der Gegenstand sich hinter fremdartigen Zeichen verbirgt und damit unserem Auge mehr oder weniger verloren geht." (1837, 3f.)

Möbius stellte an den Anfang seines Lehrbuches acht "Grundsätze", mit denen er versuchte, der Statik eine Art axiomatische Grundlage zu schaffen, der wohl erste systematische Versuch in dieser Richtung überhaupt.-

Mit Hilfe der von ihm (1829)gefundenen Darstellung des Moments einer Kraft bezüglich einer Achse durch ein Tetraeder, leitete er die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers her. Dazu bewies Möbius zunächst den folgenden Satz, der wegen seiner großen Bedeutung in der Originalversion zitiert sei:

> "Sind ... (X,Y,Z), (X',Y',Z'), (X'',Y'',Z''), ... die Kräfte des Systems und resp. (x,y,z), (x',y',z'), (x'',y'',z''), ... beliebige Punkte ihrer Richtungen [d.h. Trägergeraden], so ist, wenn man zur Abkürzung die Summen
>
> $$X+X'+X''+ \dots = A,$$
> $$Y+Y'+Y''+ \dots = B,$$
> $$Z+Z'+Z''+ \dots = C,$$
>
> $$yZ-zY+y'Z'-z'Y'+ \dots = L,$$
> $$zX-xZ+z'X'-x'Z'+ \dots = M,$$
> $$xY-yX+x'Y'-y'X'+ \dots = N,$$
>
> setzt, das Moment des Systems in Bezug auf die durch f, g, h, F, G, H bestimmte Axe dargestellt durch den Ausdruck
>
> $$sF\ (L-gC+hB) + sG\ (M-hA+fC) + sH\ (N-fB+gA)."$$ (1837, 91f.)

Sei (Fig.2)



Figur 2

$$(X,Y,Z) = K \;, \qquad (X',Y',Z') = K' \;, \ldots$$
$$(x,y,z) = r \;, \qquad (x',y',z') = r' \;, \ldots,$$

dann wird in der heute üblichen Vektornotation

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = K + K' + K'' + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = r \times K + r' \times K' + r'' \times K'' + \ldots$$

und das Moment des Systems bezüglich der gegebenen Achse gleich

$$s\left(\begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \right) \right) ;$$

s ist dabei eine vom Koordinatensystem abhängige Proportionalitätskonstante.

Wie sich sofort einsehen läßt, ist dies tatsächlich gleich dem Moment des Kräftesystems

$$\left(\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \right)$$

bezüglich der Achse

$$s\left(\begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \right) .$$

Denn der obige Ausdruck für das Moment ist offenbar identisch mit

$$s\left(\begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F \\ G \\ H \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \right)$$

und dies stimmt mit der später von G. Battaglini (1826-1894) und F.Klein (1849-1925) aufgestellten Definition überein (vgl. Abs. IV 6 und V 2.4). Möbius arbeitete also bereits mit dieser ziemlich allgemeinen Formel!

Wie Möbius zeigte, läßt sich aus dem obigen Satz sofort eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht ableiten. Denn soll Gleich-

gewicht herrschen, so muß das Moment bezüglich jeder beliebigen Achse verschwinden. Dies ist aber nur möglich, wenn

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \; .$$

Die Einführung der Symbole A, B, C und L, M, N, sowie ihre Verwendung zur Darstellung des Momentes der Kräftekonfiguration bezüglich einer Achse, war ein erster Schritt in Richtung der Einführung von Koordinaten eines Kräftesystems bzw. dessen Darstellung durch ein Vektorpaar. Möbius ging damit einen wesentlichen Schritt weiter als Poinsot, der die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes direkt aus elementaren Überlegungen ableitete und sie bloß in der Form

$$\begin{array}{llll} X+X'+X''+\ldots = 0 & yZ+y'Z'+\ldots & -zY-z'Y'-\ldots & = 0 \\ Y+Y'+Y''+\ldots = 0 & zX+z'X'+\ldots & -xZ-x'Z'-\ldots & = 0 \\ Z+Z'+Z''+\ldots = 0 & xY+x'Y'+\ldots & -yX-y'X'-\ldots & = 0 \end{array}$$

aufstellte (Poinsot 1821, 105-110).

Im sechsten Kapitel des "Lehrbuches der Statik" führte Möbius den Leser zunächst durch rein statische Betrachtungen zu einer gründlichen Einsicht in die geometrische Natur eines allgemeinen Kräftesystems, d.h. er beschreibt die geometrischen Eigenschaften des einem Kräftesystem zugeordneten linearen Komplexes. Die heute üblichen Bezeichnungen "Nullpunkt" und "Nullebene" stammen aus diesen Untersuchungen (1837, 118). Mit "Nullebene" des Punktes M bezeichnete Möbius die Trägerebene der Geraden vom Moment null durch M . Sie liegen senkrecht zur Geraden des größten Moments durch M . Der "Nullpunkt" einer Ebene ist der Schnittpunkt aller Achsen einer Ebene, für die das Moment null ist.

Nach einer Diskussion des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten (vgl. Abs. 3), kam Möbius zum ersten Mal - gleichzeitig mit Chasles (vgl. Abs. II 5.2) - auf die Analogie zwischen Drehungen und Kräften zu sprechen. Ausgehend vom analytisch bewiesenen Satz

> "Unendlich kleine Drehungen um drei sich unter rechten Winkeln in einem Puncte schneidende Axen lassen sich daher ganz auf dieselbe Weise, wie Kräfte, zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, indem man nämlich den Axen und Winkeln der Drehungen die Richtungen und Intensitäten der Kräfte entsprechen läßt." (1837, 263),

zeigte Möbius, wie sich die Gesetze der Zusammensetzung von Kräften und Kräftesystemen auf die Zusammensetzung von Drehungen übertragen lassen. Schließlich kam er zu dem Satz:

> "Unendlich kleine Drehungen heben sich stets gegen einander auf, wenn ihnen proportionale und nach ihren Axen gerichtete Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und umgekehrt." (1837, 263)

Möbius' Gründlichkeit führte ihn hier, zum ersten Mal in der Geschichte überhaupt, auch auf die Analogie zwischen Kräftepaaren und Translationen, letztere aufgefaßt als Paare von unendlich kleinen Drehungen.

> "... das Axenpaar der Drehungen [kann] ebenso, wie das Kräftepaar, ohne Änderung seiner Wirkung beliebig in seiner Ebene und in jeder damit parallelen Ebene verlegt werden ...., und daß ebenso wenig, wie ein Kräftepaar sich auf eine einzige Kraft reduciren läßt, auch ein Paar von Drehungen mit einer einzigen Drehung gleiche Wirkung hat." (1837, 264)

Möbius gestattete sich eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes nicht, sondern bemerkte nur noch,

> "daß zu Folge des Erörterten Alles, was bis zum Ende des sechsten Kapitels von Kräften und den Momenten derselben gelehrt worden ist, auch vollkommene Anwendung auf unendlich kleine Drehungen und deren Momente erleidet." (1837, 265)

Der im folgenden Abschnitt zu besprechende Aufsatz widmet sich ausschließlich den hier angedeuteten Zusammenhängen.

Möbius gilt das Verdienst, zum ersten Mal auf die B e d e u t u n g des Nullsystems für die unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers aufmerksam gemacht zu haben. Wir erinnern daran, daß wohl Chasles als erster das Nullsystem einer unendlich kleinen Bewegung entdeckte (vgl. Abs. II 4.3.), dieses aber nicht vor (1843) systematisch untersuchte.

2.3 "Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen"

Der kurz nach dem Erscheinen des "Lehrbuches der Statik" publizierte Aufsatz "Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen" (1838) war einer weiteren Ausarbeitung der schon im genannten Lehrbuch erwähnten Analogie zwischen unendlich kleinen Drehungen und Kräften gewidmet.

> "Die hier gegebene Darstellung dieser Gegenstände unterscheidet sich von der dortigen ... hauptsächlich dadurch, daß während ich dort analytisch zu Werk ging, ich mich hier der Construction bedient habe. Es veranlaßte mich hierzu die Erwägung, daß für einen Gegenstand, der ganz in das Gebiet der Geometrie ... gehört, eine rein geometrische Behandlung die zweckmäßigste ist." (1838, 547)

Möbius zeigte zunächst, daß ein Körper durch zwei Drehungen in jede beliebige Lage gebracht werden kann. Wie Möbius in der Statik die Theorie der Kräftepaare an den Anfang gestellt hatte, begann er hier seine systematische Darstellung mit der Theorie der Drehpaare. Als "Fundamentalsatz in der Theorie der Drehungen" bezeichnete er die Tatsache, daß die Reihenfolge der Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen auf das Resultat keinen Einfluß hat. Schließlich formulierte Möbius seine wichtigste Einsicht folgendermaßen:

> "Man hat nämlich nur Richtung und Größe der Kraft mit Axe und Größe der Drehung zu vertauschen, um aus der bekannten Vorschrift für die Zusammensetzung der Kräfte die Vorschrift für die Drehungen abzuleiten. ... [Es ergibt sich, daß] zwischen Kräften und Drehungen die vollkommenste Analogie herrschen muß." (1838, 557)

Mit der besprochenen Abhandlung[8] sind im wesentlichen die Arbeiten von Möbius zur geometrischen Mechanik abgeschlossen. Nur in den Jahren (1848) und (1850) kommt er noch einmal kurz auf diesen Gegenstand zurück, trägt aber nichts Grundlegendes mehr dazu bei. Er wendet sich anderen Gebieten der Geometrie, sowie der Optik und der Astronomie zu.[9]

2.4 Würdigung des Schaffens von Möbius

In Möbius' Arbeiten verwirklicht sich die wechselseitige Befruchtung zwischen reiner Mathematik und Mechanik auf ideale Weise. Es gibt von ihm keine mechanische Abhandlung, in der er sich nicht zu geometrischen Fragestellungen anregen läßt, und umgekehrt ist er immer bestrebt, die in der Geometrie oder sonst in der Mathematik gewonnenen Ergebnisse wieder der Mechanik zu gute kommen zu lassen. Ähnliches gilt für seine Untersuchungen zur Optik, die ihn zu Betrachtungen über Kettenbrüche und projektive Punktreihen[10] sowie über

die Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel veranlassten. - In Möbius tritt uns ein Geist von hoher Originalität und Universalität entgegen, in welchem die gegenseitige Abgrenzung der Wissenschaften noch nicht Fuß fassen konnte.

Obwohl Möbius noch nicht zum Kern der geometrischen Mechanik, der sich erst im Rahmen der Liniengeometrie offenbart, vorgestoßen ist, kann er gleichwohl als Begründer der geometrischen Mechanik gelten. Seine Untersuchungen sind derart gründlich und tiefgehend, daß die späteren Erweiterungen und Vervollständigungen des Gebietes durchaus als Fortführung der Möbiusschen Ansätze aufgefaßt werden können - und auch tatsächlich so aufgefaßt wurden. Von großer Bedeutung war vor allem seine genaue Einsicht in die analogen Verhältnisse der folgenden Begriffspaare (wenn er auch den tieferen Grund dieser Analogie noch nicht durchschaute):

Unendlich kleine Drehung	Einzelkraft
Zusammensetzung von unendlich kleinen Drehungen	Zusammensetzung von Einzelkräften
Drehsystem	Kräftesystem
Zwei erzeugende Drehungen (Drehkreuz)	Zwei erzeugende Kräfte (Kraftkreuz)
Drehpaar (Translation)	Kräftepaar (Drehmoment)

Was uns außerdem zu dieser Beurteilung des Schaffens von Möbius veranlaßt, ist vor allem der im umfassendsten Sinne geometrische Geist, der jede seiner Arbeiten prägt. Wir finden in ihm wieder - wie bei Monge - einen vollkommenen Vertreter der Einheit von synthetischer und analytischer Methode. Möbius war immer bestrebt, die Einseitigkeiten der einen Methode mit Hilfe der anderen zu überwinden, um den vorliegenden Gegenstand möglichst anschaulich, exakt und mit Leichtigkeit begreifbar zu machen.

Möbius benutzte ausgiebig analytische Methoden, ja er gehörte sogar zu den Schöpfern ganz neuer Kalküle und symbolischer Bezeichnungen. Bereits sein erstes umfassenderes Werk, der "Barycentrische Calcul" (1827) ist der Vervollkommnung und wesentlichen Erweiterung der Koordinatenmethode in der ebenen Geometrie gewidmet. Zum Gebrauch in Vorlesungen über Dynamik und Himmelsmechanik ersann Möbius eine "geometrische Addition von Strecken", später auch im Anschluß an Grassmann eine "geometrische Multiplikation" ⟪Reinhardt, 1887, 717⟫, die als erste tastende Versuche in Richtung der Vektorrechnung gelten müssen.[11]

3. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, der virtuellen Verschiebungen (Verrückungen) oder der virtuellen Arbeit, wie es auch genannt wird, hat eine lange und vielfältige Geschichte. Eine erste brauchbare Formulierung scheint von J.Bernoulli (1667-1748) zu stammen, die er 1717 brieflich an P.Varignon (1654-1722) mitteilte.[12] Aber erst J.L.Lagrange (1736-1813) erhebt das Prinzip in seiner "Méchanique Analitique" von 1788 zu einem analytischen Grundprinzip der Statik. Dies war ein wesentlicher Schritt auf dem Wege zu einer von geometrischen Argumentationen befreiten analytischen Mechanik.

Daß man versuchte, dieses allgemeine und etwas abstrakte Prinzip immer wieder von Neuem zu beweisen, kann nicht verwundern. Und doch haben alle Beweise den Charakter von empirischen Ableitungen. "Selbst wenn man es auf eine Reihe axiomatischer Sätze zurückführt, aus denen es durch rein logische Prozesse ableitbar ist, sind doch diese axiomatischen Sätze als reine Erfahrungstatsachen aufzufassen, und ob man sie oder das Prinzip selbst als den prägnantesten Ausdruck der aufgenommenen Erfahrungselemente ansehen will, bleibt immer dem Belieben überlassen." (Marcolongo/Timerding 1911, 252f)

Bereits Lagrange gab zwei Beweise des Prinzips. Weitere Beweise stammen etwa von J.B. Fourier (1768-1830), A.M.Ampère (1775-1836) und Poinsot.[13] Obwohl sich letzterer eingehend mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten auseinandersetzte[14], baute er die "Eléments de statique" von 1803 völlig unabhängig davon auf, ja er erwähnt es dort nicht einmal. Dies ist verständlich, wurde doch Lagranges Fassung des Prinzips zum Ausgangspunkt rein analytischer Betrachtungen, während Poinsot eine geometrische (d.h. auf geometrischen Prinzipien beruhende) Theorie der Statik liefern wollte. Man beachte hierbei, daß dieses Prinzip im Rahmen der analytischen Theorie eigentlich den Begriff des Gleichgewichtes erst festlegt, während die geometrische Theorie diesen Begriff auf einfache statische und geometrische Einsichten stützen kann.

Unbeeinflußt von solchen Vorlieben oder Abneigungen wendete sich Möbius in seinem "Lehrbuch der Statik" (1837) dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu. Sind bei einem starren Körper die r_i die Angriffspunkte der Kräfte f_i, so zeigte er (1837, 251 ff), daß beim Gleichgewicht der Kräfte $\sum f_i \cdot \dot{r}_i = 0$ gilt. Auf diese Weise gewann er das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten:

> "Ist ein System von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewicht, und wird der Körper um ein unendlich Weniges verrückt, so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in den nach ihrer Richtung geschätzten Weg ihres Angriffspunktes jederzeit Null." (1837, 253)

Bemerkenswert ist, daß Möbius die Gesetze der Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen in "Zusätzen", die unmittelbar an seine Behandlung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten anschließen, entwickelte, und dort zugleich die Analogie zwischen Kräftesystemen und Systemen von unendlich kleinen Drehungen zur Sprache brachte (vgl. Abs. 2.2 und 2.3). Er beachtete allerdings noch nicht den unmittelbaren Zusammenhang dieser Analogie mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Es gelang erst Olinde Rodrigues (1794-1851) in seiner großen Abhandlung[15] "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un systeme solide dans l'espace..." (1840) den kühnen

Schluß zu ziehen, daß sich die Analogie zwischen den Gesetzen der Zusammensetzung der Kräfte und derjenigen der Drehungen aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ableiten lassen.

Nach einer ausführlichen rechnerischen Diskussion endlicher und unendlich kleiner Drehungen und deren Zusammensetzung kam er zur "Conclusion. - Loi générale de la Statique". Dort betrachtete er das Verhältnis virtueller Bewegungen eines Körpers und eines an diesem angreifenden Kräftesystems und bemerkt schließlich:

> "Ainsi s'explique l'analogie si remarquable des lois de l'equilibre et conséquemment de celles de la composition des rotations infiniment petites, avec les lois de l'équilibre et de la composition des forces considérées dans la Statique." (1840, 437)

Zum Schluß dieser Abhandlung gab er die bekannte Formulierung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten in der Form $\sum f_i \cdot \delta r_i = 0$. Eine viel tiefere Einsicht in die G e o m e t r i e eines Kräftesystems oder eines Systems von Drehungen als Poinsot scheint Rodrigues nicht gehabt zu haben. Wahrscheinlich kannte er die Arbeiten von Möbius nicht.

Chasles bezog sich verschiedentlich auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. In der "Note 34" zu seinem "Aperçu historique..." (1875, 414) stellte er ein dazu analoges Prinzip der virtuellen Rotation auf (vgl. Abs. II 5.2), ohne allerdings in seinen späteren Arbeiten darauf zurückzukommen.

In seiner ersten größeren Arbeit zur Geometrie der infinitesimalen Bewegung eines starren Körpers, zeigte Chasles (1843, 1430), wie sich das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aus der Analogie von Kräftesystemen und Systemen von Drehungen ableiten läßt. Damit machte er klar,

> "comment la considération du mouvement et de l'infini dans ce principe correspond à des considérations purement statiques."

Die Umkehrung zu betrachten, wie das Rodrigues getan hatte, lag daher nicht in seiner Absicht. Chasles kannte wahrscheinlich die Arbeit von Rodrigues (1840)[16], war sich über deren Bedeutung, was das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anbetrifft, aber offenbar nicht im Klaren. Er kam später auch nur mehr am Rande auf dieses Prinzip zurück. Für ihn als überzeugten Geometer konnte, ja durfte es auch nie eine prinzipielle Bedeutung haben, es durfte sich nur als untergeordnetes, ableitbares Prinzip offenbaren.

Die eigentliche zentrale Bedeutung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeit als Ausdruck einer g e o m e t r i s c h e n Beziehung zwischen einem Kraftsystem (linearer Komplex) und einer unendlich kleinen Bewegung (linearer Komplex) erkannte erst Klein (1871 b). Diese Einsicht beruhte auf einer profunden Kenntnis der Plückerschen Liniengeometrie und deren Zusammenhang mit der Mechanik (vgl. dazu Abs. V 2).

4. Die Arbeiten von Chasles zur geometrischen Kinematik

Ohne die Arbeiten von Möbius dem Inhalt nach gekannt zu haben (vgl. Abs. 1.3), ging Chasles in der Abhandlung (1843) daran, die geometrischen Eigenschaften der Bewegung eines starren Körpers genauer zu studieren. Ohne Beweis reihte er zahlreiche Sätze aneinander. Er führte neu den Begriff der C h a r a k t e r i s t i k ein und legte so den Grund zum Studium des mit einer unendlich kleinen Bewegung verbundenen Charakteristikenkomplexes:

> "Dans le plan, il existe une infinité de points, dont les trajectoires seront comprises dans le plan même; tous ces points sont situés en ligne droite. J'appellerai cette droite la c a r a c t é r i s t i q u e du plan ..." (1843, 1420)
> "La tangente à la trajectoire d'un point jouit de la propriété d'être la c a r a c t é r i s t i q u e d'un plan; et réciproquemment, la caractéristique d'un plan est toujours tangente à la trajectoire d'un de ses points." (1843, 1421f)

Obwohl Chasles in manchen Sätzen über Möbius hinausging, gelang ihm doch kein Fortschritt prinzipieller Natur- außer daß er konsequent neben den Bewegungen der Punkte eines starren Körpers auch die Bewegungen von mit diesem fest verbundenen Ebenen und Geraden studierte.[17]

Ähnliches läßt sich von der Abhandlung (1860) sagen. Nach einer Begriffsbestimmung der Kinematik, studierte Chasles die Bewegung einer Figur in der Ebene, einer Geraden im Raume, einer ebenen Figur im Raume und schließlich eines starren Körpers mit Fixpunkt.

Ihre Fortsetzung fand diese Abhandlung in einer Reihe von Aufsätzen aus dem Jahre 1861. Chasles untersuchte hier gründlich den durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier Lagen eines starren Körpers erzeugten Sehnenkomplex - ein quadratischer Komplex - der für unendlich benachbarte Lagen in den Charakteristiken - Komplex übergeht. Es geht hier eigentlich um die geometrischen Eigenschaften zweier kongruenter Räume, denen Chasles eine "eingehende und erfolgreiche Untersuchung ... [widmet] und über sie eine beinahe erstaunliche Fülle einzelner Sätze aufstellt." ⟪Schoenflies/ Grübler 1902, 201 ff.⟫

Chasles schloß mit der Bemerkung:

> "On conçoit, que ces questions ont leur analogues, sous un point de vue plus élevé, dans des systèmes de figures, non plus égales, mais s e m b l a b l e s entre elles; et plus généralement encore dans les f i g u r e s h o m o g r a p h i q u e s de la construction la plus générale." (1861a, 501)

Daß eine Verfolgung dieser Bemerkung, d.h. das Studium projektiver Bewegungen, in das von ihm prophezeite Reich einer vollkommen dualistischen Mechanik führen könnte, hatte er wohl nicht mehr bedacht. Jedenfalls "lassen sich in der That augenblicklich [die meisten der bei Chasles angeführten Sätze] auf den durch zwei collineare Räume erzeugten Complex ausdehnen." ⟪Kötter 1901, 374⟫

Der weitere Ausbau des durch Chasles geschaffenen Gebietes der G e o m e t r i e d e r B e w e g u n g knüpfte sich vorwiegend an den Namen A. Mannheim (1831-1906), der hier stellvertretend für die übrigen Autoren genannt sei.[18] Zur Entwicklung der Grundlagen der geometrischen Mechanik im Rahmen der Liniengeometrie trug dies aber kaum etwas bei.

5. Die ersten Ansätze zur Liniengeometrie

5.1 Eine neue Eigenschaft des linearen Komplexes

Im Anschluß an Arbeiten von Möbius (1837), (1838) unternahm J.J. Sylvester (1814-1897) in der Abhandlung (1861a) den Versuch, die geometrischen Bedingungen für sechs Geraden, nach denen Kräfte im Gleichgewicht sein können, näher zu untersuchen. Solche Geraden bilden ein "système en involution", wie er sagte. Dies ist genau dasselbe, was Plücker wenig später einen linearen Komplex nennen sollte. Sylvester präzisierte die schon von Möbius (1838, 563) gegebenen geometrischen Bedingungen und gibt konkrete Konstruktionen an, mit welchen man zu fünf gegebenen Geraden die Menge aller sechsten konstruieren kann, die mit diesen in Involution sind. Dabei stieß er auf die nach ihm benannte konstruktive Definition des linearen Komplexes: gegeben seien zwei projektive Strahlenbüschel, die einen gemeinsamen sich selbst entsprechenden Strahl - den Verbindungsstrahl ihrer Zentren - besitzen. Jede Treffgerade zweier sich entsprechender Strahlen dieser Büschel ist dann ein Strahl des linearen Komplexes (1861a, 742). Schließlich ging aus dieser Abhandlung der Satz hervor, daß durch fünf Strahlen in allgemeiner Lage ein linearer Komplex vollständig bestimmt ist.[19]

In einer zweiten Abhandlung (1861b) gab Sylvester einen analytischen Ausdruck für die Bedingung der Involution von sechs Geraden, wobei er bereits i m p l i z i t Linienkoordinaten verwendete.

In der Arbeit (1861b) knüpfte Chasles an Sylvesters Untersuchungen (1861a,b) eine Fülle geometrischer Betrachtungen an, die die Einsicht in den einer unendlich kleinen Bewegung zugeordneten linearen Komplex immer deutlicher und anschaulicher werden ließen.[20]

Hatte auch Möbius durch seine Untersuchungen (1838) der infinitesimalen Beweglichkeit eines starren Körpers deren Zusammenhang mit der Statik präzis aufgeklärt und so die Bedeutung des Nullsystems für die genauere Untersuchung dieser Beweglichkeit erkannt, so war es das Verdienst von Chasles, durch die genannten Betrachtungen den der infinitesimalen Bewegung zugeordneten Komplex der konkreten geometrischen Anschauung zugänglich gemacht zu haben. Später wurden seine mannigfaltigen Ergebnisse im euklidischen Raum zum Leitfaden für die projektive Erweiterung der Theorie.[21]

5.2 Zur Entdeckung der Linienkoordinaten vor Plücker

Lange bevor J.Plücker (1801-1868) die nach ihm benannten Linienkoordinaten entdeckte und zum Objekt einer systematischen Untersuchung machte, finden wir bei G.Monge (1746-1818) zum ersten Mal die Idee, einer Geraden Koordinaten zuzuordnen.[22] Die ersten Ansätze zur Definition der homogenen Achsenkoordinaten stammen aus dem Jahre 1771, im Rahmen von Betrachtungen zur elementaren analytischen Geometrie der Punkte, Geraden und Ebenen. Dabei formulierte er bereits die Bedingung, welche die sechs Koordinaten identisch erfüllen müssen. In der ersten und zweiten Auflage der "Feuilles d'Analyse ..." kam er auf diese Koordinaten zurück und berechnete mit ihnen den kürzesten Abstand zweier Geraden. Monge kam allerdings nicht auf die Idee, Gleichungen

zwischen diesen Koordinaten zu betrachten und die dadurch bestimmten Liniengebilde zu untersuchen - obwohl er bereits auf anderem Wege Linienkongruenzen studiert hatte.

Im Zusammenhang des Studiums von Raumkurven (1860 a,b) benutzte Arthur Cayley (1821-1895) gelegentlich homogene Linienkoordinaten, ohne sie allerdings explizit als solche zu bezeichnen und ohne näher auf deren Bedeutung hinzuweisen. Er kam beiläufig zur Gleichung der geraden Linie, genauer des speziellen linearen Strahlenkomplexes, benutzte sowohl Achsen- wie auch Strahlenkoordinaten und stellte die jeweiligen Bedingungsgleichungen auf. Außerdem leitete er die Bedingungsgleichung für den Schnitt zweier Geraden ab, ließ sich aber sonst nicht weiter auf diese Koordinaten ein.

In den "Notes and References", die Cayley der Herausgabe seiner "Collected Mathematical Papers" (Band 4,1891, p.616-618) beigefügt hatte, charakterisierte er selbst die historische Stellung seiner dort wieder abgedruckten Abhandlungen (1860 a,b): "The fundamental idea of these two papers is n o t that of 'the six coordinates of a line'..." Dagegen arbeitete Plücker in seiner ersten großen Arbeit zur Theorie der Linienkoordinaten (1865b) vorerst mit nur vier Koordinaten, ging aber schon direkt in die Linieng e o m e t r i e hinein, d.h. studierte ausgiebig Gleichungen zwischen diesen Koordinaten. Cayley bemerkte dazu an der schon genannten Stelle:

> "The establishment of these notions of a Complex and a Congruency, and the general idea of regarding the line as a element in the Geometry of Space are absolutely Plücker's, there is no anticipation of them in my two papers." (1860a,b)

In einer kurzen Note stellte Cayley die Gleichung für den durch fünf Geraden definierten linearen Komplex auf (1861, 1041). Er bezog sich darin auf die Arbeiten von Sylvester (1861a,b) über sechs Geraden in Involution.

Cayley schien in den folgenden Jahren diesen Problemkreis immer weiter verfolgt zu haben, bis er in einer am 11.November 1867 der Cambridge Philosophical Society vorgelegten Abhandlung (1869) seine Ergebnisse zusammenfasste. Von Plücker (1865a,b) schien er dabei dem Inhalt nach nicht beeinflusst worden zu sein: "...many of the investigations of the present memoir, in which these coordinates [of a line] are employed, have been in my possession for some years past." (1869, 67) Dies läßt sich durchaus erhärten. Einem Hinweis auf Plücker (1865b) ließ Cayley die Bemerkung folgen: "...the course of development there given to the theory is however altogether different from that in the present memoir. ...I have ... applied these coordinates to the question of the involution of six lines." (1869, 67) Letztere führte Cayley auf Sylvester (1861a) zurück. Seine eigene sich direkt daran anschließende Arbeit (1861) erwähnte er nicht, sie dient uns aber als Bekräftigung der Unabhängigkeit seiner Gedanken von Plücker. Vielleicht wurde er durch dessen Untersuchungen nur angeregt, seine eigenen möglichst rasch zu publizieren. Jedenfalls scheint es berechtigt, seine Arbeit (1869) vor derjenigen von Plücker - die allerdings g e o m e t r i s c h sehr viel tiefer greift - zu präsentieren.

Der sich schon in der Arbeit (1860) andeutende Eindruck, wie Cayley mehr nach einer eleganten analytischen Behandlungsweise der geraden Linie und ihrer

Beziehung zu anderen geometrischen Objekten suchte als nach einer Liniengeometrie, bestätigt sich in der genaueren Analyse sofort. Obwohl sich Cayley viel mit Geometrie beschäftigte, war ihm diese doch eher eine Quelle der Anregung zum Studium algebraischer Probleme als ein sich selbst genügendes Forschungsfeld.

Zu Beginn der Abhandlung stellte Cayley gleich homogene, auf Tetraederkoordinaten beruhende Strahlen- und Achsenkoordinaten auf und leitete deren Bedingungsgleichungen ab. Er zeigte weiter - in typischem Gegensatz zu Plücker, der dies nicht für so wichtig hielt - die Unabhängigkeit der Linienkoordinaten von den zwei dieselben definierenden Punkten bzw. Ebenen. Es folgen analytische Behandlungen der elementaren Beziehungen zwischen Punkten, Ebenen und Geraden.

Im letzten Abschnitt untersuchte Cayley elementare statische und kinematische Anwendungen seiner Linienkoordinaten. Er leitete etwa die Gleichgewichtsbedingungen für Kräftesysteme und Drehsysteme ab, und bemerkte, daß sie formal identisch sind.- Es handelte sich im Grunde genommen um eine Umformulierung bekannter Dinge in Linienkoordinaten, wobei - außer dem wichtigen Begriff der Koordinaten einer Kraft und einer unendlich kleinen Bewegung - kaum neue Gesichtspunkte hinzugefügt wurden. Es lag offenbar Cayley auch wenig daran, die Liniengeometrie und deren Verhältnis zur Mechanik selbst zum Objekt einer Untersuchung zu machen.

Kapitel IV

Euklidische Liniengeometrie und Mechanik: Julius Plücker

1. Das Aufblühen der exakten Wissenschaften im Deutschland des 19.Jh.

1.1 Der Einfluß Alexander von Humboldts

Alexander von Humboldt (1769-1859) war einerseits den am Neuhumanismus orientierten geistigen Bestrebungen seines Bruders Wilhelm (1767-1835) sehr zugetan, andererseits aber durch seine Forschungsreisen erfüllt von den Möglichkeiten und Aussichten einer intensivierten naturwissenschaftlichen Forschung.[1] Bei seinem Aufenthalt in Paris 1807-1827 lernte er die Mathematik und die mathematischen Wissenschaften kennen und schätzen, besonders im Zusammenhang mit dem dort gepflegten Unterrichtswesen. Er geriet dadurch in einen gewissen Konflikt mit der in Deutschland blühenden idealistischen (romantischen) Naturphilosophie.[2]

Alexander von Humboldt war durch seine Anlagen wie durch seine Erfahrungen dazu vorbestimmt, den naturwissenschaftlichen und mathematischen Wissenschaften neue Impulse zu geben, und zwar unter dem Gesichtspunkt einer 'Synthese' des Neuhumanismus mit dem Rationalismus der französischen Aufklärung und ihrer Kulmination in der Revolution. Vom Neuhumanismus wurde das Ideal der reinen Wissenschaft als Selbstzweck unter Vernachlässigung der Anwendungen übernommen und von der Gegenseite die analysierende, rationale, Betrachtungsweise der Natur. Damit ist zugleich der herrschende Geist der Naturwissenschaften des 19.Jh. charakterisiert.[3]

Als A.von Humboldt 1826 vorübergehend Paris verließ, um nach 18-jährigem Aufenthalt, einem Ruf seines Königs folgend, seine im folgenden Jahr endgültig erfolgende Rückkehr nach Berlin vorzubereiten, brachte er ein reiches Konzept zur Neugestaltung der Mathematik[4] und Naturwissenschaften in Deutschland, insbesondere in Berlin, mit ⟪Biermann, 1973, 22⟫. Es war naheliegend, daß sich Humboldt bei der Verwirklichung seiner Pläne nach Verbündeten umsah. Auf mathematischem Gebiet mußte seine Aufmerksamkeit notwendig auf A.L. Crelle (1780-1855) fallen. In erster Linie natürlich wegen dessen "Journal für die reine und angewandte Mathematik", gegründet 1826, und den sich in diesem Umkreis sammelnden Mathematikern ersten Ranges.[5] Humboldts Pläne bezogen sich auch auf das Ausbildungswesen der genannten Wissenschaften; Crelle hatte ähnliche Intentionen und so ergaben sich auch hier Berührungspunkte. So kam es, daß Crelle gewissermaßen der Vollstrecker der Humboldtschen Pläne zur Förderung von Forschung und Lehre in der Mathematik wurde.[6]

Die Reorganisation der gesamten Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften, erhielt in Deutschland einen starken Impuls durch die endgültige Übersiedlung von A.v.Humboldt von Paris nach Berlin im Jahre 1827.[7] Hatte er bereits seit Anfang der zwanziger Jahre seinen Einfluß auf die deutschen Verhältnisse geltend gemacht, konnte er ihn nun, nahe dem König und dem Ministerium stehend, voll zur Geltung bringen. "Er besaß ... die seltene Gabe, auch ohne genaueres Verständnis die Bedeutung ihm ferner liegender Gebiete zu erkennen, ja er hat nicht selten, durch seine allgemeinen Auf-

fassungen und ein sicheres Gefühl für die Forderungen der Zeit geleitet, fruchtbare Anregungen für ihm fremde Wissenschaften gegeben. Im Zusammenhang mit dieser Eigenschaft steht seine Fähigkeit, junge, vielversprechende Talente schon vor ihren eigentlichen Leistungen mit sicherem Instinkt zu erkennen. Da Humboldt zudem in Berlin eine außerordentliche gesellschaftliche Stellung genoß, die ihm durch seine Beziehung zum Hofe und seine vielseitigen Verbindungen einen großen Einfluß verschaffte, so war er der geeignete Mann, um auf Jahre hinaus die Entwicklung der ihn interessierenden Wissenschaften in Preußen zu bestimmen. Er ist denn auch der eigentliche Urheber einer Erscheinung auf dem Gebiete der Mathematik und Naturwissenschaften, die für die philologischen Fächer etwa 10 Jahre früher, nämlich 1810 mit der Gründung der Berliner Universität, beginnt, und die ich als 'deutsche wissenschaftliche Renaissance' bezeichnen möchte." ((Klein 1926, 17))

Wie sehr das Selbstverständnis der Naturwissenschaften[8] durch ihn gefördert wurde läßt sich vielleicht aus der Wende ablesen, welche durch seinen Vorsitz der 7.Versammlung der "Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte" 1828 in Berlin in dieser in der Folge einflußreicher Gesellschaft hervorgerufen wurde.[9] Ursprünglich im Anschluß an ihren Gründer, Lorenz Oken (1779-1851), romantisch-naturphilosophischen Ideen verpflichtet, veranlaßte Humboldt 1828 eine tiefgreifende Wandlung hin zum Geiste der modernen Naturwissenschaften (vgl. oben). Durch die im Winter-Semester 1827/28 gehaltenen, schon damals berühmten "Kosmos"-Vorlesungen war das Feld abgesteckt: Abwendung von der in Deutschland weit verbreiteten romantischen Naturphilosophie hin zu einer vorurteilslosen, methodisch und technisch vervollkommneten experimentellen Untersuchung der Natur.

1.2 Zur Entwicklung der synthetischen Geometrie von Poncelet bis von Staudt [10]

Der durch Monges Schüler veranlaßte Streit um die analytische und synthetische Methode (vgl. Abs. II 2) wuchs sich zu einer prinzipiellen Trennung der Auffassungen aus:

> "... die Anhänger beider Richtungen suchen ihre Ehre darin, n u r mit dem einmal erwählten Werkzeug zu arbeiten. Die Vorteile und Nachteile zeigen sich um so prägnanter, je einseitiger die Methoden ausgebildet werden." ((Klein 1926, 115))

Nach ersten kräftigen Schritten Poncelets in die synthetische projektive Geometrie, sowie den ausgewogenen Betrachtungen von Möbius zum Dualitätsprinzip und der kollinearen Verwandtschaft, findet sich bei Jacob Steiner (1796-1863) zum ersten Mal der Plan eines r e i n synthetischen Aufbaus der projektiven Geometrie.[11] Steiner hatte inhaltlich wenig Neues beigetragen; desto größer war sein Verdienst in der Systematik. Man verdankte ihm das Prinzip der sukzessiven Erzeugung höherer Gebilde aus niedereren. Konsequenz in der Durchführung eines einmal gefaßten Planes verband sich bei ihm mit einer glänzenden Darstellungsgabe.

Mit Georg Karl Christian von Staudt (1798-1867) erreichte die synthetische projektive Geometrie einen gewissen Abschluß und Höhepunkt. Nebst seiner durchgreifend systematischen, rein synthetisch und dualistisch aufgebauten Dar-

stellung der projektiven Geometrie in der "Geometrie der Lage" (1847) und den"Beiträgen ..." (1856-60), sind drei Hauptleistungen hervorzuheben: Erstens gelang von Staudt zum ersten Mal eine saubere Definition des Begriffs der Projektivität. - Zweitens kehrte er in genialer Weise den üblichen Gedankengang um und definierte das Polarsystem nicht mit Hilfe eines zugrundeliegenden quadratischen Gebildes, sondern definierte zuerst das Polarsystem und entwickelte daraus die Eigenschaften der reellen oder imaginären quadratischen Inzidenzgebilde (Kegelschnitte, bzw. Quadriken). In diesem Zusammenhang behandelte er auch zum ersten Mal auf rein projektiver Grundlage das von ihm im Anschluß an Möbius so genannte "Nullsystem", d.h. eine Korrelation im projektiven Raume, bei der jeder Punkt (=Nullpunkt) in der ihm entsprechenden Ebene (=Nullebene) liegt (1847, 191f.). - Drittens war ihm die Befreiung der Grundlagen der projektiven Geometrie von metrischen Begriffen nicht genug: er wollte auch dem Doppelverhältnis, unabhängig von seiner üblichen metrischen Definition, einen rein projektiven Sinn geben. Er benannte es deshalb neu mit "Wurf" und entwickelte eine Art Wurf-Rechnung, mit der es später gelang, unabhängig von jeder Metrik ein projektives Koordinatensystem aufzubauen. Von Staudts Hauptleistung bestand darin, zu zeigen, daß sich den Würfen eindeutig Zahlen zuordnen lassen, für welche die üblichen Rechengesetze gelten.[12]

H.Hankel (1839-1873) fasste 1869 die geschilderte Entwicklung so zusammen:

> "Die lange vernachlässigte Geometrie hat seit 50 Jahren wieder ihr Haupt erhoben und sich zu einer 'neueren Geometrie' herangebildet, welche die Vorzüge der synthetischen Methode der Alten, nämlich die räumliche Anschauung der Größenverhältnisse selbst, und die der analytischen Methode, die Allgemeinheit und Gleichförmigkeit der Prinzipien, miteinander verbindet, ohne die Nachteile beider, die Überladung mit ineleganten Figuren oder die Unterdrückung der Anschauung durch die algebraischen Kalküle zu teilen."
> (Hankel 1884, 24)

1.3 Zur Entwicklung der analytischen Geometrie von Möbius bis Plücker [13]

Die Auseinandersetzung zwischen Poncelet und Gergonne um das Dualitätsprinzip Ende der zwanziger Jahre des 19.Jh. war eine mächtige Triebfeder für die Fortentwicklung der analytischen Geometrie. In den Jahren 1827-29 findet sich eine bemerkenswerte Konzentration an bedeutende Arbeiten. Wie kaum anders zu erwarten, stößt man hier zunächst auf die Arbeiten eines brillianten ehemaligen Schülers der Ecole Polytechnique, Etienne Bobillier (1797-1832). Bobillier benutzte ausgiebig die abgekürzte Notation und führte zum Studium der Kegelschnitte zum ersten Mal ein Koordinatendreieck ein. Homogene Koordinaten verwandte er allerdings nicht explizit.

Der endgültige Durchbruch zur Arithmetisierung der Koordinaten, d.h. ihrer Loslösung von metrischen Begriffen (bisher waren "Koordinaten" immer "Strecken" gewesen), gelang erst A.F. Möbius (1790-1868) im "Barycentrischen Calcul" (1827) und etwas später J.Plücker (1801-1868) in einer Serie von Arbeiten im Crelleschen Journal (1830 a,b,c).

Plücker publizierte nicht nur ein paar wenige Arbeiten oder e i n Buch zum Gegenstand der analytischen Geometrie, sondern sein ganzes mathematisches Lebenswerk war diesem Gebiet gewidmet und hat dementsprechend dessen Entwicklung wesentlich geprägt. Plücker war weniger interessiert an der Er-

zeugung neuer Resultate als an der Demonstration neuer M e t h o d e n: er wollte einen N e u a u f b a u d e r a n a l y t i s c h e n G e o - m e t r i e liefern (vgl. dazu Abs. 2.1).

Während seine Vorgänger Bobillier und Möbius die homogenen Koordinaten nur in einem begrenzten Rahmen zur Anwendung gebracht hatten, machte sich Plücker eine klare Sicht der zugrundeliegenden Prinzipien zu eigen. Nach der Einführung von homogenen Koordinaten (1830a) entdeckte Plücker kurz darauf die Geradenkoordinaten in der Ebene (1830b,c), sowie die Ebenenkoordinaten im Raume (1832). Für das D u a l i t ä t s p r i n z i p war dadurch endlich eine saubere analytische Charakterisierung geschaffen: Sind in der Gleichung

$$x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 + x_4U_4 = 0 \qquad (1)$$

(x_1,x_2,x_3,x_4) die Koordinaten eines variablen Punktes und U_1,U_2,U_3,U_4 fest, so stellt (1) die Gleichung der allen diesen Punkten gemeinsamen Ebene dar; sind andererseits $[U_1,U_2,U_3,U_4]$ die Koordinaten einer variablen Ebene und x_1,x_2,x_3,x_4 fest, so stellt (1) die Gleichung des allen diesen Ebenen gemeinsamen Punktes dar. Der zwecks einer Dualisierung eines gegebenen Satzes vorzunehmenden Vertauschung der Worte "Punkt" und "Ebene" entspricht jetzt einfach die Vertauschung von "konstant" und "variabel" bezüglich den Größen x_1,x_2,x_3,x_4 und U_1,U_2,U_3,U_4. Die algebraischen Operationen bleiben aber genau dieselben.

Im "System der Geometrie des Raumes" (1846) unternahm es Plücker, die von ihm in der ebenen analytischen Geometrie gemachten Entdeckungen systematisch auf den Raum zu erweitern. Hier sprach Plücker auch zum ersten Mal die Idee der Koordination einer geraden Linie im Raum aus:

Im Zusammenhang mit allgemeinen Überlegungen zu einer analytischen Geometrie von vier Dimensionen (vgl. weiter unten) zeigte Plücker, daß eine solche tatsächlich k o n k r e t existiert:

> "Eine gerade Linie hängt von v i e r l i n e a r e n C o n s - t a n t e n ab, für die wir zum Beispiel, indem wir eine solche Linie durch die Gleichungs-Paare:
>
> $$x = \kappa z + \lambda \qquad t = \kappa v + \lambda w$$
> $$y = \mu z + \nu \qquad u = \mu v + \nu w$$
>
> darstellen, κ,μ,λ,ν in der zweifachen Bedeutung [d.h. als Koeffizienten von Punkt- oder Ebenengleichungen] nehmen können. Diese vier Größen, die wir als Veränderliche betrachten, welche für eine gegebene gerade Linie leicht zu construierende Werthe erhalten, s i n d d i e v i e r C o o r d i n a t e n d e r g e r a d e n L i n i e . Eine Gleichung zwischen diesen vier Coordinaten bestimmt noch keinen geometrischen Ort für die gerade Linie, sondern nur ein Gesetz, nach welchem der unendliche Raum aus geraden Linien besteht." (1846, 322)

Mit der sich anschließenden Bemerkung, er "gedenke auf diesen Gegenstand, der ... ein weiteres Gebiet für analytisch-geometrische Entwicklung zu eröffnen scheint" (1846, 322f.) zurückzukommen, beendet er seinen Ausblick auf die Liniengeometrie, deren Bedeutung er wohl bereits ahnte, ihr aber zunächst keine Zeit mehr widmen konnte oder wollte.

Die Entdeckung der Linienkoordinaten war für Plücker eigentlich nichts außergewöhnliches. Einem Menschen, dem der Begriff der Koordinaten so im

Blute lag war klar, daß jeder Figur von unveränderlicher Form Koordinaten zugeordnet werden konnten.[14]

Plücker kam nur an einer einzigen Stelle seines Werkes auf die Möglichkeit einer n-dimensionalen Geometrie zu sprechen. Er schrieb:

> "Jede geometrische Beziehung ist als die bildliche Darstellung einer analytischen Beziehung anzusehen, die, abgesehen von jeder Deutung ihre selbständige Geltung hat. So gehört auch das Princip der Reciprocität [=Dualität] ganz eigentlich der Analysis an. ... Es besteht ... auch ohne daß wir uns irgendwie um die Bedeutung der zwei oder drei Veränderlichen und Constanten kümmern, ganz unabhängig von der Betrachtung von Punkten, geraden Linien und Ebenen. ... Rein analytisch aufgefaßt, ist das Princip der Reciprocität natürlich nicht an die Dimension des Raumes gebunden und auf diese beschränkt. So wie wir, dem Übergange von der Ebene zum Raume entsprechend, eine Veränderliche mehr einführen, können wir die analytischen Erörterungen auch auf eine größere Anzahl von Veränderlichen ausdehnen. Bei vier Veränderlichen insbesondere erweitert sich die Grund-Gleichung der Reciprocität" in die folgende:
>
> $$x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 + x_4U_4 + x_5U_5 = 0 .$$

Plücker fährt dann fort:

> "Während wir die Auffassungsweise der Herren Gergonne und Poncelet als die geometrische Bedeutung des allgemeinen Princips der Reciprocität für den Fall zweier und dreier Veränderlicher ansehen, liegt die Frage nach einer geometrischen Deutung für den Fall mehrerer und namentlich für den Fall von vier Veränderlichen nahe. Die Beantwortung dieser Frage setzt die der anderen nach der geometrischen Deutung, die wir einer Gleichung zwischen vier Veränderlichen geben können, voraus." (1846, 322f.)

Hieran schließt sich das obige Zitat über die Koordinaten einer geraden Linie an.

Obwohl sich Plücker dementsprechend über die Möglichkeit einer analytischen Geometrie von n Dimensionen im Klaren war, so zeigt doch seine Formulierung ganz deutlich, daß er sich eine solche nicht im abstrakten Sinne vorstellen konnte. Nur im Falle einer gegebenen geometrischen Interpretation - wie hier etwa bei $n = 4$ die Geometrie der Geraden im Raume - hatte für ihn die Idee einer analytischen Geometrie von n Dimensionen überhaupt einen Sinn. Plücker ging auch an keiner weiteren Stelle seines Werkes auf diese allgemeinen Gedanken mehr ein - und dies trotz seines engen Kontaktes zu England (vgl. Abs. 2), wo Cayley bereits (1843) seine "Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions" geschrieben hatte.

Getrieben von einem starken ästhetischen Gefühl, entwickelte Cayley (1843) in formaler Eleganz eine n-dimensionale algebraische Geometrie mit Hilfe des Determinantenkalküls. Dabei scheint er sich um Interpretationen irgendwelcher Art keine Gedanken gemacht zu haben. Für ihn handelte es sich um einen Zweig der reinen Mathematik, der mit der Realität ohnehin nichts zu tun hatte.[15]

Dies war zutiefst im Gegensatz zu Plücker, der sich eine Loslösung des Formalen vom Inhaltlichen nicht vorstellen konnte. So schrieb Klein über ihn:

"Die Auffassung, die einen Punktraum von n Dimensionen fingiert, lehnte er im gelegentlichen Gespräch als zu 'metaphysisch' ab." (Klein 1926, 171)

Mittlerweile hatten sich die analytische und synthetische Geometrie in ihren Methoden so sehr angenähert, daß eine getrennte Betrachtung ihrer Entwicklung immer weniger sinnvoll wird. Von einem Gegensatz der Methoden konnte kaum mehr gesprochen werden. Die Allgemeinheit der Methoden der synthetischen Geometrie, ihre saubere Handhabung imaginärer Elemente im Anschluß an von Staudt, ließ nun nichts mehr zu wünschen übrig. Andererseits waren die rechnerischen Mittel der analytischen Geometrie so flexibel geworden, und im Anschluß an Plücker so gut an die geometrische Gestalt anpaßbar, daß von einer Vergewaltigung des Reiches der geometrischen Formen durch zu allgemeine Methoden nicht mehr die Rede sein konnte.

Diesen ausgewogenen Standpunkt in der Beurteilung der ehemals so konträren Methoden vertrat in den folgenden Jahrzehnten vor allem Felix Klein (vgl. Abs. V 3.2). Aber die geschilderte Harmonie sollte nicht von langer Dauer sein, eine Entwicklung, der sich Klein, ohne Erfolg, immer wieder entgegenstemmte.

2. Plückers wissenschaftliche Methode

Julius Plücker (1801-1868)[16] hatte für die Fortentwicklung der geometrischen Mechanik herausragende Bedeutung. Er war der Schöpfer der euklidischen Liniengeometrie, die nun den geeigneten Rahmen abgab, die Mechanik des starren Körpers geometrisch prägnant zu beschreiben (vgl. Abs. 3 u. 4). Im weiteren gelang es Plücker, die traditionelle synthetische und analytische Methode in der Geometrie zu einer Einheit zusammenzuschließen und damit der analytischen Geometrie zum Durchbruch zu verhelfen (vgl. Abs. 1.2 und 1.3). Die methodischen Prinzipien, die Plücker dabei leiteten, sollen in diesem Abschnitt genauer herausgearbeitet und mit seinen später verfolgten Zielen in Verbindung gesetzt werden, da diese Gedanken für die Fortentwicklung der geometrischen Mechanik von großer Bedeutung gewesen sind. - Für Plückers Anteil an der inhaltlichen Entwicklung der analytischen Geometrie sei auf die vorbildliche Analyse von Boyer ((1956)) verwiesen.[17]

2.1 Plücker als Mathematiker

Julius Plücker begann seine akademische Laufbahn mit Vorlesungen über ein Buch von J.-B. Biot (1774-1862), die "Essai de Géométrie analytique" von 1805; durch Biots Vorlesungen in Paris wurde er selbst in die neue Behandlungsweise der Geometrie eingeführt. Auch seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten verdanken ihre Entstehung den in Paris erhaltenen Anregungen.

Indirekt empfing Plücker wohl von G.Monge (1746-1818) die fruchtbarsten Anstöße. So sagte er über ihn 1833 in einer Übersicht über die Entwicklung der analytischen Geometrie:

> "Wie von D e s c a r t e s, so kann man auch von M o n g e sagen: er schuf eine neue Geometrie. So wie die Figur auf dem Papier eine Darstellung der Curve giebt, so thut es ihm auch eine Gleichung. Er sieht einen vollständigen Parallelismus zwischen Construction und Rechnung, allen geometrischen Beziehungen entsprechen algebraische. Eine algebraische Rechnung bildet sich ab in der Construction, eine geometrische Construction wird ausgedrückt durch die Sprache der Algebra." ((Plücker 1895, 617))

Gleich in seiner ersten Arbeit (1826) versuchte Plücker dem durch Monge gesetzten Ideal in der Darstellung nachzukommen. In der durch Gergonne stark überarbeitet publizierten Fassung ließ sich diese Intention allerdings kaum mehr erkennen:[18] Gergonne hatte das Originalmanuskript zu einer fast rein synthetischen Abhandlung umgearbeitet. Zudem schien es nun, wie wenn Plücker ein Plagiat an Poncelet begangen hätte. Dies hatte naturgemäß einen scharfen Angriff von demselben zur Folge, den Plücker erst später zu Gesicht bekam.[19] Jedenfalls konnte ihn diese bittere Erfahrung in seiner Absicht, endlich der analytischen Methode zum Durchbruch zu verhelfen, nur bestärken.

Plücker war sich über die Bedeutung seiner Beiträge zur analytischen Geometrie sehr wohl im klaren. Fast in jedem Titel oder Vorwort seiner Bücher und Abhandlungen sprach er von einer "neuen Behandlungsweise" - so auch bereits in den "Analytisch-Geometrischen Entwicklungen" (1828). Im Vorwort derselben brachte er zum Ausdruck, wie es ihm eigentlich darum ginge, im Geiste der synthetischen Geometrie analytische Geometrie zu treiben, d.h.

die vollkommene methodische Vereinigung der beiden Vorgehensweisen zu erreichen:

> "Die Eleganz der rein analytischen Constructionen ... ist nie in Abrede gestellt worden; wohl aber die Fruchtbarkeit derselben ... Jene rein constructive Methode sucht die Raumverhältnisse und die Beziehung der Figuren zueinander unter verschiedenen Gesichtspunkten in Verbindung zu bringen; sie geht dabei abwechselnd vom Besonderen zum Allgemeinen und vom Allgemeinen zum Besonderen. Eben hier liegt die Hauptquelle ihrer Fruchtbarkeit. ... Aber denselben unschätzbaren Vortheil, der aus dem Bestreben hervorgeht, die Resultate unter allgemeinen Gesichtspunkten zusammenzustellen, kann auch die analytische Geometrie sich aneignen, wenn sie aus ihrem Bereiche jede überflüssige Entwicklung und jede Vermischung von Construction und Rechnung verbannt." (1828, IV)

In der Vorrede zum zweiten Band der "Analytisch-Geometrischen Entwicklungen" (1831b) machte Plücker die charakteristische Bemerkung:

> "Wohl nichts begünstigt mehr das Auffinden neuer Methoden, als der Versuch, geometrische [d.h. synthetische] Sätze, die in der Aussage einfach und symmetrisch sind, analytisch zu beweisen. In dieser Hinsicht habe ich viel dadurch entbehrt, daß der 'Traité des propriétés projectives' des H. Poncelet mir bei der Ausarbeitung des ersten Bandes fremd blieb und die originellen Leistungen des H. Steiner in demselben Gebiet erst erschienen, als jener Band unter der Presse war." (1831 b, V)

Zweierlei läßt sich daraus ablesen. Erstens das schon weiter oben erwähnte Ziel Plückers, die analytische Methode so flexibel zu gestalten, daß sie ebenso gegenstands-spezifisch wird wie die synthetische Methode - und doch dabei ihre Allgemeinheit nicht verliert. Zweitens die Achtung und Wertschätzung der der reinen synthetischen Geometrie verpflichteten Mathematiker. So findet sich bei Plücker nirgends ein Hinweis auf die Überlegenheit seiner Methode oder gar eine polemische Äußerung gegenüber irgendwelchen Synthetikern. Plücker wollte von diesen lernen und deren Errungenschaften auch seiner analytischen Geometrie zugute kommen lassen.

Hatte sich Plücker auch zu der Ansicht bekannt, "daß die Analysis eine Wissenschaft ist, die , unabhängig von jeder Anwendung, selbständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloß [als] die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem großen erhabenen Ganzen erscheint" (1831 b, IX), so hatte er sich doch nie mit Analysis oder Algebra a l l e i n beschäftigt: die tatsächliche V e r b i n d u n g mit der Geometrie war ihm wesentlich; rein analytisch-algebraische Rechnungen lagen ihm fern. Darin liegt auch der tiefere Grund seiner Ignoranz gegenüber den Determinanten, die Cayley so ausgiebig benutzte. Plücker stellte keineswegs ein algebraisch-analytisches Lehrgebäude auf, das er nachher geometrisch interpretierte, -wie man aus obigem Zitat meinen könnte. Plücker geometrisierte vielmehr in algebraischem Gewande.

Plückers sprudelnde Produktivität ließ ihn nicht zu der Form-Vollendung kommen, wie man sie später in den Darstellungen von Otto Hesse (1811-1874) findet. Man erwarte von Plücker keine eleganten Rechnungen: die Form, worin ein neuer Gedanke mitgeteilt werden mußte, war für ihn verhältnis-

mäßig nebensächlich, d e r G e d a n k e s e l b e r w a r a l l e s .[20] In diesem Sinne war Plücker überhaupt kein Analytiker oder gar Algebraiker.

> "Plücker's Rechnungen tragen zum Theil auffallend den Stempel des bloßen Hülfsmittels für die Darlegung geometrischer Verhältnisse."((Clebsch 1895, XIV))

Kurz nach Beginn seiner Lehrtätigkeit in Bonn 1836 mußte Plücker auch provisorisch die ordentliche Professur in Physik übernehmen. Dies hatte später einschneidende Konsequenzen für seine wissenschaftliche Entwicklung.

In seinem vorläufig letzten Werk (1846) zur analytischen Geometrie brachte Plücker seine früher für die Ebene entwickelten Methoden zur fruchtbaren Anwendung auf die Geometrie des Raumes.

> "Wenn ... [die vorliegende Arbeit], selbst in denjenigen Theilen, die von Geometern ersten Ranges wiederholt mit Vorliebe behandelt worden sind, noch eine reiche Ausbeute neuer Resultate gegeben hat, so lege ich darauf nur insofern Gewicht, als die Methode es ist, die, wohinaus wir sie verfolgen mögen, nothwendig Neues aufdecken muß. Und diese M e t h o d e - in solchem Glauben lege ich die Feder nach mehr als zwanzig Jahren nieder, um sie für diese Art von Forschung nicht mehr zu ergreifen - wird der Wissenschaft bleibend angehören.
>
> Bonn, im Juli 1846.
>
> Der Verfasser." (1846,IIIf.)

In merkwürdigem Gegensatz zu diesen Abschiedsworten steht die im selben Buch zu findende Bemerkung - im Zusammenhang mit der ersten Erwähnung der Koordinaten einer geraden Linie - er "gedenke auf diesen Gegenstand ... zurückzukommen ..." (1846, 323). Was lag hier vor ?

Plücker ist der eigentliche Schöpfer der analytischen Geometrie. Vor ihm lag mehr oder weniger unbebautes Land. Er selbst konnte sich aber vermutlich gegenüber seinen widerstreitenden Neigungen - einerseits es bei der Darstellung der methodischen Prinzipien bewenden zu lassen und seine Aufmerksamkeit einem neuen Gebiete zuzuwenden, andererseits seiner unerschöpflichen Phantasie freien Lauf zu lassen und die analytische Geometrie weiterzuverfolgen - zu keinem eindeutigen Entschluß durchringen.

Den Ausschlag zur Hinwendung Plückers zu einem ganz neuen Gebiet, der Experimentalphysik, gaben äußere Lebensumstände. Erstens war es Plücker nicht vergönnt, zu seinen Lebzeiten in Deutschland die ihm gebührende Anerkennung zu finden. Dies lag zum einen Teil sicher an der Neuartigkeit seiner Gedanken, andererseits aber an dem von J.Steiner (1796-1863) und C.G.J. Jacobi (1804-1851) ausgehenden Kesseltreiben gegen die analytische Geometrie.[21] Die vehemente Ablehnung des Gebrauchs der Analysis im Reiche der Geometrie durch Steiner war damals geradezu sprichwörtlich und übertrug sich auf seinen großen Freundes- und Verehrerkreis in Berlin.[22] - Zweitens brachte Plücker die provisorische Übernahme der Professur für Physik im Jahre 1836 zunächst nur Verdruß. Sich ganz auf seine mathematischen Forschungen konzentrierend, widmete er anfangs nur wenig Zeit der Physik. Dementsprechend ungünstig war ein Bericht der zuständigen Behörde, der ihm auf Umwegen zu

Ohren gekommen sein muß.[23] Dies konnte Plücker nicht auf sich sitzen lassen: er wandte sich von 1841 an vermehrt und ab 1846 ausschließlich der Physik zu.

Plückers Genie erkannten zuerst die englischen Mathematiker J.J. Sylvester (1814-1897) und A. Cayley (1821-1895). Sylvester, der den zufällig bei einer Versammlung der British Association anwesenden Plücker spontan als "the master" der englischen Mathematiker begrüßte, schrieb:

> "Plücker may be said to have reformed geometry in its relations to Analysis. There comes none between him and Descartes in this line; he is in danger of having his transcendant merits as a mathematician overlooked by imperfectly juges by reason of the great Geometer having in his case merged in the experimentalist." [24]

2.2 Plücker als Experimentalphysiker

Es kann nicht die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung sein, Plückers Arbeiten zur Experimentalphysik dem Inhalt nach zu besprechen und historisch zu würdigen.[25] Vielmehr soll das qualitative und m e t h o d i s c h e Moment seiner physikalischen Arbeiten betrachtet und zu seinem mathematischen Werk in Beziehung gesetzt werden.

Charakteristischerweise erhielt Plücker seinen ersten und für alles entscheidenden Anstoß durch Michael Faraday (1791-1867). Aus den genannten Gründen blickte er ohnehin mehr auf England als Deutschland und ließ sich durch Faradays Entdeckungen zur Drehung der Polarisationsebene eines Lichtstrahls 1846 und zum Diamagnetismus 1846/47 zu eigenen Untersuchungen anregen. Damit begann eine Periode des fruchtbaren wissenschaftlichen und freundschaftlichen Kontaktes mit Faraday, der sich seinerseits durch die Ergebnisse Plückers gefördert fühlte.

Plückers enge Verwandtschaft mit Faraday zeigte sich schon in der äußeren Form seiner Veröffentlichungen: sie erinnerte an dessen "Experimental researches":

> "... er liebt es, in der Weise F a r a d a y s , seine Beobachtungen tagebuchartig in zahlreichen Paragraphen aneinander zu reihen, seine Versuche unter immer veränderten Bedingungen, mit immer neuen Stoffen zu wiederholen." ⟪Riecke 1896, XII⟫

Was den Inhalt seiner physikalischen Arbeiten anbelangte, so mag es erstaunen, darin nichts weniger als Ansätze zu einer mathematischen Durchdringung der Erscheinungswelt zu finden. Seine Arbeiten waren wesentlich q u a l i t a t i v e r Natur; Plücker war in keiner Weise, was man einen mathematischen Physiker nennt.

> "Die Eigentümlichkeit seines Wirkens liegt ... tief in der Eigenart seiner geistigen Veranlagung begründet: Plücker war von Hause aus eine stark produktive Natur, seine mehr produzierende als analysierende Denkweise fand die größte Freude an der Mannigfaltigkeit der Gestalten und Gebilde, welche seiner fruchtbaren und unerschöpflichen Phantasie entsprangen." ⟪Ernst 1933, 84⟫

> "Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen." ⟪Clebsch 1895, XIII⟫

Der scheinbare Widerspruch von Plückers mathematischer und physikalischer Periode löst sich unter dieser Perspektive auf.

Es ist aufschlußreich, daß sich Plücker besonders intensiv mit dem phänomenologisch ergiebigen aber quantitativ nur schwer erfaßbaren Gebiete des magnetischen Verhaltens der Gase beschäftigte. Seine Untersuchungen von elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen waren eigentliche Pionier-Leistungen. Durch seine Untersuchungen der Entladungsspektren wurde er zu einem gewichtigen Vorläufer von G.R. Kirchhoff (1824-1887) und R.W.Bunsen (1811-1899).

Plücker fand in England, wo in der Experimentalphysik Faraday den Ton angab, die größte Anerkennung. Im Jahre 1866 verlieh ihm die Royal Society, deren Mitglied er seit 1855 war, für seine Verdienste auf den Gebieten der Mathematik und Physik die Copley-Medaille, eine selten an Ausländer vergebene Auszeichnung, auf die Plücker besonders stolz war.

2.3 Plückers späte Jahre

Das Erscheinungsjahr der letzten seiner physikalischen Arbeiten, 1865, fällt mit demjenigen seiner ersten Arbeiten zur Liniengeometrie zusammen. Plückers Wende war wiederum eine absolute. Er zersplitterte seine Kräfte nicht im Versuch, zwei verschiedene Gebiete auf einmal zu bewältigen.

Auch der 1863-1865 stattfindenden Wende zurück zur analytischen Geometrie lagen Plückers widersprüchliche Neigungen zugrunde. Hier waren allerdings die ä u ß e r e n Ursachen nicht so deutlich. Vielleicht legten ihm die überwältigenden Erfolge von Kirchhoff und Bunsen nahe, daß seine Zeit als Experimentalphysiker abgelaufen war. Er hätte sich einem völlig neuen Gebiet zuwenden müssen, um wieder in Ruhe ungestört arbeiten zu können. Unterdessen fanden seine früheren mathematischen Arbeiten, vor allem in England und dann auch in Frankreich wachsende Anerkennung.[26]

Form und Inhalt der Arbeiten Plückers zur Liniengeometrie und Mechanik werden weiter unten (Abs. 3 und 4) einer genaueren Analyse unterzogen. Hier sollen noch die äußeren Umstände ihrer Entstehung betrachtet werden.

Felix Klein (1849-1925) von dem später noch ausführlich die Rede sein wird, bezog mit 16 Jahren im Herbst 1865 die Universität in Bonn und begann ein Studium der Mathematik und Naturwissenschaften. Ihn zog insbesondere die Experimentalphysik und die Persönlichkeit Plückers an. Plücker erkannte rasch Kleins Interesse und schnelle Auffassungsgabe. Er wählte ihn bereits 1866 zu seinem Assistenten. Er schrieb in seinem Jahresbericht [27] für 1866:

> "... und wenn geeignete Persönlichkeiten sich finden, gebe ich solchen gerne Gelegenheit, sich praktisch auszubilden. Dies ist namentlich jetzt der Fall, wo der Studiosus Felix K l e i n aus Düsseldorf mir zur Seite steht, der, obwohl erst im dritten Semester seiner Studien, alle seine Fachgenossen überragt und nach kurzer Frist ... in meinen eigenen Arbeiten, mathematischen sowohl als experimentalen, mir tätigen Beistand leisten wird. Ich darf um so mehr auf ein dauerndes Verhältnis zu ihm rechnen, als er meiner besonderen Leitung anvertraut ist, um hier seine Studien zu vollenden."

Dieses enge Verhältnis zu Plücker sollte für Kleins Zukunft entscheidend werden. Klein erwies sich in vieler Hinsicht als ein würdiger Schüler von Plücker, indem er dessen mathematische Forschungsinhalte und insbesondere -methoden mit Begeisterung aufgriff, selbständig verarbeitete und wesentlich

erweiterte. In seinem ergänzenden Bericht [28] zum oben erwähnten Schreiben Plückers bemerkte der Kurator der Universität, daß Plücker Klein "als einen angehenden Gelehrten von großer Auszeichnung signalisierte."

Klein mußte zunächst Plücker bei den Experimentalvorlesungen beistehen, wurde dann aber immer mehr in dessen Arbeiten zur Liniengeometrie hineingezogen. So wurde Klein insbesondere bei der Ausarbeitung des ersten Bandes der "Neuen Geometrie des Raumes ..." (1868) in Geist und Methode der Plückerschen Untersuchungen eingeführt.

Plücker war sich über die Bedeutung seiner neuen Ideen durchaus im klaren. Er schrieb in seinem Bericht [29] vom März 1867:

> "Mitteilungen über Experimental-Untersuchungen werden für den Augenblick durch mathematische Arbeiten - Geometrie, Mechanik, Physik betreffend - zurückgedrängt, die mich gleichzeitig in Anspruch nehmen, und denen ich große Tragweite beilege. Die Ausführung der Prinzipien, welche in den bereits veröffentlichten Abhandlungen niedergelegt sind, wird die Hauptaufgabe meines Lebens bilden. Dieselbe würde meine Kräfte, bei der Ausdehnung welche sie annimmt, übersteigen, wenn ich nicht die Aussicht hätte, von wissenschaftlichen Freunden in England und Frankreich unterstützt zu werden."

Noch während der Drucklegung des ersten Bandes wurde Plücker am 22.Mai 1868 aus dem Leben abberufen. Vom zweiten Band (1869) lag nur ein kleiner Teil im Manuskript vollständig vor, den Klein nach den Intentionen und Plänen von Plücker vervollständigte und herausgab. Kaum zwanzig Jahre alt meisterte er diese Aufgabe souverän.

3. Plückers erste Arbeiten zur Liniengeometrie und Mechanik

3.1 Liniengeometrie

Die geometrische Forschung wieder aufgreifend, knüpfte Plücker genau dort an, wo er vor knapp 20 Jahren aufgehört hatte (vgl. Abs. 1.3). Erstaunlicherweise ist dies ihm selbst erst später zum Bewußtsein gekommen:

> "...I may state, that the principles upon which my paper is based were advanced by me, nearly twenty years ago (Geometry of Space, No. 258 [1846, 322f.]), but this had entirely escaped from my memory when I recurred to Geometry some time since." (1865 b, 537 (Anm.))

Die erste Abhandlung zur Liniengeometrie, "On a New Geometry of Space", wurde zunächst in den Proceedings der Royal Society of London angezeigt (1865a) und dann in den Philosophical Transactions publiziert (1865b). Die Gründe, weshalb Plücker auf Englisch schrieb und in London veröffentlichte, haben wir besprochen (Abs. 2.2 und 2.3).

Ausgehend von der doppelten Auffassungsweise einer Geraden als Punktreihe (="Strahl") und als Ebenenbüschel (="Axe") führte Plücker zunächst verschiedene Koordinaten der geraden Linie ein, beschränkte sich dann aber in der systematischen Diskussion auf die vier Größen r, s, ρ, σ definiert durch

$$x = rz + \rho$$
$$y = sz + \sigma$$

d.h. durch die Projektionen der Geraden auf die x,z- und die y,z-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

Als Komplex, Kongruenz oder Konfiguration (Strahlengebilde) definierte er diejenige Menge von Strahlen, die durch eine, zwei bzw. drei Gleichungen zwischen den vier Linienkoordinaten bestimmt ist. Die durch ein bzw. zwei l i n e a r e Gleichungen bestimmten l i n e a r e n Komplexe und l i n e a r e n Kongruenzen unterzog er nun einer ersten Analyse.[30]

Auf der Suche nach der allgemeinsten Gleichung eines linearen Komplexes kam Plücker zur Einführung einer fünften Koordinate, definiert durch die Projektion der Geraden auf die x,y-Ebene:

$$ry - sx = r\sigma - s\rho = \eta \quad .$$

Die Gleichung des Komplexes erhält dann die Form

$$Ar + Bs + C + D\sigma + E\rho + F(s\rho - r\sigma) = 0 \, ,$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D(y'z-z'y)+E(x'z-z'x)+F(x'y-y'x) = 0 \quad .$$

Plücker zeigte, daß dies tatsächlich die allgemeinste Gleichung eines linearen Komplexes ist. Weiter definierte er konjugierte Geraden bezüglich eines linearen Komplexes und diskutierte die durch diesen induzierte (Null-) Korrelation.

Wie Plücker bemerkte, hängt die Gleichung eines linearen Komplexes von fünf Konstanten ab, wobei davon vier die sogenannte H a u p t a c h s e festlegen. Weiter definierte er die lineare Kongruenz als Schnittgebilde zweier linearer Komplexe und leitete daraus ihre Eigenschaften ab. Er führte die Achse und die L e i t g e r a d e n d e r K o n g r u e n z ein und

bemerkte, daß letztere entweder reell oder konjugiert (hoch-)imaginär sind und daß alle Geraden der Kongruenz beide Leitstrahlen schneiden.

Eine Konfiguration als Schnitt dreier linearer Komplexe ist immer ein einschaliges Hyperboloid, wie Plücker sehr elegant ableitete:

> "By combining the three complexes $\Omega, \Omega', \Omega''$ we get three couples of directrices [=Leitgeraden]. Each ray of the configuration, belonging simultaneously to the three congruencies, meets both directrices of each couple. Hence in the general case the configuration is a h y p e r b o l o i d ; i t s r a y s c o n s t i t u t e o n e o f i t s g e n e r a t i o n s , w h i l e t h e d i r e c t r i c e s o f a l l c o n g r u e n c i e s p a s s i n g t h r o u g h i t a r e r i g h t l i n e s o f i t s o t h e r g e n e r a t i o n." (1865b, 505)

In einer "Additional Note", eingereicht am 11.Dezember 1865, machte Plükker eine Reihe von wichtigen Bemerkungen. Zunächst führte er mit Hilfe von homogenen Punkt- oder Ebenenkoordinaten (im Rahmen eines rechtwinkligen Koordinatensystems) h o m o g e n e Strahlen- bzw. Achsenkoordinaten einer geraden Linie ein (vgl. Abs. V 2.1) und formulierte deren identische Bedingungsgleichung.

Nach einigen Überlegungen zu Komplexen und Kongruenzen höheren Grades versuchte Plücker Geradenkoordinaten zu definieren und zwar ohne Punkte oder Ebenen, die mit der entsprechenden Geraden inzident sind, zu verwenden. Dabei hatte er im Sinn, durch

> "a system of coordinates which, independently of points and planes, fixes the position of a right line in space, we are enabled, by regarding right lines as elements of space, to reconstruct the whole geometry without recurring to the ordinary system." (1865b, 539)

In Analogie zur Bestimmung von Punkt- und Ebenenkoordinaten durch den Schnitt von drei Ebenen bzw. die Verbindungsebene dreier Punkte wollte er eine Gerade als Schnitt von vier linearen Komplexen einführen und ihre Koordinaten als diejenigen Parameter der vier Komplexe, welche diese Geraden enthalten, definieren.(Der Parameter eines linearen Komplexes ist eine für diesen charakteristische Konstante. Plücker leitete ihn schon (1865b,485) ab; hier wird er aber erst im Abschnitt 4.2 eingeführt.)
Dies ist aber nicht möglich, da sich vier Komplexe im allgemeinen in z w e i Geraden schneiden ((vgl. Schoenflies in Plücker 1895, 614f)). Diese grundlegenden Überlegungen Plückers wurden einige Jahre später, (1869), von H.G. Zeuthen (1839-1920) aufgegriffen und - allerdings in etwas anderer Weise - weitergeführt (vgl. Abs. 5).

Ganz am Schluß dieser langen für die Liniengeometrie bahnbrechenden Arbeit kam Plücker noch auf Kräfte zu sprechen:

> "... f o r c e may be regarded as a merely geometrical notion, and there is only one step more to be taken in order to arrive at a 'Geometry of Forces', as there is a geometry based on the notion of right lines." (1865b, 539)

Charakteristisch für diese Arbeit ist, daß Plücker abwechslungsweise die synthetische und analytische Methode heranzog. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Darlegung der g e o m e t r i s c h e n Eigenschaften des Linienraumes und dessen linearen Gebilden. Entscheidend war die Idee Plückers, die Gerade als R a u m e l e m e n t einzuführen, und ihr demzufolge Koordinaten zuzuordnen.

Er untersuchte zum ersten Mal diejenigen Gebilde, die durch Gleichungen zwischen diesen Koordinaten definiert sind. Was noch heute überzeugend wirkt, sind die mit Sorgfalt und Leichtigkeit durchgeführten geometrischen Überlegungen und nicht deren formale Darstellung. Kannte man Cayleys erste Erwähnung der Linienkoordinaten (1860a,b), so konnte der Plückersche Formalismus nur als sehr schwerfällig erscheinen. Von daher ist es auch verständlich, daß in d i e s e r Hinsicht sich kaum jemand an Plücker orientierte und man später vor allem an die Untersuchungen von Cayley, G. Battaglini (1826-1894) und Klein anknüpfte. Die neuen Grundbegriffe der Liniengeometrie, sowie ihre erste eingehende geometrische Analyse verdankte man aber fast ausschließlich Plücker.

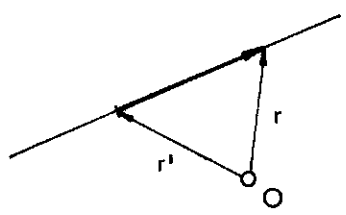
Plücker blieb die Cayleysche Arbeit (1860a,b) bei der Abfassung seiner grundlegenden Darstellung (1865b) unbekannt, wie er selbst in einer Anmerkung (1865b, 537) bezeugte. Er stellte dort auch fest, wie sein und Cayleys Gesichtspunkt ein völlig verschiedener sei. - Bemerkenswert ist vor allem, daß die elegante formale Darstellung Cayleys auf die Abfassung der "Neuen Geometrie des Raumes ..." (1868) von keinem Einfluß war. Plücker beschränkte sich dort weiterhin auf homogene kartesische Linienkoordinaten. Erst Klein ging im Anschluß an Cayley und Battaglini zu homogenen projektiven Linienkoordinaten über (Abs. V 2.1).

3.2 Mechanik

Einen ersten Problemkreis, die Einführung der Linienkoordinaten, hatte Plücker bereits (1865b) behandelt. Nun will er daran gehen

> "... to connect, in mechanics, translatory and rotatory movements with each other by a principle in geometry analogous to that of reciprocity. ... I met a solution ..., which in vain I sought for in P o i n s o t ' s ingenious theory of coupled forces, by pursuing the geometrical way." (1866, 546)

Zur übersichtlichen Darstellung der Ergebnisse Plückers verwenden wir wieder die heute übliche Vektorschreibweise; Plücker schrieb noch alles in Komponenten aus. Als Koordinaten einer Kraft bezeichnete Plücker die zwei mal drei Komponenten der Vektoren $r-r'$ und $r \times r'$ wobei r' den Angriffspunkt bedeutet und r die Richtung sowie die Intensität der Kraft festlegt (Fig.1).



Figur 1

D.h. $|r-r'|$ ist die Intensität der Kraft und $|r \times r'|$ der Betrag des Momentes bezüglich des Ursprunges O. Nur letzteres ist von diesem abhängig. Offenbar gilt identisch $(r-r') \cdot (r \times r') = 0$.

Das der formalen Addition beliebig vieler Kräfte $(f_i ; \bar{f}_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$ entsprechende Resultantengebilde nannte Plücker eine D y n a m e $(w;\bar{w})$, deren 6 Koordinaten definiert sind durch

$$(w;\bar{w}) = \sum(f_i;\bar{f}_i) = (\sum f_i;\sum \bar{f}_i) .$$

Im allgemeinen ist dann natürlich

$$w \cdot \bar{w} \neq 0.$$ [31]

Nachdem Plücker im ersten Abschnitt den Zusammenhang der Kräfte und deren Zusammensetzung mit der Liniengeometrie geklärt hatte, ging er nun im zweiten Abschnitt daran, dasselbe für (endliche!) Rotationen zu tun. Was das Physikalische betrifft, drückte er sich hier allerdings nicht sehr klar aus.[32] Gemäß der mechanischen Vorstellung einer Drehung um eine Gerade, erschien es in Analogie zur Definition einer Kraft sinnvoll, eine solche durch zwei Ebenen festzulegen. Sind diese Ebenen gegeben durch $n \cdot r = 1$ und $n' \cdot r = 1$, so definierte Plücker die Koordinaten einer "rotatory force" oder Drehung durch $(n-n'; n \times n')$. Auch hier bezeichnete er $|n-n'|$ als die Intensität und $|n \times n'|$ als das Moment der Drehung. Wegen der Abhängigkeit der Ebenengleichungen vom Koordinatenursprung ist nun hier aber sowohl die Intensität wie das Moment von diesem abhängig. Plückers Begriff der rotatorischen Kraft oder Drehung war also keineswegs eindeutig bestimmt durch den Zwischenwinkel der beiden beteiligten Ebenen. Er sagte darüber an einer Stelle des Nachlaßes:

> "Hier verlassen wir die gebräuchliche Definition der Größe einer Rotation, die man durch den beschriebenen Rotationswinkel zu bestimmen pflegt. Unsere Bestimmung der Rotationsgröße ist von der Annahme des Anfangspunktes der Koordinaten abhängig."
> ((Zitiert nach Schoenflies 1904, 401f.))

Was Plücker unter der "rotatory force" als Ursache einer Rotation verstanden hatte, blieb im Ungewissen[33]. Anscheinend kam es Plücker auf eine Präzision in dieser Hinsicht gar nicht so an. Was ihn interessierte - von wenigen vorläufigen Andeutungen abgesehen -, waren nicht die mechanischen Verhältnisse, sondern mehr die sich an statische Überlegungen anknüpfenden g e o m e t r i s c h e n Tatbestände. Neue Termini sind in dem Sinne nur als Hinweis auf (noch nicht präzisierte) bildhafte Vorstellungen zu sehen.

Diese vor allem auf begrifflicher Ebene zu Tage tretenden Mängel versuchte Klein in seiner bedeutenden Arbeit "Über den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper" (1871b) zu klären (vgl. Abs. V 2.6). Die Plückerschen Ausführungen geben jedoch in f o r m a l e r Hinsicht zu keinen Bedenken Anlaß.

In ihnen kommt deutlich die Enge des euklidischen Rahmens, sowie der undualistischen Art der euklidischen Maßbestimmung zum Ausdruck. Die Plückersche Fassung der "rotatory force" oder Drehung hat etwas Künstliches, Konstruiertes an sich, obwohl sie sich letztlich formal gleich verhält wie die gewöhnliche Kraft.

Plücker hat sozusagen im Rahmen der euklidischen Geometrie das Äußerste geleistet zur Einführung einer gewissen reziproken Beziehung zwischen Kräften und Rotationen. Daß dies in der völlig undualistisch veranlagten euklidischen Geometrie zu einem im Ganzen unbefriedigten Ergebnis kommen mußte, ist eigentlich klar.

Die Abhandlung (1866) gleicht der Form nach deutlich den experimental-physikalischen Arbeiten Plückers: sie besteht aus einer Aneinanderreihung von Ideen-Skizzen, für deren genauere Durchdringung sowie präzise Darstellung und Formulierung sich Plücker keine Zeit genommen hatte. Es ist erstaunlich,

wie wenig bei Plücker der Einfluß von Möbius' klar durchdachter Untersuchung (1838) zu spüren ist. Vermutlich hatte er sie zur Zeit ihres Erscheinens gekannt, dann aber wieder völlig vergessen. Es läßt sich jedenfalls kein einziger Hinweis auf sie in (1866) feststellen. Man darf also festhalten, daß Plücker seine Ergebnisse unabhängig von Möbius gewonnen hatte.

4. "Neue Geometrie des Raumes ..."

Plücker schien die zeitgenössische Entwicklung der geometrischen Literatur wenig bis gar nicht verfolgt zu haben. Der einzige Literaturhinweis in der ganzen "Neuen Geometrie des Raumes ..." bezieht sich auf Möbius (1833) und Magnus (1837), und zwar auf die durch einen linearen Komplex erzeugbare korrelative Verwandtschaft (1868, 31). Dieser Umstand erklärt sich weitgehend durch Plückers produktive Veranlagung (vgl. Abs. 2), welche der Ausarbeitung und Bewältigung der eigenen Ideen den ersten Rang vor der Verarbeitung der geistigen Produkte Anderer einräumen muß. "So konnte es in einzelnen Fällen geschehen, daß ihm Untersuchungen Anderer, welche zu den seinigen in Beziehung standen, unbekannt blieben, und daß er zuweilen von neuem fand und als das Seinige betrachtete, was Andere vor ihm bereits ausgesprochen hatten. Er durfte sich damit trösten, daß öfter das entgegengesetzte geschah, und andere Geometer sich Entdeckungen zuschrieben, welche Plücker längst vor ihnen gemacht hatte." ((Clebsch 1895, XIV)) In dieser Hinsicht waren sich übrigens Möbius und Plücker sehr verwandt.

4.1 Euklidische Liniengeometrie

Die bereits in einer "Additional Note" zur Arbeit (1865b) angedeuteten homogenen euklidischen Linienkoordinaten stellte nun Plücker an den Anfang seiner "Neuen Geometrie ...".

Die ursprünglichen Linienkoordinaten r, s, ρ, σ, η einer Geraden g waren definiert durch die Projektion auf die x,z- und die y,z-Ebene:

$$x = rz + \rho$$
$$y = sz + \sigma$$

sowie die Projektion auf die x,y-Ebene:

$$ry - sx = r\sigma - s\rho = \eta \ .$$

Ist die Gerade g durch zwei Punkte (x,y,z), $(x',y'z')$ festgelegt, so wird

$$r = \frac{x - x'}{z - z'} \qquad s = \frac{y - y'}{z - z'}$$

$$\rho = \frac{x'z-xz'}{z - z'} \qquad \sigma = \frac{y'z-yz'}{z - z'} \qquad \eta = \frac{xy' - x'y}{z - z'} \ .$$

Statt dieser fünf Koordinaten werden nun die Verhältnisse von sechs neuen Koordinaten wie folgt eingeführt:

$$r : s : 1 : -\sigma : \rho : \eta \ .$$

Dies ist aber gleich:

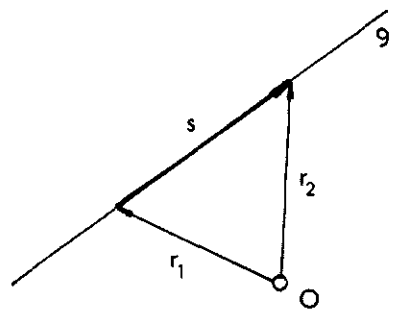
$$(x-x') : (y-y') : (z-z') : (yz'-y'z) : (x'z-xz') : (xy'-x'y).$$

Dadurch ist die Koordinatenbestimmung in bezug auf das Koordinatensystem eine symmetrische geworden. Plücker nannte diese sechs Größen die K o o r d i n a t e n d e r G e r a d e n durch die Punkte (x,y,z), (x',y',z').

Führt man die Ortsvektoren $r_1 = (x,y,z)$, $r_2 = (x',y',z')$ ein (Fig. 2), so sind die ersten drei Koordinaten offenbar gleich $r_1 - r_2$ und die letzten drei gleich $r_1 \times r_2$. Die Koordinaten der Geraden lassen sich also

in moderner Schreibweise darstellen durch das Vektorpaar $(r_1 - r_2;\ r_1 \times r_2)$, wobei z.B. die Länge von $r_1 - r_2$ nur bis auf einen Faktor bestimmt ist. $r_1 \times r_2$ heißt das M o m e n t d e r G e r a d e n g b e z ü g l i c h O .

Die von Plücker natürlich noch nicht verwendete Darstellung von Geraden durch Vektorpaare erweist sich als sehr adäquat für die Beschreibung der euklidischen Liniengeometrie.[34] Im folgenden wird von ihr systematisch Gebrauch gemacht, um so die Ergebnisse Plückers in einheitlicher und prägnanter Weise zu beschreiben.



Figur 2

Offenbar gilt zwischen den Koordinaten einer Geraden die B e d i n g u n g s - g l e i c h u n g:
$(r_1 - r_2) \cdot (r_1 \times r_2) = 0$.
Jeder Geraden g, der ein beliebiger linienflüchtiger Vektor $s = r_1 - r_2$ zugeordnet ist, kann durch ein Vektorpaar $(s;\bar{s})$ mit $\bar{s} = r_1 \times r_2$ dargestellt werden und umgekehrt wird durch jedes Vektorpaar modulo $|s|$ eindeutig eine Gerade bestimmt (vgl. Abs. II 6.2). Das geometrische Gebilde, das einem solchen Vektorpaar entspricht, ist eine Gerade, versehen mit einem wohlbestimmten linienflüchtigen Vektor.

Es gelten offenbar die Sätze:

- Die nur bis auf einen Faktor bestimmten Plückerschen Koordinaten $(r_1 - r_2\ ;\ r_1 \times r_2)$ stellen eindeutig eine Gerade dar.
- Normierte Plückersche Koordinaten stellen eindeutig eine Gerade dar, die Träger eines linienflüchtigen Vektors ist.

Verschiebt man den Ursprung O um den Vektor t, so geht die Darstellung $(s;\bar{s})$ über in die Darstellung $(s;\bar{s} + t \times s)$. Folglich ist nur der Momentenvektor $\bar{s}$ vom Ursprung abhängig (vgl. Abs. II 6.2).

Wie schon Poinsot entdeckt hatte, gilt nun:

- Kräfte verhalten sich wie Geraden, die Träger eines linienflüchtigen Vektors sind.

Die sechs Koordinatenwerte $(s;\bar{s})$ sind dabei absolut zu nehmen und nicht nur in ihrem Verhältnis. Sie werden dann von Plücker als die K o o r d i - n a t e n d e r K r a f t bezeichnet. Der Vektor s ist der auf der Wirkungslinie frei verschiebbare Kraftvektor und der Vektor $\bar{s}$ gleich dem Momentvektor der Kraft bezüglich des Ursprungs O . Auch hier gilt natürlich $s \cdot \bar{s} = 0$, denn so ist die Richtung von $\bar{s}$ mechanisch ja definiert.

Zusätzlich zur Bestimmung der Koordinaten einer Geraden durch zwei Punkte (= "Strahlenkoordinaten") betrachtete Plücker auch die Bestimmung der Koordinaten durch zwei Ebenen (= "Axenkoordinaten"). Wie er feststellte, haben beide Koordinatenbestimmungen eine gewisse Bedeutung für die Mechanik:

> "So wie wir eine Kraft durch eine, als S t r a h l [=Punktreihe] betrachtete, gerade Linie und durch zwei auf ihr liegende P u n c t e darstellen, so können wir eine Rotation (richtiger [!] ausgedrückt, die andere Art von Kraft, welche eine Rotation hervorbringt) durch eine als A x e [= Ebenenbüschel] betrachtete gerade Linie und durch zwei durch die Axe gelegte E b e n e n darstellen. ... Während aber Strahlen und Axen an und für sich identisch dasselbe sind, stehen Kräfte und Rotationen wiederum coordiniert nebeneinander, analog wie bei Puncten und Ebenen." (1868, 23f.)

Wie schon Chasles, ahnte hier Plücker das Richtige, kann aber der Natur der Sache nach noch zu keiner vollkommenen Einsicht durchstoßen.

Mehr beiläufig kam Plücker auf den Begriff der D y n a m e zusprechen. Unter dieser verstand er ein K r ä f t e s y s t e m , d.h. die Summe aus endlich vielen Einzelkräften. Ihr können ebenfalls sechs Koordinaten zugeordnet werden, die aber erstens absolut genommen werden müssen und zwischen denen zweitens keine Bedingungsgleichung besteht. Indem er die Frage stellte, was die Koordinaten einer Dyname bedeuten, wenn ihnen nur r e l a t i v e Werte zugeordnet werden, kam Plücker zum Ergebnis:

> "Dann entschwindet das specifisch Mechanische und, um mich auf eine kurze Andeutung zu beschränken: es treten geometrische Gebilde auf, welche zu Dynamen in derselben Beziehung stehen, wie gerade Linien zu Kräften und Rotationen." (1868, 25)

Wie das genauer zu verstehen ist, führte Plücker nicht aus. Es handelt sich natürlich um den linearen Komplex, was Plücker aber nirgends explizit ausgesprochen hatte.

4.2 Kräftesysteme und lineare Komplexe

Zum besseren Verständnis des Verhältnisses mechanischer Kräftesysteme , von Plücker Dynamen genannt, zu den linearen Komplexen als geometrische Gebilde, sei hier ein Abschnitt eingeschoben, dessen Inhalt nicht auf Plücker zurückgeht, sondern bereits teilweise die Untersuchungen von Klein (1871b) vorweg nimmt. Der Vorgriff an dieser Stelle ist notwendig, um die euklidische Liniengeometrie und ihr Verhältnis zu den Grundbegriffen der geometrischen Mechanik einigermaßen geschlossen darstellen zu können.

Ein Kräftesystem ist definiert als die Summe beliebiger, aber endlich vieler Kräfte $(f_i ; \bar{f}_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$:

$$(w;\bar{w}) = \sum(f_i ; \bar{f}_i) = (\sum f_i ; \sum \bar{f}_i) \quad \text{mit} \quad w \cdot \bar{w} \neq 0 .$$

(vgl. Abs. II 6.2) Man nennt die absolut genommenen Werte der Komponenten der Vektoren $w,\bar{w}$ d i e K o o r d i n a t e n d e s K r ä f t e s y s t e m s oder der D y n a m e. Jedes Kräftesystem $(w;\bar{w})$ kann als Summe einer Einzelkraft und eines Kräftepaares aufgefasst werden. Es kann aber ebenso durch zwei windschiefe Kräfte dargestellt werden. Das Resultat nennt man dann ein K r a f t k r e u z. Ein solches läßt sich etwa wie folgt gewinnen.

Sei die Trägergerade $\lambda(f_1 ; \bar{f}_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, einer beliebigen Kraft vorgegeben. Sind die Koordinaten der anderen Kraft gleich $(f_2 ; \bar{f}_2)$, so muß folgendes gelten, wenn sie ein Kraftkreuz bilden sollen, das $(w ; \bar{w})$ äquivalent ist:

$$\lambda(f_1 ; \bar{f}_1) + (f_2 ; \bar{f}_2) = (w;\bar{w}) ,$$

d.h.

$$\lambda f_1 + f_2 = w \quad \text{oder} \quad f_2 = w - \lambda f_1$$

$$\lambda \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \bar{w} \quad \text{oder} \quad \bar{f}_2 = \bar{w} - \lambda \bar{f}_1 .$$

Daraus läßt sich eindeutig λ , und damit die Kraft $(f_2 ; \bar{f}_2)$ bestimmen: Wegen $f_1 \cdot \bar{f}_1 = 0$ und $f_2 \cdot \bar{f}_2 = 0$ ist nämlich

$$\begin{aligned} f_2 \cdot \bar{f}_2 &= (w - \lambda f_1) \cdot (\bar{w} - \lambda \bar{f}_1) \\ &= w \cdot \bar{w} - \lambda(f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w) = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda = \frac{w \cdot \bar{w}}{f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w} \quad \text{für} \quad f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w \neq 0 .$$

Durch die Zuordnung

$$f_2 = w - \frac{w \cdot \bar{w}}{f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w} f_1$$

$$\bar{f}_2 = \bar{w} - \frac{w \cdot \bar{w}}{f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w} \bar{f}_1$$

ist eindeutig $(f_2;\bar{f}_2)$, einschließlich der Normierung, bestimmt.

Durch

$$f_2 = (f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w)\, w - (w \cdot \bar{w})\, f_1$$

$$\bar{f}_2 = (f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w)\, \bar{w} - (w \cdot \bar{w})\, \bar{f}_1$$

ist eine Z u o r d n u n g von G e r a d e n , vermittelt durch das Kräftesystem $(w;\bar{w})$, bestimmt, sofern $w \cdot \bar{w} \neq 0$. Diese Zuordnung hängt n i c h t vom Betrag von $w \cdot \bar{w}$ ab. Diejenigen G e r a d e n , für die $f_1 \cdot \bar{w} + \bar{f}_1 \cdot w = 0$ ist, werden sich selbst zugeordnet. – Da den 6 Koordinaten $(w;\bar{w})$ wegen $w \cdot \bar{w} \neq 0$ keine besonderen Bedingungen auferlegt sind, stellt

$$\bar{w} \cdot f_1 + w \cdot \bar{f}_1 = 0$$

die allgemeinste lineare Gleichung zwischen den Koordinaten der Geraden $\lambda(f_1;\bar{f}_1)$ dar. Im Sinne von Plücker nennt man das so bestimmte Gebilde einen l i n e a r e n K o m p l e x . Diejenigen Geraden $\lambda(f_1;\bar{f}_1)$, welche der Bedingung $\bar{w} \cdot f_1 + w \cdot \bar{f}_1 = 0$ gehorchen (das sind die Geraden des linearen Komplexes), können zur Zerlegung von $(w;\bar{w})$ in zwei Einzelkräfte, d.h. in ein Kraftkreuz, offenbar nicht herangezogen werden.

Die Geraden-Zuordnung, die durch ein Kräftesystem vermittelt wird, läßt sich auch als eine Zuordnung von Geraden auffassen, die durch einen linearen Komplex hervorgerufen wird und umgekehrt. Denn aus den obigen Überlegungen folgt ohne weiteres der S a t z

> Zu jedem Kräftesystem $(w;\bar{w})$ mit $w \cdot \bar{w} \neq 0$ gibt es genau einen linearen Komplex mit der Gleichung
> $\bar{w} \cdot f + w \cdot \bar{f} = 0$, wobei $f \cdot \bar{f} = 0$.

Zu jedem linearen Komplex mit der Gleichung

$\bar{w} \cdot f + w \cdot \bar{f} = 0$, wobei $f \cdot \bar{f} = 0$, $w \cdot \bar{w} \neq 0$,

gibt es unendlich viele Kräftesysteme der Form $\lambda(w;\bar{w})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die Geometrie des linearen Komplexes wird im nächsten Abschnitt genauer studiert werden. - Sind zwei Geraden im Sinne der obigen Abbildung einander zugeordnet, so nennt man sie bezüglich des linearen Komplexes einander k o n j u g i e r t. Einen linearen Komplex mit $w \cdot \bar{w} = 0$ nennt man s p e z i e l l oder e n t a r t e t . Das Vektorpaar $(w;\bar{w})$ stellt dann eine G e r a d e dar.

Ob man von einer Kraft $(f;\bar{f})$ oder von einer Geraden $(f;\bar{f})$ spricht, ist einerlei, wenn nur im Auge behalten wird, daß im ersten Fall die Koordinatenwerte absolut zu nehmen sind, während sie im zweiten Fall nur bis auf einen Faktor bestimmt sind. Gemäß dem obigen Satz hat man nun bei Kräftesystemen und linearen Komplexen eine ganz analoge Situation: mit $(w;\bar{w})$ kann man sowohl ein Kräftesystem wie einen linearen Komplex bezeichnen, wobei im ersten Fall die Koordinatenwerte absolut und im zweiten Fall nur bis auf einen (reellen) Faktor bestimmt sind.

4.3 Geometrie des linearen Komplexes

Nach Plücker ist ein linearer Komplex bestimmt durch eine homogene lineare Gleichung in den Koordinaten $(x-x', y-y', z-z', yz'-y'z, x'z-xz', xy'-x'y)$, d.h. etwa durch

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + D(yz'-y'z) + E(x'z-xz') + F(xy'-x'y) = 0 .$$

Setzt man $\bar{a} = (A,B,C)$, $a = (D,E,F)$, so läßt sich dies wieder in moderne Vektornotation übersetzen:

$$\bar{a} \cdot (r-r') + a \cdot (r \times r') = 0 .$$

Sei etwa r' fest und r variabel, so erhält man wegen $a \cdot (r \times r') = r \cdot (r' \times a)$

$$(\bar{a} + r' \times a) \cdot r - \bar{a} \cdot r' = 0 ,$$

also eine Ebenengleichung der Form

$$n \cdot r - \delta = 0 .$$

Folglich liegen alle Strahlen durch den Punkt r' in einer Ebene U , bilden also ein Strahlenbüschel. Gemäß der allgemeinen Theorie der Reziprozität nennt Plücker U die Polarebene von r' . Zur Unterscheidung von der Polaritätsbeziehung an einer Fläche 2 . Grades soll U nach dem Vorschlag von Möbius als die N u l l e b e n e des Punktes r' bezeichnet werden. Jedem Punkt r' des Raumes ordnet also der lineare Komplex eindeutig eine durch ihn hindurchgehende Ebene, eben die Nullebene, zu; in dieser liegt ein ganzes Büschel von Strahlen des Komplexes.

Es gilt aber auch die Umkehrung: jeder Ebene U ordnet der Komplex eindeutig einen in ihr liegenden Punkt, den N u l l p u n k t von U zu, durch welchen ein ganzes Büschel von Strahlen des Komplexes geht.- Um dies zu zeigen, geht man aus von der Ebene

$$n \cdot r - \delta = 0$$

und setzt $n = \lambda(\bar{a} + r' \times a)$ und $\delta = \lambda(\bar{a} \cdot r')$. Nun muß gezeigt werden, daß es zu jedem n und δ genau ein r' gibt.

Dazu berechnet man:

$$\begin{aligned} n \cdot a &= \lambda(\bar{a} \cdot a + (r' \times a) \cdot a) = \lambda(a \cdot \bar{a}) \\ n \times \bar{a} &= \lambda(\bar{a} \times \bar{a} + (r' \times a) \times \bar{a}) \\ &= -\lambda(\bar{a} \times (r' \times a)) \\ &= -\lambda((\bar{a} \cdot a)\, r' - (\bar{a} \cdot r')\, a) \\ &= -\lambda(\bar{a} \cdot a)\, r' + \delta a \\ &= -(n \cdot a)\, r' + \delta a\,. \end{aligned}$$

Damit wird

$$(n \cdot a)\, r' = \delta a - n \times \bar{a}$$

$$r' = \frac{\delta a - n \times \bar{a}}{n \cdot a}\,. -$$

Die Vektoren a, $\bar{a}$ eines Kräftesystems bzw. eines linearen Komplexes $(a;\bar{a})$ mit der Gleichung $-\bar{a} \cdot p + a \cdot \bar{p} = 0$ haben im allgemeinen beliebige Lagen im Raum. Gibt es aber einen Ursprung O so, daß a parallel zu $\bar{a}$? Verschiebt man den Ursprung O um den Vektor t, so geht das Vektorpaar jeder Kraft $(f;\bar{f})$ in das Vektorpaar $(f;\bar{f} + t \times f)$ über, also geht das Vektorpaar $(a;\bar{a})$ des Kräftesystems, d.h. des linearen Komplexes, ebenfalls in ein Vektorpaar der Form $(a;\bar{a} + t \times a)$ über. Die ursprüngliche Frage lautet also: Gibt es ein t so, daß a parallel zu $\bar{a} + t \times a$ wird, d.h. daß gilt

$$\kappa a = \bar{a} + t \times a\,, \quad \kappa \in \mathbb{R}\ ? \tag{1}$$

Wird diese Gleichung skalar mit a multipliziert, so erhält man

$$\kappa(a \cdot a) = \bar{a} \cdot a + (t \times a) \cdot a = \bar{a} \cdot a\,,$$

also

$$\kappa = \frac{\bar{a} \cdot a}{a \cdot a}\,.$$

Nun ist aber t aus der Gleichung $\kappa a = \bar{a} + t \times a$ nicht eindeutig bestimmt: ist sie für t erfüllt, dann auch für $t - \tau a$, $\tau \in \mathbb{R}$. Die möglichen Punkte t liegen also alle auf einer Geraden mit dem Richtungsvektor $-a$. Sei $r_1 = t$ und $r_2 = t - a$, folglich $r_1 - r_2 = a$ und $r_1 \times r_2 = -t \times a$. Aus Gleichung (1) folgt $-t \times a = \bar{a} - \kappa a$, also ist die Vektorpaardarstellung der erwähnten Geraden $t - \tau a$ gleich $(a;\bar{a} - \kappa a)$. Man nennt sie die H a u p t a c h s e oder einfach A c h s e d e s K r ä f t e s y s t e m s oder d e s l i n e a r e n K o m p l e x e s . Die Konstante

$$\kappa = \frac{\bar{a} \cdot a}{a \cdot a}$$

heißt nach Plücker der P a r a m e t e r d e s l i n e a r e n K o m p l e x e s . Der Parameter ist eine Invariante des Komplexes $(a;\bar{a})$ bezüglich Translationen. Denn bei einer beliebigen Verschiebung des Ursprungs um den Vektor t' ändert er sich nicht: a bleibt invariant und $\bar{a}$ geht über in $\bar{a} + t' \times a$. Es ist aber $a \cdot (\bar{a} + t' \times a) = a \cdot \bar{a}$.

Die Achse $(a;\bar{a} - \kappa a)$ eines linearen Komplexes $(a;\bar{a})$ ist dadurch ausgezeichnet, daß sie auf den Nullebenen ihrer Punkte senkrecht steht. Denn der Normalenvektor der Nullebene von t ist gleich $\bar{a} + t \times a$ und dies ist für alle t auf der Achse gleich κa.

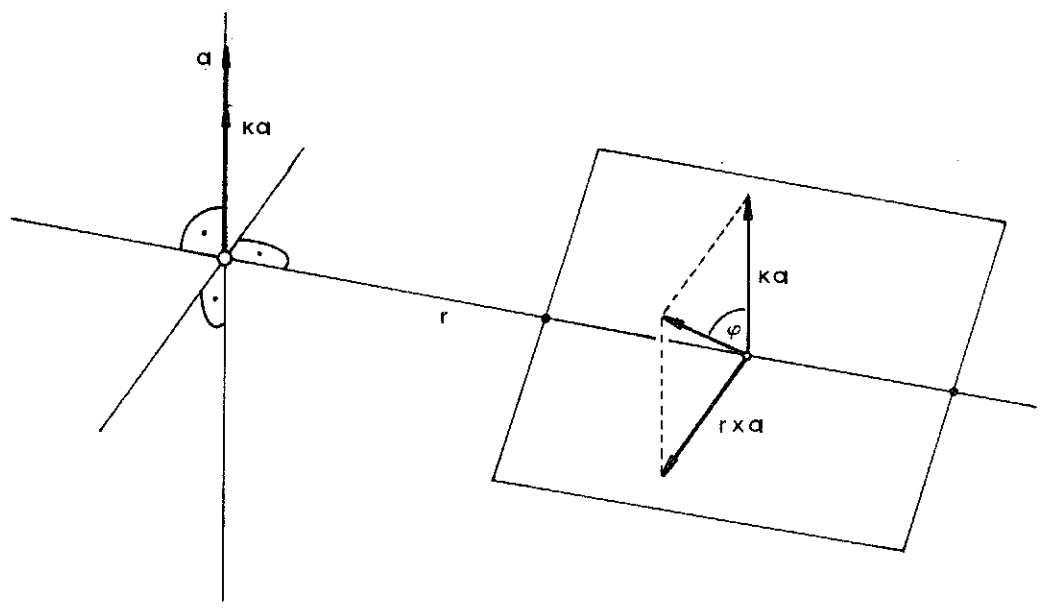
Ist die Achse eines linearen Komplexes mit der Vektorpaardarstellung

$(a;\bar{a})$ bestimmt, so läßt sich seine räumliche Gestaltung leicht überblicken. Der Komplex hat dann nämlich bezüglich eines Punktes der Achse die Darstellung $(a;\kappa a)$; denn ist t ein Ortsvektor der Achse, so geht $\bar{a}$ über in $\bar{a} + t \times a = \kappa a$.

Ausgehend von der Darstellung $(a;\kappa a)$ hat dann ein beliebiger Punkt P mit dem Ortsvektor r eine Nullebene mit dem Normalenvektor $\kappa a + r \times a$. Da der Ursprung O ja auf der Achse beliebig verschiebbar ist, kann r immer so gewählt werden, daß $r \perp a$ (Fig.3) . Mit Hilfe des Parameters κ und des Winkels φ zwischen κa und $\kappa a + r \times a$ läßt sich dann eine wichtige Beziehung ableiten:

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{|\kappa a \times (\kappa a + r \times a)|}{\kappa a \cdot (\kappa a + r \times a)} = \frac{\kappa\,|a \times (r \times a)|}{\kappa\,(a \cdot a)} =$$

$$= \frac{|(a \cdot a)\ r - (a \cdot r)\ a|}{\kappa\,(a \cdot a)} = \frac{|r|}{\kappa} \quad .$$



Figur 3

Also ist

$$\kappa \tan\varphi = |r| \ .$$

Plücker arbeitete oft und gerne mit dem Prinzip der speziellen Lage. So benutzte er zur bequemen analytischen Handhabung des linearen Komplexes ein Koordinatensystem, bei welchem etwa die z-Achse in die Achse des Komplexes fällt. Dann ist etwa $a = (0,0,\alpha)$, und aus der Gleichung

$$\bar{a} \cdot (r - r') + a \cdot (r \times r') = \kappa a \cdot (r - r') + a \cdot (r \times r') = 0$$

wird

$$\alpha\kappa(z - z') + \alpha(xy' - x'y) = 0$$

oder

$$xy' - x'y + \kappa(z-z') = 0 \ .$$

Aus dieser Gleichung läßt sich unmittelbar der Satz ableiten:

> "Ein Linien-Complex ersten Grades bleibt unverändert, sowohl wenn derselbe parallel mit seiner Axe verschoben als auch wenn er um dieselbe gedreht wird." (1868, 38)

Der lineare Komplex ist also s c h r a u b u n g s i n v a r i a n t bezüglich seiner Achse. Denn eine Schraubung um die z-Achse ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi \\ y &= \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi \\ z &= \tilde{z} + \delta \ . \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} xy' &= (\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)(\tilde{x}'\sin\varphi + \tilde{y}'\cos\varphi) \\ &= \tilde{x}\tilde{y}'\cos^2\varphi - \tilde{y}\tilde{x}'\sin^2\varphi + (\tilde{x}\tilde{x}' - \tilde{y}\tilde{y}')\sin\varphi\cos\varphi \\ x'y &= \tilde{x}'\tilde{y}\cos^2\varphi - \tilde{y}'\tilde{x}\sin^2\varphi + (\tilde{x}\tilde{x}' - \tilde{y}\tilde{y}')\sin\varphi\cos\varphi \\ z-z' &= \tilde{z} - \tilde{z}' \end{aligned}$$

also

$$xy' - x'y + \kappa(z-z') = \tilde{x}\tilde{y}' - \tilde{x}'\tilde{y} + \kappa(\tilde{z}-\tilde{z}') = 0 \ .$$

Greift man eine beliebige Gerade des Komplexes heraus, dreht und verschiebt sie um bzw. längs der Achse, so werden alle derart erzeugten Geraden tangential an einen Zylinder und tangential zu gewissen Schraubenlinien dieses Zylinders. Ist $\kappa > 0$, so sind die Schraubenlinien rechtsgewunden, und für $\kappa < 0$ linksgewunden. Für einen gegebenen linearen Komplex sind wegen dem festen Wert von κ alle so erzeugbaren Schraubenlinien gleich gewunden. Es sind also zwei wesentlich verschiedene Typen von Komplexen zu unterscheiden, je nach dem Vorzeichen von κ:

$\kappa > 0$ rechtsgewundener linearer Komplex,

$\kappa < 0$ linksgewundener linearer Komplex .

Für $\kappa = 0$ ist $a \cdot \bar{a} = 0$ und damit stellt das Vektorpaar $(a;\bar{a})$ (in der Hauptachsendarstellung insbesondere $= (a;0)$) eine Gerade dar:

$\kappa = 0$ spezieller linearer Komplex.

4.4 Lineare Strahlenkongruenzen

Eine lineare Strahlenkongruenz ist bestimmt durch ein System zweier linearer Gleichungen in Linienkoordinaten:

$$\bar{a}\cdot p + a\cdot\bar{p} = 0 \ , \quad a\cdot\bar{a} \neq 0 \ ;$$

$$\bar{a}'\cdot p + a'\cdot\bar{p} = 0 \ , \quad a'\cdot\bar{a} \neq 0 \ .$$

Sie besteht demzufolge aus den gemeinsamen Strahlen zweier linearer Komplexe $K = \bar{a}\cdot p + a\cdot\bar{p} = 0$ und $K' = \bar{a}'\cdot p + a'\cdot\bar{p} = 0$. Alle Komplexe der Form

$$K + \lambda K' = 0 \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

enthalten dieselbe Kongruenz. Man sagt, daß alle Komplexe welche durch die vorstehende Gleichung dargestellt werden und von welchen je zwei die Kongruenz bestimmen, ein B ü s c h e l von linearen Komplexen bilden. Die speziellen Komplexe dieses Büschels

$$K + \lambda K' = \bar{a} \cdot p + a \cdot \bar{p} + \lambda(\bar{a}' \cdot a + a' \cdot \bar{p}) =$$
$$= (\bar{a} + \lambda \bar{a}') \cdot p + (a + \lambda a') \cdot \bar{p} = 0$$

ergeben sich aus einer quadratischen Bedingungsgleichung für λ :

$$(a + \lambda a') \cdot (\bar{a} + \lambda \bar{a}') = 0$$
$$a \cdot \bar{a} + \lambda(a \cdot \bar{a}' + a' \cdot \bar{a}) + \lambda^2 \, a' \cdot \bar{a}' = 0 \; .$$

Dabei ist nach Voraussetzung $a \cdot \bar{a} \neq 0$ und $a' \cdot \bar{a}' \neq 0$. Im allgemeinen gibt es also zwei spezielle lineare Komplexe in einem Komplexbüschel. Sie können beide reell oder konjugiert imaginär oder reell zusammenfallend sein. Man nennt die entsprechenden Geraden die L e i t g e r a d e n d e r l i n e a r e n S t r a h l e n k o n g r u e n z.

Der g e o m e t r i s c h e O r t d e r H a u p t a c h s e n e i n e s K o m p l e x b ü s c h e l s ergibt sich aus der Betrachtung der Nullpunkte der Hauptachsen. Die Achse eines Komplexes $(w; \bar{w})$ hat die Darstellung $(w; \bar{w} - \kappa w)$, wobei $\kappa = (w \cdot \bar{w}) / (w \cdot w)$. Die Nullebenen der Punkte t dieser Achse sind wegen $n = \bar{w} + t \times w = \kappa w$ (siehe Gleichung (1) im Abs. 4.3) gegeben durch die Gleichung $w \cdot p + \delta = 0$. Die Nullpunkte selbst sind dann bestimmt durch

$$r = \frac{\delta w - w \times \bar{w}}{w \cdot w} \; .$$

Wendet man dies auf das Komplexbüschel

$$(a + \lambda a' \; ; \bar{a} + \lambda \bar{a}') \; , \quad \lambda \in \mathbb{R} \, ,$$

an, so ist der geometrische Ort der Punkte der Hauptachsen des Komplexbüschels gegeben durch

$$r = \frac{\delta(a + \lambda a') - (a + \lambda a') \times (\bar{a} + \lambda \bar{a}')}{(a + \lambda a') \cdot (a + \lambda a')} \; .$$

Bei geeigneter Spezialisierung des Koordinatensystems läßt sich durch Elimination von λ und δ nach einiger Rechnung die Gleichung

$$(x^2 + y^2) \, z \, \sin\varphi - \rho xy = 0$$

ableiten.[35] Diese Gleichung 3.Grades stellt also diejenige Linienfläche dar, die von den Achsen der Komplexe eines Büschels gebildet wird. Sie wurde später Z y l i n d r o i d genannt.[35]

4.5 Würdigung des Schaffens von Plücker

Plücker hatte die linearen Gebilde der Liniengeometrie erschöpfend behandelt. Sein Interesse wandte sich denn auch sehr bald den Komplexen 2.Grades zu, die ein viel weitläufigeres Feld für geometrische Untersuchungen boten. Hier leistete Plücker Pionierarbeit. Zeugnis von seiner Produktivität legte der ganz den Komplexen zweiten Grades gewidmete zweite Teil seines Buches (1868/69) ab, von dem etwa die ersten 100 Seiten bei seinem Tode druckfertig vorlagen. Der Rest (= (1869)), noch einmal etwa 100 Seiten, wurde von Plückers Assistenten Felix Klein herausgegeben.

Charakteristisch, auch für sein letztes Werk, ist bei Plücker die ab-

wechselnde Praktizierung der einander ergänzenden synthetischen und analytischen Darstellungsmethoden. Dieses Verhalten war der Ausdruck seiner bis ins hohe Alter hinein andauernden Produktivität, die ihn immer wieder zur Erweiterung und gegenseitiger Auseinandersetzung der geometrischen und der formalen Darstellung drängte.

Von der Mechanik ließ sich Plücker nicht so sehr in seinen Untersuchungen befruchten, wie das bei Möbius der Fall war. Plücker war zu sehr Geometer, als daß er auf die spezifisch mechanischen Probleme eingehen wollte. So gelang ihm in dieser Hinsicht nicht eigentlich ein Beitrag, der über Möbius in irgendeiner Weise hinausging. Sein Verdienst liegt anderswo: In der Erschließung eines neuen Gebietes, eben der Liniengeometrie. Hier verdanken wir ihm alle grundlegenden Begriffe und deren inneren Zusammenhang: Strahlen- und Achsenkoordinaten, Komplexe, Kongruenzen, höhere Regelflächen, Komplexflächen usw..

Plücker berücksichtigte die zeitgenössische Literatur, vor allem was die Algebra betrifft, im Gegensatz zu den Italienern (Abs. 6) recht wenig. Sein vorwärtsdrängender Geist ließ ihm dazu nicht die nötige Musse.

Von geradezu entscheidender Bedeutung für die Entstehung einer in die Liniengeometrie eingebetteten Mechanik des starren Körpers war die außerordentliche Förderung, die Plücker seinem Schüler und Schützling Felix Klein angedeihen ließ. Ohne dessen frühe intensive Beschäftigung mit der Liniengeometrie und dessen Nähe zum Meister hätte Klein kaum so bedeutende Beiträge geleistet - und damit die Forschung nachhaltig beeinflußt. Man darf wohl sagen, daß ein wesentlicher Teil der Bedeutung Plückers für die geometrische Mechanik in seinem Vermächtnis an Klein besteht - was unsere zum Teil recht ausführliche Behandlung von Plücker mehr als rechtfertigt. Klein führte nicht nur dessen Forschungen im inhaltlichen Bereiche weiter, sondern war auch in besonderem Maße von Plückers methodischen Intentionen geprägt.

Die fruchtbare Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik setzte einerseits ein hohes geometrisches Können voraus und andererseits eine ebenso virtuose Handhabung der analytischen Hilfsmittel. Sie konnte nur von einem Mathematiker bewältigt werden, der sich die analytische und synthetische Methode der Geometrie zu eigen gemacht und sie miteinander verschmolzen hatte. In diesem Sinne war die auf Klein übergegangene Plückersche methodische Intention eine wichtige Voraussetzung für seine bedeutenden Beiträge zur geometrischen Mechanik. Entsprechendes galt später für F.Lindemann (1852-1939) als Schüler von Klein.

5. Metrische Tetraederkoordinaten in der Liniengeometrie

Es gab in Deutschland insbesondere einen Mathematiker, der die Bedeutung der Plückerschen Arbeiten zur Liniengeometrie sofort bemerkte, mit Interesse verfolgte und bald eigene Untersuchungen anstellte: Alfred Clebsch (1833-1872). Clebsch hatte zum vorneherein allerdings einen anderen Standpunkt:

> "Clebsch war in erster Linie Algebraiker, und allen seinen Arbeiten gemeinsam ist die vollendete Beherrschung des algebraischen Apparates. Ihr zur Seite stellt sich in den späteren Untersuchungen die klare geometrische Auffassung, vermöge deren jeder Schritt, der die Rechnung vollführt, zu einem anschaulichen Verständnisse gebracht wird. Aber es ist nicht die concrete Art, die räumlichen Verhältnisse zu sehen, wie wir sie bei manchen anderen Geometern finden; die geometrische Anschauung ist ihm mehr Symbol und Orientierungsmittel für die algebraischen Probleme, mit denen er sich beschäftigte." ((Klein 1874, 2f.))

So interessierte ihn an der Liniengeometrie insbesondere deren Zusammenhang mit der Determinantentheorie und der Theorie der quaternären Formen (vgl. dazu etwa Clebsch (1870)). Trotz des frühen Todes von Clebsch, konnte man dank seiner umfassenden Lehrtätigkeit und Förderung junger Wissenschaftler von einer eigentlichen Clebsch'schen Schule sprechen. Im weiteren Sinne gehörten zu ihr die Mathematiker J.Lüroth (1844-1910), Klein, F.Lindemann (1852-1939) und vor allem italienische Mathematiker, von denen hier insbesondere G.Battaglini (1826-1894) bedeutsam ist (vgl. Abs. 6).

Zur Untersuchung von Regelflächen höherer Ordnung bediente sich bereits (1867) J. Lüroth der Plückerschen Linienkoordinaten. Aus der Schule von Clebsch stammend, ging er mit einer formalen Eleganz vor, die sofort in die Augen stach.

Er legte den Linienkoordinaten homogene Punkt- oder Ebenenkoordinaten zugrunde und zeigte, daß deren Definition unabhängig von den gewählten Punkten und Ebenen ist. Nach einer Darstellung der identischen Bedingungsgleichung der Linienkoordinaten in Determinantenform, leitete er die Bedingung für den Schnitt zweier Geraden ab, die erstmals von Cayley (1860a,b) aufgestellt wurde.

Werden die Linienkoordinaten zweier Geraden in der Form $(x_1,x_2,\ldots,x_6)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_6)$ geschrieben, so wird mit der Abkürzung

$$R = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6$$

die Schnittbedingung gleich

$$\sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(Lüroth 1867, 131).} \qquad (2)$$

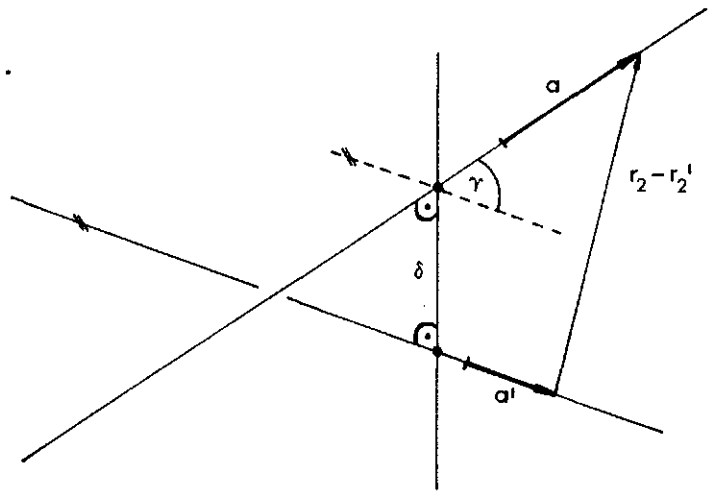
Zwei Jahre später trat H.G. Zeuthen (1839-1920) mit einer für die folgende Entwicklung einflußreichen Arbeit an die Öffentlichkeit: "Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace" (1869). Plücker, sowie Cayley, stützten ihre Koordinaten der geraden Linie auf Punkt- und Ebenenkoordinaten. Plücker machte allerdings einen (unzulänglichen) Versuch[36] einer unabhängigen Definition der Linienkoordinaten, vermutete aber, die Durchführung sei sehr aufwendig.

Zeuthen nahm nun diesen Grundgedanken auf, und es gelang ihm mit Hilfe der mechanischen Ideen Plückers das gesteckte Ziel zu erreichen. Der Stil seiner Abhandlung unterschied sich merklich von der Arbeit Lüroths. Zeuthen, als Schüler von Chasles[37], legte das Hauptgewicht auf die geometrischen Überlegungen, seine Rechnungen dienten nur mehr oder weniger der formalen Nachzeichnung seiner Gedanken.

Als Grundbegriff zur Definition der neuen Koordinaten diente das von Zeuthen erstmals eingeführte g e g e n s e i t i g e M o m e n t z w e i e r G e r a d e n .[38] Sind - wieder unter Verwendung der heute üblichen Notation - die zwei Geraden gegeben durch $(a;\bar{a})$ und $(a';\bar{a}')$, so definierte Zeuthen (1869, 433f.) das Moment durch $a \cdot \bar{a}' + \bar{a} \cdot a'$ und zeigte, daß dies gleich $\delta \sin\gamma \; |a| \; |a'|$ ist; dabei ist δ der kürzeste Abstand der Trägergeraden von a und a', und γ der Zwischenwinkel von a und a' (Fig.4). Das Moment zweier Geraden ist also eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Größe.

Dieses Resultat läßt sich leicht mit Hilfe der Vektorschreibweise ableiten: sei $a = r_1 - r_2$, $\bar{a} = r_1 \times r_2$ und $a' = r'_1 - r'_2$, $a' = r'_1 \times r'_2$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& a \cdot \bar{a}' + \bar{a} \cdot a' = \\
&= (r_1 - r_2) \cdot (r'_1 \times r'_2) + (r'_1 - r'_2) \cdot (r_1 \times r_2) \\
&= [r_1 - r_2,\ r'_1, r'_2] + [r'_1 - r'_2, r_1, r_2] \\
&= [r_1 - r_2,\ r'_1 - r'_2, r'_2] + [r'_1 - r'_2, r_1 - r_2, r_2] \\
&= [r_1 - r_2,\ r'_1 - r'_2, r'_2] - [r_1 - r_2, r'_1 - r'_2, r_2] \\
&= [r_1 - r_2,\ r'_1 - r'_2, r'_2 - r_2] \\
&= [a, a', r'_2 - r_2] \\
&= (r'_2 - r_2) \cdot (a \times a') \\
&= \delta \sin\gamma \, |a| \; |a'| \quad .
\end{aligned}
$$



Figur 4

Der Ausdruck $a \cdot \bar{a}' + \bar{a} \cdot a'$ ist also gleich dem kürzesten Abstand δ der Geraden $(a;\bar{a})$ und $(a';\bar{a}')$, multipliziert mit dem Sinus des Zwischenwinkels γ und den Beträgen von a und a'. Folglich gilt: Die beiden Geraden s c h n e i d e n sich (sind parallel) genau dann, wenn $\delta = 0$ $(\sin\gamma = 0)$, d.h. genau wenn $a \cdot \bar{a}' + \bar{a} \cdot a' = 0$.

Die geometrischen Objekte, auf welche Zeuthen eine beliebige Gerade des Raumes beziehen möchte, sind die sechs Kanten eines Tetraeders. Wie

bereits Möbius (1837, 140) gefunden hatte, läßt sich jede beliebige Kraft, und damit jedes Kraftsystem $(w;\bar{w})$ nach sechs vorgegebenen Geraden $(a_i,\bar{a}_i)$, $i= 1,2,\ldots,6$, zerlegen:

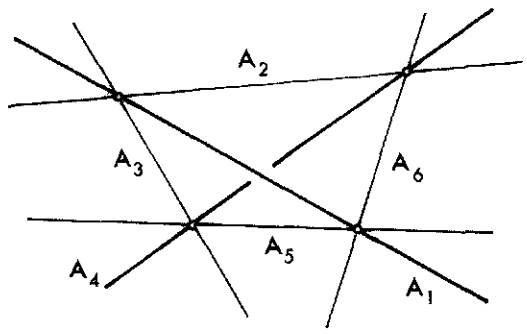
$$(w;\bar{w}) = x_4\ (a_1;\bar{a}_1) + x_5\ (a_2;\bar{a}_2) + x_6\ (a_3;\bar{a}_3) + \\ + x_1\ (a_4;\bar{a}_4) + x_2\ (a_5;\bar{a}_5) + x_3\ (a_6;\bar{a}_6)\ . \qquad (3)$$

Die sechs inhomogenen Gleichungen mit den sechs Unbekannten $x_1,x_2,\ldots,x_6$ haben genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn die Determinante der Koeffizienten nicht verschwindet, m.a.W. wenn die Geraden $(a_i;\bar{a}_i)$, $i= 1,2,\ldots,6$, allgemeine Lage haben, d.h. linear unabhängig sind. Dies ist sicher dann der Fall, wenn die sechs Geraden die Kanten eines Tetraeders bilden.

Zeuthen betrachtete nun nicht Kraftsysteme, sondern einfach Geraden. Für dieselben gilt natürlich eine entsprechende Zerlegung. Für $(a;\bar{a})$ mit $|a| = 1$ wird

$$(a;\bar{a}) = x_4\ (a_1;\bar{a}_1) + x_5\ (a_2;\bar{a}_2) + \ldots + x_3\ (a_6;\bar{a}_6)\ , \qquad (4)$$

wenn die $(a_i;\bar{a}_i)$ die Kanten A_i eines Tetraeders (Fig.5) sind.



Figur 5

Bezeichnet man das Moment der Geraden $A = (a;\bar{a})$ bezüglich der Geraden $A_1 = (a_1;\bar{a}_1)$ mit (A,A_1) , so wird

$$(A,A_1) = x_4\ (A_1,A_1) + x_5\ (A_2,A_1) + x_6\ (A_3,A_1) \\ x_1\ (A_4,A_1) + x_2\ (A_5,A_1) + x_3\ (A_6,A_1)\ .$$

Das Moment einer Geraden mit sich selbst, sowie das Moment zweier sich schneidender Geraden verschwindet. Also gilt

$$(A,A_1) = x_1\ (A_4,\ A_1)$$

und schließlich

$$x_1 = \frac{(A,\ A_1)}{(A_4,\ A_1)}\ .$$

Werden nur Indizes modulo 6 zugelassen, so ergibt sich allgemein

$$x_i = \frac{(A,\ A_i)}{(A_{i+3},A_i)}\ .$$

Normiert man $(a_i;\bar{a}_i)$ so, daß $|a_i|$ gleich der entsprechenden Kantenlänge des Tetraeders ist, so wird

$$(A_4,A_1) = a_4 \cdot \bar{a}_1 + \bar{a}_4 \cdot a_1 = 6T\ ,$$

wobei T das Volumen des Bezugstetraeders bedeutet.

Daraus folgt

$$x_i = (A,A_i) \frac{1}{6T} \text{ für } i = 1,2,\ldots,6 .$$

Somit erhalten die x_i eine klare geometrische Interpretation: x_i ist gleich dem Moment der beliebig vorgegebenen Geraden A mit der Kante A_i des Bezugstetraeders, multipliziert mit dem Kehrwert des sechsfachen Volumens desselben.

Einer gegebenen Geraden $A = (a;\bar{a})$ kommen, wie aus den obigen Ausführungen folgt, bis auf einen Faktor eindeutig sechs Werte $x_1,x_2,\ldots,x_6$ zu. Dabei gilt

$$(a;\bar{a}) = x_4 (a_1;\bar{a}_1) + x_5 (a_2;\bar{a}_2) + \ldots + x_3 (a_6;\bar{a}_6) ,$$

was man auch in der Form

$$A = x_4A_1 + x_5A_2 + \ldots + x_3A_6$$

schreiben kann. Für eine zweite Gerade B gilt dann

$$B = y_4A_1 + y_5A_2 + \ldots + y_3A_6 .$$

Das Moment von A und B ist definiert durch

$$(A,B) = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b .$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Momentes in beiden Argumenten

$$(A,B) = \sum_{i,j=1}^{6} x_{i+3}y_{j+3}(A_i,A_j) .$$

Aufgrund der vorausgesetzten geometrischen Situation (Fig.5) verschwinden nur die Momente $(A_1,A_4) = (A_4,A_1)$, $(A_2,A_5) = (A_5,A_2)$ und $(A_3,A_6) = (A_6,A_3)$ nicht. Also wird

$$\begin{aligned}(A,B) &= x_1y_4(A_4,A_1) + x_2y_5 (A_5,A_2) + x_3y_6 (A_6,A_3)\\ &\quad + x_4y_1(A_1,A_4) + x_5y_2 (A_2,A_5) + x_6y_3 (A_3,A_6)\\ &= 6T \left(\sum_{i=1}^{6} x_iy_{i+3} \right) .\end{aligned}$$

Das Moment einer Geraden mit sich selbst ist immer Null. Folglich gilt

$$(A,A) = 6T \left(\sum_{i=1}^{6} x_ix_{i+3} \right) = 0 .$$

Man erhält so die wohlbekannte Bedingungsgleichung:

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0 . \qquad (5)$$

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um zu zeigen, daß die $x_1,x_2,\ldots,x_6$ tatsächlich als Koordinaten einer Geraden aufgefaßt werden dürfen (Zeuthen 1869, 435). Zunächst folgt aus der Schnittbedingung für die Geraden A, B

$$(A,B) = 6T \left(\sum_{i=1}^{6} x_iy_{i+3} \right) = 0 ,$$

d.h.

$$x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3 = 0 ,$$

daß die Koordinaten homogen sind. Man hat es also nur mit 5 Variablen zu tun und wegen der Identität (5) schließlich nur mit 4 . Ist eine Gerade

$A = (a;\bar{a})$ gegeben, so lassen sich die 6 Größen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bis auf einen Faktor eindeutig bestimmen. Und umgekehrt läßt sich aus den sechs Größen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ mit Hilfe von $A_i = (a_i;\bar{a}_i)$ und

$$A = x_1A_4 + x_2A_5 + x_3A_6 + x_4A_1 + x_5A_2 + x_6A_3$$

die Lage der Geraden eindeutig festlegen.[39]

6. Geometrische Mechanik in Italien : Giuseppe Battaglini

Nach der Einigung Italiens erhielten mehrere bekannte Mathematiker einflußreiche politische Stellungen und konnten so ihre Wissenschaft nach Kräften fördern. Eine neue Ära begann. Der erste Lehrstuhl für höhere Geometrie in Bologna wurde für L. Cremona (1830-1903) geschaffen.[40]

Eine wichtige Rolle in diesem Prozeß der Profilierung der italienischen Mathematik spielte Giuseppe Battaglini (1826-1894), vor allem durch die 1868 gegründete Zeitschrift "Giornale di Matematiche". Er begann seine Kurse in höherer Geometrie im Jahre 1860 an der Universität in Neapel, wo für ihn ebenfalls ein Lehrstuhl für höhere Geometrie eingerichtet wurde. Battaglini gehörte zu den eifrigsten Verfechtern der "neuen geometrischen Spekulationen" und seine Zeitschrift wurde "das gleichsam amtliche Organ für die nichteuklidische Geometrie." ((Bonola/Liebmann 1908, 133)) So erschien im 6.Band des "Giornale ..." die berühmte Arbeit von E.Beltrami (1835-1900) "Saggio di interpretazione della geometria non euclidea" (1868a) (vgl. Abs. VII 2.1).

Die durch Battaglini ins Leben gerufene geometrische Schule ließ sich vor allem durch Cayley, Sylvester, A. Clebsch (1833-1872) und P. Gordan (1837-1912) inspirieren und beschäftigte sich hauptsächlich mit dem geometrischen Studium der Invarianten von algebraischen Formen ((Segre 1932, 6)).

Bereits 1866 begann Battaglini eine Serie von Arbeiten über euklidische Liniengeometrie und Mechanik im Anschluß an Plücker zu publizieren. Der erste der beiden Aufsätze (1866a,b) war im wesentlichen einer Umformulierung der Plückerschen Gedanken über Liniensysteme ersten Grades gewidmet und enthielt keine mechanischen Anwendungen. Der zweite hatte Liniensysteme zweiten Grades zum Inhalt und ging teilweise wesentlich über Plücker (1865b) hinaus. An diesen Aufsatz sollte später Klein anschließen (vgl. dazu Abs. V 1).

Kurz nach dem Erscheinen der "Neuen Geometrie des Raumes ..." (1868) wandte sich Battaglini vor allem den Anwendungen auf die Mechanik zu. Er begann mit der Nota "Sulla composizione delle forze" (1869a). Er drückte in ähnlicher Weise wie Zeuthen, ohne dessen Arbeit (1869) gekannt zu haben, die Koordinaten einer geraden Linie mit Hilfe der Momente dieser Geraden bezüglich den Kanten eines Tetraeders aus. Dann betrachtete er zunächst die Zusammensetzungsregeln für Kräfte, und zeigte schließlich explizit, wie sich ein beliebiges Kräftesystem auf sechs Kräfte, deren Wirkungslinien ein Tetraeder bilden, reduzieren läßt.

Die Nota "Sulla teorica dei momenti" (1869b) beginnt mit der Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit in Anlehnung an Möbius (1837, 258). Wie Battaglini feststellte, ist es sinnvoll (wir verwenden wieder die moderne Vektorschreibweise) einem Kraftsystem $(w;\bar{w})$ bezüglich einer Achse $(p;\bar{p})$ das M o m e n t $\bar{w}\cdot p + w\cdot\bar{p}$ zuzuordnen. Betrachtet man nun alle diejenigen Geraden, die das Moment Null haben, bezüglich $(w;\bar{w})$, so erhält man die Gleichung des linearen Komplexes: $\bar{w}\cdot p + w\cdot\bar{p} = 0$. Daraus leitete Battaglini die wichtigsten Eigenschaften (Nullkorrelation, konjugierte Geraden, Hauptachse) dieses Komplexes ab.

Die beiden genannten Arbeiten fanden ihre Fortsetzung und Abschluß in der Nota "Sulle serie di sistemi di forze" (1869c). Hier studierte Battaglini elementare Eigenschaften der Büschel und Bündel (=zweifach unendliche Systeme) linearer Komplexe. Zum ersten Mal tauchte hier i m Z u s a m m e n h a n g m i t d e r M e c h a n i k die Mannigfaltigkeit der Hauptachsen der Komplexe eines Büschels auf - eine Regelfläche dritten Grades, die später Zylindroid [35] genannt werden sollte (vgl. Abs. 4.4). Und zwar fand er das Zylindroid als Ort der Hauptachsen aller derjenigen Dynamen, die sich aus zwei nach festen, gegebenen Linien wirkenden Kräfte zusammensetzen.

In einer ebenfalls noch im Jahre (1869d) publizierten Abhandlung "Sulle dinami in involuzione" schwang sich Battaglini zu einem erhöhten Gesichtspunkt empor. Man findet hier zum ersten Mal die grundlegenden metrischen Begriffe der geometrischen Mechanik explizit und vollständig formuliert. Die Idee, einer Dyname Koordinaten zuzuordnen, kam Battaglini im Anschluß an Plücker (1866); er bezog sie dann aber auf die sechs Kanten eines Tetraeders (im wesentlichen gleich wie Zeuthen 1869). Die Dynamen, mit den Koordinaten $(w;\bar{w})$ und $\lambda(w;\bar{w})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, nannte er "proportional". Nach der Einführung des Momentes einer Kraft bzw. einer Dyname bezüglich einer Geraden (vgl. oben), führte er erstmals die folgenden Begriffe ein (hier in moderne Schreibweise übersetzt):

-Sind $(w_1;\bar{w}_1)$ und $(w_2,\bar{w}_2)$ zwei Dynamen, so heißt

$$\bar{w}_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot \bar{w}_2$$

das g e g e n s e i t i g e M o m e n t d e r b e i d e n D y n a m e n .

-Ist

$$\bar{w}_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot \bar{w}_2 = 0$$

so liegen die Dynamen h a r m o n i s c h .

Die Größe $\bar{w} \cdot w + w \cdot \bar{w} = 2w \cdot \bar{w}$ nannte er das M o m e n t d e r D y n a m e $(w;\bar{w})$ m i t s i c h s e l b s t. Wie man sieht, ist dieses im wesentlichen gleich dem Plückerschen Parameter.

Im folgenden spricht Battaglini immer noch von Dynamen, es ist aber eigentlich von Komplexen die Rede, d.h. von Klassen zueinander proportionaler Dynamen. Die Definition der harmonischen Lage überträgt sich natürlich auf Komplexe: Die Komplexe $(a;\bar{a})$ und $(b;\bar{b})$ liegen genau dann harmonisch, wenn $\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} = 0$.

Besteht zwischen den Koordinaten $(a;\bar{a})$ eines Komplexes eine homogene lineare Gleichung $\bar{a} \cdot p + a \cdot \bar{p} = 0$, dann gibt es ein vierfach unendliches (∞^4) System von Komplexen $(p;\bar{p})$,die zu $(a;\bar{a})$ harmonisch liegen. Analog bestimmen zwei Gleichungen

$$\bar{a}_1 \cdot p + a_1 \cdot \bar{p} = 0$$
$$\bar{a}_2 \cdot p + a_2 \cdot \bar{p} = 0$$

ein System von ∞^3 Komplexen $(p;\bar{p})$, die harmonisch zu $(a_1;\bar{a}_1)$ und $(a_2;\bar{a}_2)$, d.h. auch harmonisch zu $\lambda_1 (a_1;a_1) + \lambda_2 (a_2;a_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, liegen. Entsprechendes gilt für drei oder vier Gleichungen. Gelten fünf Gleichungen, so gibt es im allgemeinen genau einen Komplex, der

harmonisch zu den fünf gegebenen liegt.

Durch Linearkombination

$$\lambda_1(a_1;a_2)+\lambda_2(a_2;a_2)+\lambda_3(a_3;a_3)+\lambda_4(a_4;a_4)+\lambda_5(a_5;a_5) = 0$$

von k Komplexen $(a_i;\bar{a}_i)$, $i=1,2,\ldots,5$, mit $k=2,3,4,5$ erhält man genau (k-1)-fache Systeme von $\infty^{(k-1)}$ linearen Komplexen. Battaglini nannte sie (k-1)-fach in "Involution" (nicht zu verwechseln mit dem Kleinschen Involutionsbegriff, der dasselbe wie "harmonisch" bei Battaglini bedeutet - vgl. Abs. V 2.3).

Durch den Begriff der harmonischen Lage wird jedem System von Komplexen ein anderes zugeordnet, etwa einem 1-fachen System ein 3-faches und im allgemeinen Falle einem k-fachen System ein (5-k-1)-faches. Battaglini nannte solche zugeordneten Systeme "assoziiert."

Der verbleibende größere Teil der Arbeit hat eine genauere geometrische Diskussion der k-fach, $k=1,2,\ldots,5$, in Involution liegenden Komplexe zum Inhalt. Battaglini trieb hier zum ersten Mal lineare Geometrie im fünfdimensionalen Raum der Komplexe - wobei er noch nicht den Gesichtspunkt eines abstrakten Punktraumes von mehr als drei Dimensionen einnehmen konnte.

1870 dehnte Battaglini seine Untersuchungen zur Statik auf die Kinematik aus. In der Arbeit "Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido" (1870) zeigte er den engen Zusammenhang des linearen Komplexes mit den infinitesimalen Bewegungen eines starren Körpers auf. Obwohl seine Resultate kaum über Chasles (1843) hinausgingen, war doch sein Gesichtspunkt ein anderer:
Battaglini formulierte seine Gedanken ganz im Rahmen der analytischen Liniengeometrie, wodurch vieles klarer und überschaubarer wurde.

Bei den sich daran anschließenden Arbeiten (1873a,b), die sich nun der Dynamik des starren Körpers zuwandten, trat der liniengeometrische Standpunkt wieder etwas in den Hintergrund. Die Liniengeometrie benutzte er nur zur bequemen Darstellung von Kräftesystemen und infinitesimalen Bewegungen, nicht eigentlich aber für dynamische Überlegungen.

Battaglini gehört das Verdienst, die Beiträge von Möbius und Plücker zur geometrischen Mechanik wohl als erster in ihrer Bedeutung erkannt zu haben. Er formulierte die Ergebnisse von Möbius erstmals im Rahmen der euklidischen Liniengeometrie und bereicherte dieses Gebiet selbst durch wichtige Beiträge. Seine ersten Schritte in die Geometrie des Komplexraumes waren seine originellste Leistung, die ihn als unmittelbaren Vorläufer von Klein auszeichnete. Klein empfing von seinen Arbeiten - neben denjenigen Plückers - die stärksten Anregungen zur näheren Beschäftigung mit der Liniengeometrie (vgl. Abs. V 1). Battaglinis bedeutende Arbeiten zur Liniengeometrie und Mechanik hatten keine großen historischen Auswirkungen, da sie sehr rasch durch Kleins Untersuchungen in den Schatten gestellt wurden.

Kapitel V

Liniengeometrie und Mechanik: Klärung grundlegender Zusammenhänge durch Felix Klein

1. Kleins frühe Beschäftigung mit der Liniengeometrie

Seit Ostern 1866 war Felix Klein (1849-1925) Assistent bei J.Plücker (1801-1868) bis zu dessen plötzlichen Tode 1868. Plückers Alterswerk "Neue Geometrie des Raumes ..." (1868/69) war damals erst zum Teil in Druck. Nach dem Wunsche der Verlagsbuchhandlung B.G. Teubner in Leipzig sollte der noch ausstehende Teil von A. Clebsch (1833-1872) herausgegeben werden. Klein, der schon von Plücker zur Vorbereitung und Redaktion des Werkes herangezogen worden war, kam so mit Clebsch in persönliche Verbindung, der ihn insbesondere auf die Arbeiten von G. Battaglini (1826-1894) aufmerksam machte, vor allem auf dessen Darstellung der Theorie der Komplexe ersten und zweiten Grades (Battaglini (1866a,b)). Klein schrieb darüber:

> "Es wurde mir nicht ganz leicht, von den mehr elementaren Methoden der Plücker'schen Darstellung zu dem konsequenten Verfahren der projektiven Koordinaten überzugehen, wie es von Battaglini gehandhabt wurde. Das Studium der Lehrbücher von Salmon-Fiedler und mancher Originalabhandlung half mir über diese Schwierigkeit weg. Ich bemerkte dann aber bald, daß die von Battaglini zugrunde gelegte kanonische Form der Komplexe zweiten Grades nicht die allgemeine sein konnte....Damit hatte ich das Thema, aus dem ich hoffte, eine Dissertation gestalten zu können, nämlich die Herstellung einer wirklich allgemeinen kanonischen Form." ((1921, 3))

Der schon früh durch Plücker auf Liniengeometrie spezialisierte Klein löste das sich selbst gestellte Problem in erstaunlich kurzer Zeit, d. h. innerhalb kaum eines Jahres. Durch R. Lipschitz (1832-1903), seinen Doktorvater, auf eine noch unter der Druckpresse gelegene Arbeit von K. Weierstrass (1815-1897) über die Theorie der Elementarteiler (1868) aufmerksam gemacht, gelang es Klein mit Hilfe dieser noch 'feuchten' Theorie die kanonischen Formen der Komplexe zweiten Grades exakt zu bestimmen. Die Dissertation Kleins (1868) hatte für alle seine späteren Arbeiten zur Liniengeometrie eine zentrale Bedeutung: er knüpfte immer wieder auf die eine oder andere Weise an die dort dargestellten Überlegungen an. Die im Zusammenhang mit der geometrischen Mechanik wichtigen Aspekte griff er in einem wenig später erschienenen Aufsatz "Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades" (1870a) wieder auf und vervollständigte die bereits in der Dissertation veranlagte geometrische Deutung der dort dargestellten algebraischen Resultate. Dabei beschränkte er sich aber charakteristischerweise auf die Diskussion des "allgemeinen Falles" d.h. auf die geometrisch bedeutsamen und interessanten Fälle unter Ausschluß der Ausartungen.-

Es folgt zunächst eine knappe Darstellung der projektiven Liniengeometrie nach Klein[1]; daran anschließend werden im Abschnitt 2.3 die Untersuchungen Kleins (1870a) diskutiert.

2. Projektive Liniengeometrie

2.1 Projektive Linienkoordinaten

Die von Plücker verwendeten homogenen Linienkoordinaten bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems

$$(x-x'):(y-y'):(z-z'):(yz'-y'z):(zx'-z'x):(xy'-x'y)$$

lassen sich auffassen als die Verhältnisse der sechs zweigliedrigen Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} .$$

Macht man sich vom rechtwinkligen Koordinatensystem frei, und legt ein Koordinatentetraeder zugrunde, so muß obige Matrix ersetzt werden durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} .$$

Aus ihr bildet man wieder die zweigliedrigen Unterdeterminanten und e r k l ä r t als homogene Koordinaten der geraden Linie mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors ρ die folgenden Größen:

$$\rho p_{12} = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad \rho p_{34} = x_3y_4 - x_4y_3$$
$$\rho p_{13} = x_1y_3 - x_3y_1 \qquad \rho p_{42} = x_4y_2 - x_2y_4$$
$$\rho p_{14} = x_1y_4 - x_4y_1 \qquad \rho p_{23} = x_2y_3 - x_3y_2$$

oder allgemein

$$\rho p_{ik} = x_iy_k - x_ky_i = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} .$$

In dieser Form traten die Linienkoordinaten erstmals bei Cayley (1860 a) auf und wurden dann vor allem durch Battaglini verwendet. Aber auch bei Plücker (1868, 7f) lassen sie sich schon finden, allerdings unter Zugrundelegung rechtwinkliger homogener Koordinaten. Fiedler (1870) gab erstmals eine direkte geometrische Deutung dieser projektiven Linienkoordinaten mit Hilfe des Doppelverhältnisses.

Wegen der Identität

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} = 0$$

besteht zwischen den Linienkoordinaten die i d e n t i s c h e B e d i n g u n g s g l e i c h u n g

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0 .$$

Die in dieser Weise mit Hilfe zweier Punkte definierten Koordinaten heißen S t r a h l e n k o o r d i n a t e n der Geraden. In entsprechender Weise definiert man als A c h s e n k o o r d i n a t e n einer Geraden die Verhältnisse der sechs Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix} ,$$

gebildet aus den Koordinaten zweier Ebenen $[U_1,U_2,U_3,U_4]$, $[V_1,V_2,V_3,V_4]$ durch diese Gerade. D.h. also

$$\sigma Q_{ik} = U_iV_k - U_kV_i = \begin{vmatrix} U_i & U_k \\ V_i & V_k \end{vmatrix} ,$$

wobei wieder ein quadratische Identität (Bedingungsgleichung) der Form

$$Q_{12}Q_{34} + Q_{13}Q_{42} + Q_{14}Q_{23} = 0$$

gilt. Es stellt sich natürlich hier die Frage, in welcher Beziehung diese beiden Arten von Koordinaten stehen. Beziehen sich beide auf dieselbe Gerade, so gilt

$$U_1x_1+U_2x_2+U_3x_3+U_4x_4 = 0 \quad (1) \qquad V_1x_1+V_2x_2+V_3x_3+V_4x_4 = 0 \quad (2)$$

$$U_1y_1+U_2y_2+U_3y_3+U_4y_4 = 0 \quad (3) \qquad V_1y_1+V_2y_2+V_3y_3+V_4y_4 = 0 \quad (4)$$

Nun ist

$$U_1(2) - V_1(1) = Q_{12}x_2 + Q_{13}x_3 + Q_{14}x_4 = 0 \qquad (5)$$

$$U_1(4) - V_1(3) = Q_{12}y_2 + Q_{13}y_3 + Q_{14}y_4 = 0 \qquad (6)$$

und

$$x_2(6) - y_2(5) = Q_{13}p_{23} - Q_{14}p_{42} = 0 ,$$

d.h.

$$\frac{Q_{13}}{Q_{14}} = \frac{p_{42}}{p_{23}} .$$

Durch ähnliche Kombinationen der Gleichungen (1), (2) , (3) und (4) erhält man schließlich

$$p_{12}: p_{13}: p_{14}: p_{34}: p_{42}: p_{23} = Q_{34}: Q_{42}: Q_{23}: Q_{12}: Q_{13}: Q_{14} \qquad (7)$$

d.h. also: Beim Übergang von Achsen- zu Strahlenkoordinaten und umgekehrt vertauschen sich die ersten und letzten drei Koordinatentripel.

Zur bequemen Handhabung der Linienkoordinaten sollen z w e i A r t e n v o n P r o d u k t b i l d u n g eingeführt werden. Sind $p = (p_{12},p_{13},\ldots,p_{23})$, $q = (q_{12},q_{13},\ldots,q_{23})$ bzw. $R = (R_{12},R_{13},\ldots,R_{23})$, $S = (S_{12},S_{13},\ldots,S_{23})$ die Koordinaten von Geraden (oder später auch Komplexen) in Strahlen- bzw. Achsenkoordinatendarstellung, so sei

$$p \cdot q = p_{12}q_{12} + p_{13}q_{13} + p_{14}q_{14} + p_{34}q_{34} + p_{42}q_{42} + p_{23}q_{23},$$

$$(p,q) = p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14}.$$

Offenbar ist

$$p \cdot q = q \cdot p = \sum_{i,k=1}^{6} p_{ik} q_{ik} ,$$

$$(p,q) = (q,p) .$$

In ganz entsprechender Weise werden die Produkte $R \cdot S$ und (R,S) definiert. Die identischen Beziehungen zwischen den Strahlen- und Achsenkoordinaten lauten dann

$$(p,p) = 0 \qquad (R,R) = 0 . \tag{8}$$

Beziehen sich die Koordinaten p,P bzw. q, Q auf dieselbe Gerade, so gilt offenbar wegen (7)

$$\begin{aligned} (p,p) &= p \cdot P = P \cdot p = (P,P) , \\ (p,Q) &= p \cdot q = (P,q) , \\ (P,Q) &= p \cdot Q = P \cdot q = (p,q) . \end{aligned} \tag{9}$$

Es soll nun die S c h n i t t b e d i n g u n g für zwei Geraden in Linienkoordinaten abgeleitet werden. Die Geraden p,p' seien festgelegt durch je zwei auf ihnen liegende Punkte (x_1,x_2,x_3,x_4) , (y_1,y_2,y_3,y_4) bzw. (x_1',x_2',x_3',x_4') , (y_1',y_2',y_3',y_4') . Schneiden sich die Geraden, so liegen die vier Punkte in einer Ebene, d.h. ihre Koordinaten sind linear abhängig. Also ist

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \end{pmatrix} = 0 .$$

Entwickelt man diese Determinante nach zweigliedrigen Unterdeterminanten, so wird

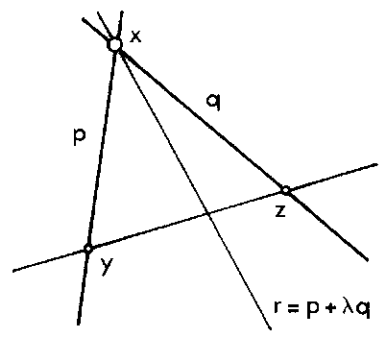
$$p_{12}p_{34}' + p_{13}p_{42}' + p_{14}p_{23}' + p_{34}p_{12}' + p_{42}p_{13}' + p_{23}p_{14}' = 0 \tag{10}$$

Die S c h n i t t b e d i n g u n g f ü r z w e i G e r a d e n p,p' hat demnach die Form $(p,p') = 0$. Sind P_{ik}, P_{ik}' , die Achsenkoordinaten der beiden Geraden, so läßt sich diese Schnittbedingung wegen (9) auch darstellen durch $p \cdot P' = P \cdot p' = (P,P') = 0$.

2.2 Die linearen Gebilde der Liniengeometrie

Sind p und q zwei sich schneidende Geraden, so ist das dadurch bestimmte Strahlenbüschel gegeben durch Geraden mit den Koordinaten $p_{ik} + \lambda q_{ik}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Denn die Strahlen p und q schneiden sich in einem Punkt $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ und das Büschel ist etwa perspektiv zur Punktreihe $y + \lambda z$ (Fig.1). Also lassen sich die Koordinaten von p und q und damit alle Geraden $r = p + \lambda q$ des Büschels schreiben in der Form

$$\begin{aligned} r_{ik} &= \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i + \lambda z_i & y_k + \lambda z_k \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} \\ &= p_{ik} + \lambda q_{ik} . \end{aligned}$$



Figur 1

Es sollen nun Gleichungen zwischen den Koordinaten einer geraden Linie studiert werden. Es gilt der S a t z: Die geraden Linien p , deren Koordinaten p_{ik} eine lineare Gleichung

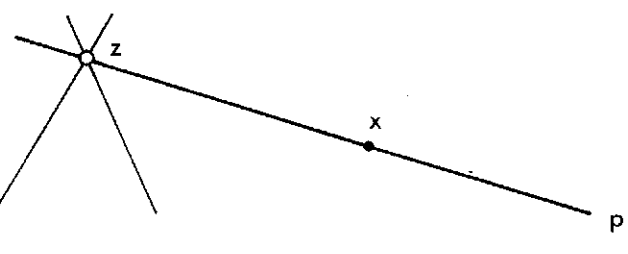
$$A \cdot p = A_{12}p_{12} + A_{13}p_{13} + A_{14}p_{14} + A_{34}p_{34} + A_{42}p_{42} + A_{23}p_{23} = 0$$

erfüllen, bilden einen l i n e a r e n K o m p l e x.

Man muß zeigen, daß es unter den gegebenen Voraussetzungen in jedem Punkt und in jeder Ebene des Raumes genau ein Geradenbüschel von Komplexstrahlen gibt. Sei also $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ irgendein Punkt und des Raumes (Fig.2). Alle Punkte $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ deren Verbindungsgeraden mit z die Gleichung $A \cdot p = 0$ erfüllen, müssen der Gleichung

$$\sum_{i,k} A_{ik} \begin{vmatrix} z_i & z_k \\ x_i & x_k \end{vmatrix} = A_{12} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} + A_{14} \begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

$$+ A_{34} \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} + A_{42} \begin{vmatrix} z_4 & z_2 \\ x_4 & x_2 \end{vmatrix} + A_{23} \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

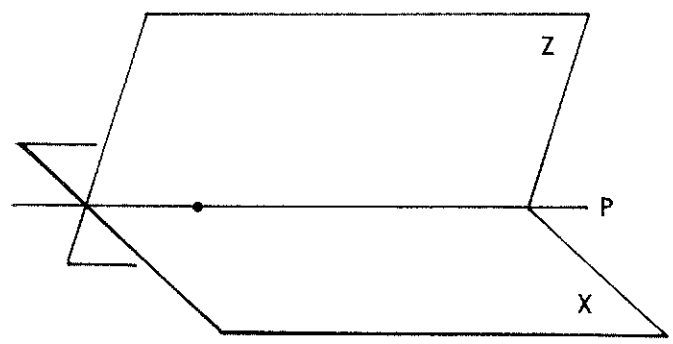


Figur 2

gehorchen. Dies ist offenbar eine lineare Gleichung in den Punktkoordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) , also eine Ebenengleichung, die Gleichung der N u l l e b e n e von x.– Gehen wir umgekehrt von der Gleichung des Komplexes in Achsenkoordinaten, $a \cdot P = 0$, aus, so läßt sich auf analoge Art zeigen, daß in einer beliebigen, fest gewählten Ebene $Z = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]$ ein Strahlenbüschel von Komplexstrahlen liegt. Denn sei $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$ eine Ebene,

deren Schnittgerade P mit Z die Gleichung $a \cdot P = 0$ erfüllt, so muß gelten

$$\sum_{i,k} a_{ik} \begin{vmatrix} Z_i & Z_k \\ X_i & X_k \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$



Figur 3

Dies ist eine Gleichung in den Ebenenkoordinaten X_1, X_2, X_3, X_4, also die Gleichung eines Punktes, des N u l l p u n k t e s von Z.

Gilt für die Koeffizienten a_{ik} bzw. A_{ik} der Gleichung eines linearen Komplexes die Beziehung $(a,a) = 0$ bzw. $(A,A) = 0$, so sind die a_{ik} bzw. A_{ik} Koordinaten einer Geraden, folglich stellt $a \cdot P = A \cdot p = 0$ die Schnittbedingung zweier Geraden a und P bzw. A und p dar. Der so erhaltene s p e z i e l l e l i n e a r e K o m p l e x a bzw. A besteht also aus allen Geraden P bzw. p, die seine T r ä g e r - g e r a d e oder L e i t g e r a d e a bzw. A treffen. Der spezielle Komplex kann folglich im wesentlichen als G e r a d e aufgefasst werden.

Die gemeinsamen Strahlen p zweier linearer Komplexe A und B bilden eine l i n e a r e K o n g r u e n z. Sie ist gegeben durch zwei lineare Gleichungen in Linienkoordinaten: $A \cdot p = 0$ und $B \cdot p = 0$. Alle Geraden p, die diese Gleichungen erfüllen, sind auch Lösungen der Gleichung $(A + \lambda B) \cdot p = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei variablem λ erhält man so ein ganzes B ü s c h e l v o n l i n e a r e n K o m p l e x e n. Die speziellen Komplexe, d.h. die Geraden dieses Komplexbüschels, ergeben sich aus der Bedingungsgleichung (8) für Linienkoordinaten:

$$(A + \lambda B, A + \lambda B) = 0$$

d.h.

$$(A,A) + 2\lambda (A,B) + \lambda^2 (B,B) = 0 .$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in λ, mit den Lösungen λ_1 und λ_2, also gibt es in einem Büschel von Komplexen im allgemeinen 2 spezielle Komplexe, d.h. Geraden mit den Koordinaten $A_{ik} + \lambda_1 B_{ik}$ und $A_{ik} + \lambda_2 B_{ik}$. Sie heißen die L e i t l i n i e n d e r K o n g r u e n z oder d e s K o m p l e x b ü s c h e l s. Sie werden wegen $(A + \lambda_j B) \cdot p = 0$ von allen Strahlen p der Kongruenz getroffen.

In einer beliebigen Ebene U des Raumes bestimmen die Komplexe A und B je eindeutig einen Nullpunkt $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Die Verbindungsgerade xy ist ein Strahl der linearen Kongruenz; sie ist der Ebene U eindeutig zugeordnet. Jeder Komplex des Büschels $A + \lambda B$ hat seinen Nullpunkt ebenfalls auf dieser Geraden, und zwar hat er die Koordinaten $x_i + \lambda y_i$. Dies läßt sich leicht einsehen: Der Nullpunkt von $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]$ bezüglich des Komplexes A hat nach (12) die Gleichung

$$\sum_{i,k} a_{ik} \begin{vmatrix} U_i & U_k \\ X_i & X_k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder abgekürzt} \quad \sum_j x_j \; X_j = 0 \; ,$$

wenn $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ eine beliebige variable Ebene ist. Entsprechend induziert der Komplex B in U einen Nullpunkt mit der Gleichung

$$\sum_{i,k} b_{ik} \begin{vmatrix} U_i & U_k \\ X_i & X_k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder abgekürzt} \quad \sum_j y_j \; X_j = 0 \; .$$

Also hat der Nullpunkt der Ebene U bezüglich eines beliebigen Komplexes des Büschels $A + \lambda B$ die Gleichung

$$\sum_{i,k} (a_{ik} + \lambda b_{ik}) \begin{vmatrix} U_i & U_k \\ X_i & X_k \end{vmatrix} = \sum_{i,k} a_{ik} \begin{vmatrix} U_i & U_k \\ X_i & X_k \end{vmatrix} + \lambda \sum_{i,k} b_{ik} \begin{vmatrix} U_i & U_k \\ X_i & X_k \end{vmatrix}$$

$$= \sum_j x_j x_j + \lambda \sum_j y_j x_j$$

$$= \sum_j (x_j + \lambda y_j) X_j = 0 \; .$$

In jeder Ebene des Raumes liegt also genau ein Strahl $x_i + \lambda y_i$ der linearen Kongruenz $A + \lambda B$. Analog zeigt man, daß durch jeden Punkt des Raumes ebenfalls genau ein Strahl der Kongruenz geht.

2.3 Der lineare Komplex als Raumelement

Die in den beiden letzten Abschnitten dargestellten Elemente der projektiven Liniengeometrie waren, wie erwähnt, durch die genannten Arbeiten von Battaglini (1866a,b) bereits etwa in dieser Art behandelt worden. In seinen Arbeiten (1870a,b) führte Klein eine entscheidende Erweiterung des Gesichtspunktes ein: es wurde nun nicht mehr die gerade Linie als R a u m e l e m e n t betrachtet, sondern der l i n e a r e K o m p l e x. In der Arbeit (1870a) steht dieser Ansatz noch eher im Hintergrund, erst (1870b) wird er explizit ausgesprochen:

> "Die Bedeutung der Linienkoordinaten ist zunächst in ihrer steten Verbindung mit den Punktkoordinaten einerseits und den Ebenenkoordinaten andererseits zu suchen ... Indessen scheint es, als wenn der Fortgang der allgemeinen Theorie es wünschenswert mache, die Linienkoordinaten unabhängig von dieser Beziehung als selbständige Veränderliche zu betrachten." (1870b, 81)

Klein knüpft in seiner für die Begründung der projektiven Liniengeometrie fundamentalen Arbeit (1870a) unmittelbar an seine Dissertation (1868) an. Dabei steht immer die Theorie der Komplexe zweiten Grades, sowie deren kanonische Form im Vordergrund. Es soll hier von diesem Bezug abgesehen, und es sollen Kleins Untersuchungen nur in ihrer Beziehung auf lineare Komplexe vorgetragen werden.[2]

Die sechs Größen a_{ik} bzw. A_{ik} in der Komplexgleichung $a \cdot P = 0$ bzw. $A \cdot p = 0$ werden jetzt als K o o r d i n a t e n d e s l i n e a r e n K o m p l e x e s gedeutet.

Wie aus den Ausführungen im Abschnitt 2.2 folgt, bedeutet das Verschwinden von (A,A), daß A zu einem speziellen linearen Komplex, d.h. zu einer Geraden degeneriert ist. $(A,A) = 0$ hat also eine unabhängig vom Koordinatensystem geltende geometrische Bedeutung. Klein nannte deshalb (A,A) die I n v a r i a n t e d e s l i n e a r e n K o m p l e x e s A mit den Koordinaten A_{ik} (Klein 1870a,56). Eine beliebige lineare Transformation der (zugrundeliegenden Tetraeder-) Koordinaten wird also den Ausdruck (A,A) bis auf eine Konstante in sich überführen.

Die Invariante eines Komplexes des Büschels $A + \lambda B$ hat folgende Gestalt:

$$(A + \lambda B, A + \lambda B) = (A,A) + 2\lambda\,(A,B) + \lambda^2\,(B,B).$$

Dabei sind (A,A) und (B,B) die Invarianten der Komplexe A und B. Aber was ist die Bedeutung von (A,B)? Klein nannte diesen Ausdruck die s i m u l t a n e I n v a r i a n t e d e r l i n e a r e n K o m p l e x e (Klein 1870a,56) A und B. Zur Begründung dieser Bezeichnung gab Klein eine geometrische Deutung für das Verschwinden des Ausdruckes (A,B).

Gilt für die Koordinaten A_{ik} und B_{ik} zweier Komplexe die Beziehung $(A,B) = 0$, so nannte Klein diese linearen Komplexe i n I n v o l u t i o n oder in i n v o l u t o r i s c h e r L a g e (Klein 1870a,56) (nicht zu verwechseln mit dem Involutionsbegriff von Battaglini - vgl. Abs. IV 6). Dann folgt nämlich aus der Bedingungsgleichung für die Leitgeraden des Komplexbüschels $(A + \lambda B, A + \lambda B) = 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(A,A) + \lambda^2 (B,B) = 0$$

d.h. also

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{(B,B)}{(A,A)}}\ .$$

Es sei

$$\lambda_0 = +\sqrt{-\frac{(B,B)}{(A,A)}}\ ;$$

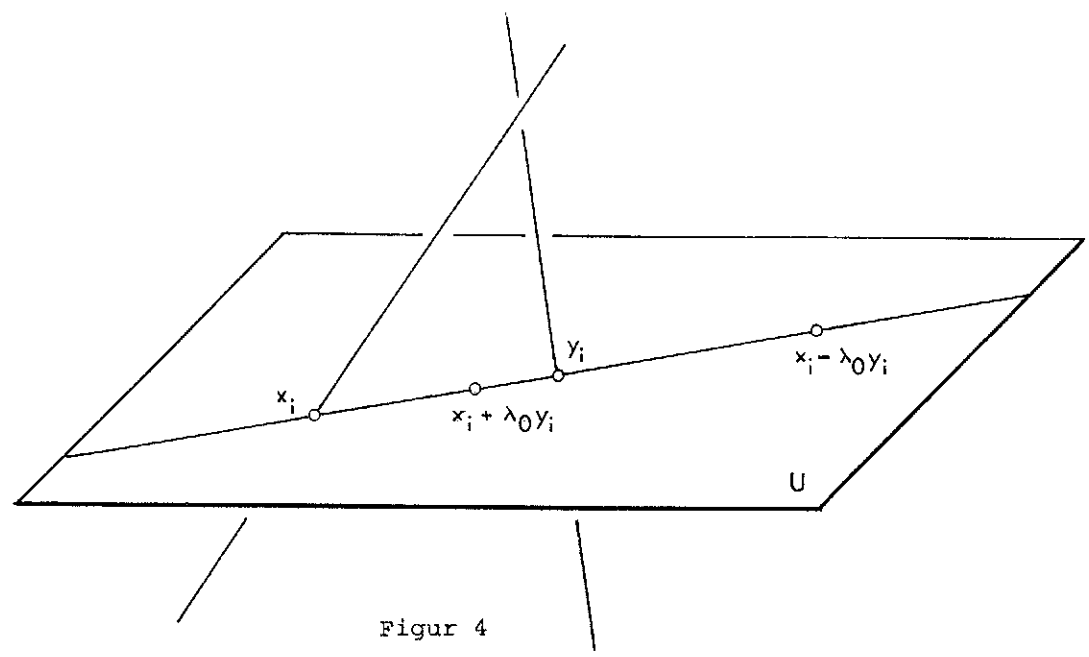
sind (x_1,x_2,x_3,x_4) und (y_1,y_2,y_3,y_4) die Nullpunkte der Komplexe A und B in einer beliebigen Ebene $U = [U_1,U_2,U_3,U_4]$, so sind nach dem am Ende des Abschnittes 2.2 bewiesenen Satz $x_i + \lambda_0 y_i$ und $x_i - \lambda_0 y_i$ die Koordinaten der Nullpunkte (d.h. hier der Durchstoßpunkte) der Leitgeraden $A + \lambda_0 B$ und $A - \lambda_0 B$ des Komplexbüschels bezüglich der Ebene U.

Die Punkte mit den Koordinaten x_i, $x_i + \lambda_0 y_i$, y_i, $x_i - \lambda_0 y_i$ liegen alle auf dem der Ebene U zugeordneten Strahl der linearen Kongruenz des Komplexbüschels und sind harmonisch (Fig.4). Daraus schließt man auf den

S a t z Zwei lineare Komplexe A und B, für die $(A,B) = 0$ ist, d.h. die in Involution liegen, liefern in einer beliebigen Ebene des Raumes auf dem dieser Ebene zugehörigen Strahl der linearen Kongruenz zwei Punkte, die jedesmal harmonisch liegen zu den beiden Punkten, in denen der Kongruenzstrahl den beiden Leitlinien begegnet.

Auf ganz analoge Weise ließe sich ein Satz ableiten, bei dem "Punkt" und "Ebene" vertauscht sind: die i n v o l u t o r i s c h e L a g e zweier

Komplexe ist ein s e l b s t d u a l e r Begriff.



Figur 4

Ist einer der Komplexe A oder B speziell, d.h. ist etwa $(B,B) = 0$, so besagt die involutorische Lage der Komplexe einfach, daß die Gerade B dem Komplex A angehört: $(A,B) = A \cdot b = 0$. Sind beide Komplexe speziell, so bedeutet $(A,B) = 0$, daß die Trägergeraden beider spezieller Komplexe sich schneiden. Der Begriff der involutorischen Lage läßt sich also ohne weiteres auf diese Spezialfälle ausdehnen.

Wegen der Homogenität der Koordinaten eines linearen Komplexes hängt dieser von fünf wesentlichen Konstanten ab, d.h. man hat es mit einem linearen, genauer mit einem projektiven Raum von fünf Dimensionen zu tun. Sind also sechs beliebige linear unabhängige Komplexe A^i, $i = 1,2,\ldots,6$, gegeben, so läßt sich jeder Komplex C als Linearkombination der A^i schreiben:

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i A^i_{kj} .$$

An eine lineare Gleichung der Form

$$(A,B) = A \cdot b = A_{12}b_{12}+A_{13}b_{13}+A_{14}b_{14}+A_{34}b_{34}+A_{42}b_{42}+A_{23}b_{23} = 0 \quad (13)$$

kann nun immer eine T h e o r i e d e r R e z i p r o z i t ä t oder P o l a r i t ä t angeknüpft werden. Werden etwa die A_{ik} festgehalten, so gibt es vierfach unendlich viele Koordinatensechstupel $(b_{12},b_{13},b_{14},b_{34},b_{42},b_{23})$, welche die Gleichung (13) erfüllen, d.h. die mit dem Komplex A in Involution liegen; sie bilden eine (vierdimensionale) H y p e r e b e n e (genauer: Polarhyperebene) im fünfdimensionalen projektiven Raum der linearen Komplexe. Wie man aus der linearen Algebra weiß, lassen sich die Komplexe dieser Hyperebene dann auch als Linearkombination von fünf beliebigen linear unabhängigen Komplexen dieser Hyperebene auffassen usw..

Man erhält schließlich, wie schon Battaglini gefunden hatte (vgl.Abs.

IV 6), die Tabelle 1. Die Involutionsbeziehung kann also als eine konkrete Realisierung des Dualitätsprinzips im fünfdimensionalen projektiven Raum der linearen Komplexe aufgefasst werden. Von diesem Gesichtspunkt aus sollen noch einige Besonderheiten des Komplexraumes besprochen werden.

Die zu einem Komplex $A = (A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{23})$ in Involution liegenden Komplexe $b = (b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{23})$ bilden eine (vierdimensionale) Hyperebene mit der Gleichung $A \cdot b = 0$. Dieser können nun die Koordinaten $[A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{23}]$ zugeordnet werden. In diesem Sinne spricht Klein (1870b, 84) davon, daß man den Komplex A auf zweifache Weise auffassen

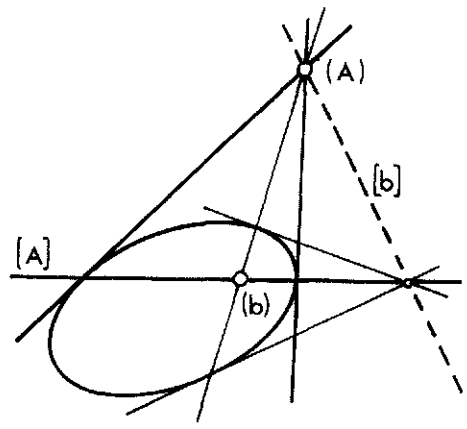
Tabelle 1

Anzahl m der Komplexe A^i, $m =$	Dimension der Linearkombination der Komplexe A^i (= Dimension der Hyperebene)	Dimension der Gesamtheit der Komplexe in Involution zu den A^i (=Dimension der Polarhyperebene)	Komplexe in Involution zu den A^i sind Linearkombinationen von n Komplexen, $n =$
0	-	5	6
1	0	4	5
2	1	3	4
3	2	2	3
4	3	1	2
5	4	0	1
6	5	-	0

kann: entweder als R a u m e l e m e n t mit den Koordinaten $(A) = (A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{23})$ oder als G e s a m t h e i t d e r m i t i h m i n I n v o l u t i o n l i e g e n d e n l i n e a r e n K o m p l e x e, repräsentiert durch die Gleichung $A \cdot p = 0$, oder eben durch die Hyperebenenkoordinaten $[A] = [A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{23}]$.

Von dieser Gesamtheit erscheinen im dreidimensionalen projektiven Raum nur die darin enthaltenen speziellen Komplexe, da ein allgemeiner linearer Komplex, als Einheit aufgefasst, kein Element dieses Raumes ist. Dabei handelt es sich aber genau um die Geraden des Komplexes A, denn dieselben stellen die einzigen speziellen Komplexe dar, die mit A in Involution liegen. Und in diesem Sinne sind die beiden Auffassungen äquivalent (vgl. dazu Ziegler (1981, Abs. II 5.3)).

Klein vermied es, von Hyperebenen zu sprechen und führte deshalb auch nicht aus, daß im Rahmen des fünfdimensionalen Komplexraumes der Komplex $(A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{23})$ und die Hyperebene $[A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{23}]$ als p o l a r bezüglich der Quadrik $(B,B) = B \cdot b = 0$ zu bezeichnen sind. Die Elemente dieser Quadrik bestehen offenbar aus allen speziellen Komplexen, d.h. aus allen Geraden des dreidimensionalen projektiven Raumes. "In Involution" heißt dann "konjugiert bezüglich dieser Quadrik".



Figur 5

Die Gleichung $A \cdot p = 0$ kann also auf vier verschiedene Arten interpretiert werden (Fig. 5 zeigt das zweidimensionale Analogon):

1. (A) in Involution mit (b) ,
2. [A] inzident mit (b) ,
3. (A) inzident mit [b] ,
4. [A] in Involution mit [b] .

Die von Klein nicht ausgearbeitete dualistische Betrachtungsweise im Komplexraum ist für ein weitergehendes Verständnis der geometrischen Grundlagen der Mechanik des starren Körpers im euklidischen, sowie im hyperbolischen oder elliptischen Raum eine Notwendigkeit. Man beachte, daß man es eigentlich mit z w e i ineinander verwobenen Dualitäten zu tun hat: der Dualität im gewöhnlichen dreidimensionalen projektiven Raum und der Dualität im fünfdimensionalen Komplexraum (vgl. auch Abs. VI 3.7.2).

2.4 Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten

2.4.1 Vorbetrachtung

Bereits beim Studium der Transformation der allgemeinen quadratischen Gleichung in Linienkoordinaten auf eine kanonische Form betrachtete Klein in seiner Dissertation (1868) lineare Transformationen zwischen Linienkoordinaten und stellte fest, daß

> "es auf dasselbe hinaus [kommt], ob wir den Ausdruck der Linienkoordinaten durch Punkt- (oder Ebenen-) Koordinaten zugrunde legen und diese letzteren linear transformieren, oder ob wir die Linienkoordinaten selbst unmittelbar linear transformieren und bedingen, daß dabei der Ausdruck ... $[(p,p)]$ in ein Vielfaches seiner selbst übergehe." (1868, 19)

In der Arbeit (1870a) legte Klein den g e o m e t r i s c h e n Sinn des (1868) algebraisch behandelten Transformationsproblems der Gleichung zweiten Grades auseinander, und beschrieb das System der sogenannten K l e i n s c h e n F u n d a m e n t a l k o m p l e x e (vgl.Abs.2.5). Die geometrische Diskussion der a l l g e m e i n s t e n linearen Transformation der Linienkoordinaten ist aber erst Thema von (1870b) - abgesehen von einigen Andeutungen in (1870a, 57f.).

Zur Vereinfachung der Schreibweise werde wieder die Bezeichung $x' = (x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', x_6')$ für Linien- und Komplexkoordinaten verwendet. Die allgemeine lineare Transformation der (alten) Linienkoordinaten $(x_1', x_2', \ldots, x_6')$

$$\rho x_i = \sum_k C^i_k \, x_k' \quad \text{mit} \quad \det (C^i_k) \neq 0$$

kann nun als die Einführung einer neuen Koordinatenbestimmung interpretiert werden; dabei stellt sich von selbst die Frage nach der geometrischen Bedeutung der neuen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Schreibt man die Gleichung in der Form

$$\rho x_i = \sum_k C^i_k x_k' = C^i \cdot x' = (C^i, x') \quad ,$$

so erkennt man sofort, daß jede einzelne der verallgemeinerten Koordinaten x_i gleich der s i m u l t a n e n I n v a r i a n t e der Geraden $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_6')$ mit gewissen Komplexen $C^i = (C^i_1, C^i_2, \ldots, C^i_6)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, ist. Als Bedingung dafür, daß die x_i' die Koordinaten einer Geraden, d.h. die Koordinaten eines speziellen Komplexes darstellen, gilt die Gleichung (8):

$$\frac{1}{2} (x', x') = x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6' = 0 \; .$$

Setzt man hier mit Hilfe der inversen Transformation

$$\sigma x_k' = \sum_m (C^{-1})^k{}_m \, x_m$$

die Werte x_k' ein, so erhält man eine allgemeine quadratische Gleichung, die abkürzend mit $\Omega(x,x) = \sum \Omega_{ik} x_i x_k = 0$ bezeichnet sei. Sollen sich also die neuen Koordinaten wiederum auf spezielle lineare Komplexe, d.h. auf Geraden beziehen, so müssen sie diese quadratische Bedingungsgleichung erfüllen.

In der Abhandlung (1870b) geht Klein allerdings etwas anders vor.[3] Er gibt ohne Beweis einen euklidisch-metrischen Ausdruck für die simultane Invariante zweier Komplexe an. - Zur Skizzierung seines Vorgehens sollen wieder die auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogene Darstellung der Linien- oder Komplexkoordinaten mit Hilfe eines Vektorpaares $(a; \bar{a})$ herangezogen werden (vgl. Abs. 4.4). Die simultane Invariante von $(a; \bar{a})$ und $(b; \bar{b})$ hat dann die Form $\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$. Wie Zeuthen (1869) festgestellt hatte, ist nun aber

$$\frac{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}{|a| \; |b|} \quad \text{mit} \quad a \cdot \bar{a} = 0 \quad \text{und} \quad b \cdot \bar{b} = 0$$

gleich dem geeignet normierten gegenseitigen Moment der Geraden $(a; \bar{a})$ und $(b; \bar{b})$ und verschwindet genau dann, wenn die Geraden sich schneiden (vgl. Abs. IV 5).

Ist aber $b \cdot \bar{b} = 0$ für eine Gerade $(b; \bar{b})$ und $a \cdot \bar{a} \neq 0$ für einen linearen Komplex, so stellt nach Möbius (1837) und Battaglini (1869b) (vgl. Abs. IV 6) der Ausdruck $(\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}) / |a| \; |b|$ das Moment der Geraden

$(b;\bar{b})$ bezüglich des linearen Komplexes $(a;\bar{a})$ dar. Das Verschwinden dieses Ausdrucks bedeutet, daß die Gerade $(b;\bar{b})$ zum Komplex $(a;\bar{a})$ gehört, denn $\bar{a}\cdot b + a\cdot\bar{b} = 0$ ist die Gleichung des Komplexes $(a;\bar{a})$ in Linienkoordinaten.

Es ist nun sinnvoll, wie Klein dies andeutete[4], den Ausdruck

$$\frac{\bar{a}\cdot b + a\cdot\bar{b}}{|a|\,|b|} \quad \text{mit} \quad a\cdot\bar{a} \neq 0 \quad \text{und} \quad b\cdot\bar{b} \neq 0$$

als das g e g e n s e i t i g e M o m e n t d e r K o m p l e x e $(a;\bar{a})$ und $(b;\bar{b})$ zu bezeichnen. Der Ausdruck für das Moment zweier Komplexe ist also formal identisch mit der früher (Abs. 2.3) eingeführten s i m u l t a n e n I n v a r i a n t e zweier Komplexe. Sein Verschwinden bedeutet, daß die beiden Komplexe i n I n v o l u t i o n liegen.

Klein gab nun, wie angekündigt, eine geometrische Deutung des Moments zweier Komplexe im euklidischen Raum. Dort sind die Achsen der Komplexe $(a;\bar{a})$, $(b;\bar{b})$ gegeben durch $(a;\bar{a} - \kappa_a a)$ mit $\kappa_a = (a\cdot\bar{a}) / (a\cdot a)$ bzw. $(b;\bar{b} - \kappa_b b)$ mit $\kappa_b = (b\cdot\bar{b}) / (b\cdot b)$. Es soll nun das Moment der Achsen in Bezug aufeinander berechnet werden. Ist δ der kürzeste Abstand und γ der Zwischenwinkel dieser Achsen, so gilt (vgl. Abs. IV 5)

$$\frac{(\bar{a} - \kappa_a a)\cdot b + a\cdot(\bar{b} - \kappa_b b)}{|a|\,|b|} = \delta\sin\gamma$$

$$\frac{\bar{a}\cdot b + a\cdot\bar{b}}{|a|\,|b|} - (\kappa_a + \kappa_b)\,\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|} = \delta\sin\gamma$$

Nun ist aber $(a\cdot b) / |a||b| = \cos\gamma$, also wird

$$\frac{\bar{a}\cdot b + a\cdot\bar{b}}{|a|\,|b|} = \delta\sin\gamma + (\kappa_a + \kappa_b)\cos\gamma. \quad \text{(Klein 1870b, 34)}$$

Aus dieser Formel ergibt sich auch eine geometrische Deutung des Moments der Geraden $(b,\bar{b})$ bezüglich des Komplexes $(a;\bar{a})$. Denn dort gilt einfach $\kappa_b = 0$, also wird das Moment gleich $\delta\sin\gamma + \kappa_a\cos\gamma$. Fallen die beiden Komplexe zusammen, d.h. ist $(a;\bar{a}) = \lambda(b;\bar{b})$, $\lambda\in\mathbb{R}$, so wird $\delta = 0$, $\gamma = 0$ und das Moment, d.h. die Invariante des Komplexes, wird gleich $2\kappa_a$, also gleich dem Plückerschen Parameter, multipliziert mit 2.

2.4.2 Verallgemeinerte Koordinaten

Nach den im vorhergehenden Abschnitt angestellten Betrachtungen ist das Vorgehen Kleins zur Verallgemeinerung der Koordinatenbestimmung unmittelbar einleuchtend:

> "...[Es] seien nun sechs lineare Komplexe gegeben, die mit den Symbolen $x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$ bezeichnet sein mögen. Über ihre gegenseitige Lage mache ich nur die Voraussetzung, daß es keinen linearen Komplex gibt, der mit sämtlichen sechs zugleich in Involution liegt... D i e r e l a t i v e n W e r t e d e r m i t g e g e b e n e n K o n s t a n t e n m u l t i p l i z i e r t e n M o m e n t e e i n e r g e r a d e n

> L i n i e i n b e z u g a u f d i e s e (K o m p l e x e) b e t r a c h t e i c h a l s d i e h o m o g e n e n K o o r d i n a t e n d e r s e l b e n." (1870b, 82)[5]

Diese Koordinaten seien mit $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ bezeichnet; dann ist $x_i = 0$ die Gleichung des Komplexes X^i. Denn sind $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$ die alten Koordinaten, so ist nach Abschnitt 2.4.1

$$\rho x_i = \sum_{k=1}^{6} X^i_k x'_k = X^i \cdot x' = (X^i, X')$$

und damit stellt $x_i = 0$ tatsächlich die Gleichung des linearen Komplexes X^i dar.

Sind die Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ beliebig, so entspricht ihnen im allgemeinen keine Gerade. Erst wenn sie eine quadratische Bedingungsgleichung $\Omega(x,x) = \sum \Omega_{ik} x_i x_k = 0$ (vgl. Abs. 2.4.1) erfüllen, wird dies der Fall sein.

> "Aus der Form dieser Gleichung wird es erlaubt sein, auf die Art und gegenseitige Lage der zugrundegelegten sechs linearen Komplexe X^i zu schließen." (1870b, 83)

Erfüllen die Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ die Bedingung $\Omega(x,x) = 0$ n i c h t, so werden sie als die K o o r d i n a t e n e i n e s l i n e a r e n K o m p l e x e s bezeichnet. Es gilt folglich:

> "Als Koordinaten eines Komplexes ersten Grades sind die relativen Werthe der mit gegebenen Konstanten multiplizierten Momente derselben mit Bezug auf die sechs gegebenen Komplexe anzusehen." (1870b, 84)

Die Gleichung $\Omega(x,x) = 0$ war die Verallgemeinerung des Ausdrucks für die Invariante eines Komplexes. Setzt man Komplexkoordinaten in $\Omega(x,x)$ ein, so erhält man gerade die Invariante dieses Komplexes und diese ist im wesentlichen gleich dem Plückerschen Parameter dieses Komplexes. Sind $x = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_6)$ die Koordinaten zweier verschiedener linearer Komplexe, so stellt $\Omega(x,y) = \sum \Omega_{ik} x_i y_k$ die simultane Invariante der beiden Komplexe dar. Wie gezeigt wurde, ist diese bis auf gewisse Faktoren gleich dem gegenseitigen Moment der beiden Komplexe. Das Verschwinden dieser Invariante bedeutet, daß die Komplexe in Involution liegen.

2.5 Die Kleinschen Fundamentalkomplexe

Im Laufe seiner Untersuchungen zur kanonischen Gleichungsform quadratischer Komplexe, stieß Klein schon in seiner Dissertation (1868) auf eine merkwürdige Konfiguration von sechs linearen Komplexen. Er nannte sie in der Arbeit (1870a) die F u n d a m e n t a l k o m p l e x e und untersuchte an dieser Stelle deren geometrische Beziehungen eingehend[6]. Im vorliegenden Zusammenhang lassen sie sich etwa in folgender Weise ableiten.[7]

Bei der quadratischen Form in Komplexkoordinaten

$$x'_1 x'_4 + x'_2 x'_5 + x'_3 x'_6 = 0$$

handelt es sich um die Bedingungsgleichung dafür, daß die Komplexkoordinaten $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$ einen speziellen linearen Komplex oder eine Gerade

darstellen. Ihre Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

sie ist regulär, da die Determinante gleich -1 ist. Eine beliebige lineare Transformation der x_i' ändert wohl den Wert dieser Determinante, macht sie aber nie gleich Null. Die Matrix ist symmetrisch, also diagonalisierbar, und zwar müssen in diesem Fall alle Diagonalglieder ungleich Null sein. Beschränkt man sich auf reelle quadratische Formen sowie reelle Transformationen, so hat die vorliegende quadratische Form nach dem Sylvesterschen Trägheitsgesetz eine wohlbestimmte Signatur.

Mit Hilfe der Transformation

$$x_1' = x_1 + x_4 , \quad x_2' = x_2 + x_5 , \quad x_3' = x_3 + x_6 ,$$
$$x_4' = x_1 - x_4 , \quad x_5' = x_2 - x_5 , \quad x_6' = x_3 - x_6 ,$$

erhält man die neue quadratische Form

$$\Omega(x,x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2 - (x_5)^2 - (x_6)^2 .$$

Die quadratische Form, die der Liniengeometrie zugrunde liegt, gehört also zu denjenigen, die in ihrer Normalform gleich viele positive wie negative Vorzeichen aufweisen.

Im Sinne des Abschnittes 2.4 ist $\Omega(x,x)$ die Invariante eines linearen Komplexes mit den Koordinaten $x = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$. Ihr Verschwinden gibt die Koordinatenbedingung für einen speziellen Komplex an. Die simultane Invariante ergab sich früher (Abs. 2.3) als Koeffizient des linearen Gliedes 2λ , im Ausdruck für die Invariante der Komplexe $x + \lambda y$ eines Komplexbüschels, d.h. also hier als Koeffizient von $\Omega(x+\lambda y, x+\lambda y)$ in der Entwicklung nach Potenzen von λ :

$$\Omega(x+\lambda y, x+\lambda y) = \lambda^2 \Omega(x,x) + 2\lambda \Omega(x,y) + \Omega(y,y) .$$

Wie man leicht nachrechnet, wird

$$\Omega(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \Omega(x,x)}{\partial x_i} y_i .$$

Im vorliegenden Fall hat die s i m u l t a n e I n v a r i a n t e der Komplexe x und y also die Form

$$\Omega(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5 - x_6 y_6 .$$

Ihr Verschwinden bedeutet natürlich wieder die i n v o l u t o r i s c h e L a g e der beiden Komplexe x und y .

Seien $(1,0,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0,0)$,...., $(0,0,0,0,0,1)$ die Koordinaten der Grundkomplexe im x-System.

Werden sie in dieser Reihenfolge mit 1 bis 6 numeriert, und benutzt man für die simultane Invariante des Komplexes i mit dem Komplex k das Symbol $\Omega(i,k)$, $i,k = 1,2,\ldots,6$, dann gilt

$$\Omega(1,1) = \Omega(2,2) = \Omega(3,3) = 1$$
$$\Omega(4,4) = \Omega(5,5) = \Omega(6,6) = -1$$
$$\Omega(i,k) = 0 \text{ für alle } i \neq k .$$

Die Invarianten, d.h. die Parameter der sechs Fundamentalkomplexe sind also zu je dreien positiv und negativ, die simultanen Invarianten dagegen alle 0 . Was bedeutet dies geometrisch? Zunächst sind drei der Komplexe rechts und drei links gewunden (vgl. Abs. IV 4.3), und je zwei Komplexe liegen in Involution. Diese Anordnung von sechs Komplexen spielt in der Schraubentheorie von Robert Ball (Abs. 4) eine große Rolle. Sie heißen dort die sechs Korreziprokalschrauben.

2.6 Liniengeometrie und Mechanik

In diesem Abschnitt soll die wichtigste und einflußreichste Arbeit von Felix Klein zur geometrischen Mechanik : "Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper" (1871b) ausführlich diskutiert werden.

Dabei wird Klein selbst ausgiebig zu Worte kommen, da seine Bemerkungen für alles Weitere von größter Bedeutung sind.

Kleins Interesse an der Mechanik ist zum großen Teil auf den Einfluß seines Lehrers Plücker zurückzuführen, der selbst schon Anwendungen seiner Liniengeometrie auf die Mechanik studiert hatte. Zudem wollte Klein seit jeher eigentlich Experimentalphysik studieren, wurde aber davon "durch eine Kette unvorhergesehener Umstände" abgehalten ((Klein 1923, 14f.)).

Einleitend zu seiner Arbeit (1871b) wies Klein darauf hin, daß Plücker die Absicht besessen hatte,

> "die Anwendung seiner geometrischen Prinzipien auf Mechanik in einem größeren zusammenhängenden Werke, das der 'Neuen Geometrie' nachfolgen sollte, auseinanderzusetzen. Daß Plücker diese Absicht nicht mehr verwirklicht hat, ist umso mehr zu bedauern, als die ... wenigen Stellen, wo er sich über seine mechanischen Konzeptionen ausspricht, nur sehr kurz und schwer verständlich, häufig auch unbestimmt sind." (1871b, 226)

Letzteres wurde bereits bei der Diskussion der Arbeiten Plückers hervorgehoben (vgl. Abs. IV 3.2 und 4.5).

Indem er auf Poinsot, Möbius und Chasles hinwies, skizzierte Klein in knapper Form die vor ihm errungenen Resultate. Gleich anfangs machte er auf den doppelten Anwendungsbereich der Liniengeometrie aufmerksam: einerseits die Zusammensetzung von Kräften und andererseits die Zusammensetzung von unendlich kleinen Drehungen. Beide gehorchen denselben Regeln.

> "Dabei tritt also der Begriff der Kraft dem der unendlich kleinen Rotation als koordiniert gegenüber." (1871b, 227)

Indem Klein die Koordinaten einer Kraft und eines Kräftesystems im Sinne Plückers einführte, bewies er einen Satz, den er bei Plücker nicht in der Form bewiesen gefunden hatte. (Kleins Vorgehen sei wieder in heute üblicher Schreibweise dargestellt): Jedes Kräftesystem (Drehsystem) $(w;\bar{w})$ läßt sich ersetzen durch zwei windschiefe Kräfte (unendlich kleine Drehungen). Sind letztere gegeben durch $(a;\bar{a})$ und $(b;\bar{b})$, so muß also gelten

$$(w;\bar{w}) = (a;\bar{a}) + (b;\bar{b})$$

wobei $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = 0$ und $w \cdot \bar{w} \neq 0$. Nach Klein sagen nun diese Bedingungen aus, daß die Geraden $(a;\bar{a})$ und $(b;\bar{b})$ in bezug auf den Komplex mit der Gleichung $\bar{w} \cdot p + w \cdot \bar{p} = 0$ k o n j u g i e r t e G e r a d e n sind. Der Beweis ist einfach.[8] Die Bedingungen, daß eine beliebige Gerade $(p;\bar{p})$ unsere beiden Geraden schneidet, sind

$$\bar{a} \cdot p + a \cdot \bar{p} = 0 \text{ und } \bar{b} \cdot p + b \cdot \bar{p} = 0 .$$

Addition der Gleichungen liefert

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot p + (a + b) \cdot \bar{p} = \bar{w} \cdot p + w \cdot \bar{p} = 0 ,$$

also gehört $(p;\bar{p})$ zum Komplex. Dies ist aber die charakteristische Eigenschaft konjugierter Polaren (Plücker 1868, 28).

Zur Klarstellung des Verhältnisses von Liniengeometrie und Mechanik des starren Körpers kam Klein zur "Besprechung einiger besonderer Punkte", von denen die beiden wichtigsten herausgegriffen seien:

1. Ausgehend von der Bemerkung, daß Translationen, wie Drehmomente, keine eindeutig bestimmte Achse haben - im Gegensatz zu unendlich kleinen Drehungen und Kräften - wies Klein darauf hin, daß Kräfte oder Drehmomente im allgemeinen nicht Ursache von Translationen bzw. Rotationen sein können. Kräfte und Drehmomente versetzen einen starren Körper, von Spezialfällen abgesehen, in einen allgemeinen, d.h. schraubenförmigen Bewegungszustand.

> "Daß man nur von Kräften sprechen kann, welche n a c h geraden Linien wirken, nur von Bewegungen, die u m solche geschehen, kommt auf den undualistischen Charakter zurück, den überhaupt unsere Maßbestimmung besitzt. Dieselbe bezieht sich bekanntlich auf eine ebene Kurve zweiten Grades, den unendlich weit entfernten imaginären [Kugel-]Kreis. Man kann aber nach dem Vorgange von Cayley [(1859)] eine allgemeine Maßbestimmung konzipieren, bei welcher eine allgemeine Fläche zweiten Grades dieselbe Rolle spielt, wie sonst die genannte ebene Kurve [vgl. dazu Abs. VI 1.2]. Führt man eine solche Maßbestimmung ein und ersetzt gleichzeitig die sechsfach unendlich vielen Bewegungen unseres Raumes durch ebenso viele lineare Transformationen, welche die fundamentale Fläche zweiten Grades unverändert lassen ...: - so kann man gleichmäßig von Kräften sprechen, die nach Geraden und die um Gerade wirken, und von Bewegungen, die um Gerade und nach Geraden geschehen. Es würden aber beide Arten von Kräften und beide Arten von Bewegungen gleichbedeutend sein. Eine Drehung um eine Gerade ist dann dasselbe, wie eine Verschiebung nach der ihr in bezug auf die fundamentale Fläche zweiten Grades konjugierte Polare. Ebenso eine Kraft, die nach einer Geraden wirkt, dasselbe, wie eine Kraft, die um deren konjugierte Polare zu drehen bestrebt ist." (1871b, 234f.)

Die historische Tragweite der zitierten Stelle erhellt sich sofort aus einem Zusatz Kleins am Schluß dieser Arbeit, bei Gelegenheit der Zusammen-

stellung seiner Gesammelten Mathematischen Abhandlungen:

> "Der vorliegende Aufsatz ... [enthält] meine erste [!] Mitteilung über die Bedeutung der Cayley'schen Maßbestimmung für die Nicht-Euklidische Geometrie ... Die von mir ... angeregte Fragestellung ist bald darauf von Herrn Lindemann, der Herbst 1872 mit mir nach Erlangen ging, in seiner Dissertation (Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung [(1874)] ... ausführlich behandelt worden." ((1921, 238))

Kleins e r s t e Erwähnung der Bedeutung der Cayleyschen Maßbestimmung für die nichteuklidische Geometrie im Zusammenhang mit der Mechanik des starren Körpers weist auf deren z e n t r a l e S t e l l u n g für die Weiterentwicklung der hyperbolischen und elliptischen Geometrie in den 70-er Jahren hin (vgl. dazu Abs. VI und 2, sowie Kapitel VII).- An der angeführten Stelle machte Klein erstaunlicherweise bereits auf den Kern der bei Lindemann (1874) ausgearbeiteten Überlegungen zur nichteuklidischen Kinematik, die im Abschnitt VI 3 ausführlich dargestellt werden sollen, aufmerksam. Man kann daraus ablesen, wie wichtig Felix Klein der erhöhte Standpunkt der projektiven Maßbestimmungen zur Verdeutlichung und Klärung der im Euklidischen wurzelnden Grundbegriffe der Mechanik gewesen ist. Aus dieser Intention heraus sind auch seine Anregungen für das Thema der Dissertation Lindemanns zu verstehen; letzterer motivierte dann seine Arbeit selbst ganz in diesem Sinne (vgl.Abs. VI 3.1).

2. Klein hob in (1871b) noch einen weiteren Punkt besonders hervor, der ihm einer Klärung bedürftig erschien:[9]

> "Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen können, nach dem Vorstehenden, beide unter demselben geometrischen Bilde, dem linearen Komplexe, vorgestellt werden. Ein und derselbe Komplex ist also einmal Bild eines Kräftesystems, das andere Mal Bild einer unendlich kleinen Bewegung: ganz in demselben Sinne, wie ein und dieselbe gerade Linie (ein spezieller Komplex) einmal eine nach ihr wirkende Kraft, das andere Mal eine um sie stattfindende Rotation versinnlichte. Zwischen dem Kräftesystem und der unendlich kleinen Bewegung, die sich auf denselben linearen Komplex beziehen, besteht ebensowenig ein ursächlicher physikalischer Zusammenhang, als zwischen der Kraft, welche nach einer Geraden wirkt, und der Rotation, die um dieselbe Gerade stattfindet. ... [Dies ist auch] daraus ersichtlich, daß bei einem gegebenen Kräftesystem doch nur dann eine bestimmte Bewegung eines starren Körpers erfolgt, wenn derselbe eine Masse, einen Schwerpunkt, ein Trägheitsellipsoid usw. besitzt. Durch einen bestimmten starren Körper, dessen Masse usw. ein für allemal gegeben ist, wird also allerdings jedem Kräftesystem eine bestimmte unendlich kleine Bewegung, die seine Wirkung ist, koordiniert. ([Anm. von Klein:] Da sowohl das Kräftesystem als die unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Komplex ersetzt werden können, so begründet jeder starre Körper von gegebener Massenverteilung eine besondere Art räumlicher Verwandtschaft, bei welcher jedem linearen Komplex ein zweiter zugeordnet ist ...) Solange man aber nur schlechthin von einem starren Körper spricht, dessen Massenverteilung gar nicht in Betracht kommt, kann von einer ursächlichen Zuordnung überhaupt nicht die Rede sein." (1871b,233)

Bemerkenswert ist hier, daß Klein in der Anmerkung bereits auf den Kern der d y n a m i s c h e n V e r h ä l t n i s s e im Rahmen der euklidischen Liniengeometrie hinwies (vgl. Abs. 5.2). Er kam aber nirgends innerhalb dieses allgemeinen Rahmens der Geometrie im Linien- und Komplexraum

wieder darauf zurück.

Zum Problem der Analogie zurückkehrend, stellte sich nach den zitierten grundsätzlichen Bemerkungen aber doch

> "die Frage, ob nicht eine andere Art physikalischen Zusammenhangs zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen obwaltet, auf den die mathematische Koordination der beiden Dinge zurückzuführen wäre." (1871b, 233f.)

Klein gelang es tatsächlich, einen solchen Zusammenhang mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten herzustellen. Er schien durchaus selbständig auf diese Beziehung gekommen zu sein. Erst beim Wiederabdruck dieser Arbeit in den Gesammelten Mathematischen Abhandlungen ⟪1921⟫ wies er auf Rodrigues (1840) und Cayley (1869) hin, ohne allerdings Möbius zu erwähnen (vgl. Abs. III 3). Wie er mit Recht bemerkte, fehlen bei diesen Autoren aber "die Ausführungen über die Geometrie der linearen Komplexe" ⟪1921, 236, Anm. 19⟫.

Kleins Überlegungen sollen wiederum mit Hilfe der modernen Schreibweise dargestellt werden:

Ein Kräftesystem (=Kraftdyname) habe die Koordinaten $(w;\bar{w})$ und eine unendlich kleine Bewegung (= Drehsystem oder Rotationsdyname) die Koordinaten $(d;\bar{d})$, wobei beidesmal die Koordinaten absolut zu nehmen sind. Dann repräsentiert nach Klein der Ausdruck (wie bereits Möbius gefunden hatte - vgl. Abs. III 3)

$$\bar{d}\cdot w + d\cdot\bar{w}$$

> "das Quantum der Arbeit, welche das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegungen leistet." (1871b, 236) (Vgl. dazu Abs. 5.3)

Verschwindet der Ausdruck, $\bar{d}\cdot w + d\cdot\bar{w} = 0$,

> "so leistet das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit. Diese Gleichung nun repräsentiert uns ... den Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen." (1871, 236).

Schreibt man $(w;\bar{w}) = (w_1,w_2,\ldots,w_6)$ und $(d;\bar{d}) = (d_1,d_2,\ldots,d_6)$ so erhält die Gleichung $\bar{d}\cdot w + d\cdot\bar{w} = 0$ die Gestalt

$$d_4w_1 + d_5w_2 + d_6w_3 + d_1w_4 + d_2w_5 + d_3w_6 = 0 \qquad (14)$$

Sind etwa die d_i fest und die w_i veränderlich, so gibt es fünffach unendlich viele Kräftesysteme $(w;\bar{w})$, die bei der gegebenen unendlich kleinen Bewegung $(d;\bar{d})$ k e i n e Arbeit leisten. Sieht man von der jeweiligen Intensität des Kräftesystems ab, d.h. betrachtet man nicht die absoluten Koordinatenwerte $(w_1,w_2,\ldots,w_6)$, sondern nur deren Verhältnisse $w_1 : w_2 : w_3 : w_4 : w_5 : w_6$, so geht man von den Kräftesystemen zu den zugrundeliegenden linearen Komplexen über. Entsprechendes gilt für unendlich kleine Bewegungen, d.h. für Drehsysteme. Dann bedeutet aber die obige Gleichung (14) nichts anderes als das Verschwinden der s i m u l t a n e n I n v a r i a n t e der Komplexe $(w;\bar{w})$ und $(d;\bar{d})$, d.h. sie liegen in Involution. Wie bereits im Abschnitt 2.3 angedeutet wurde, begründet aber eine solche Gleichung eine P o l a r i t ä t oder R e z i p r o z i t ä t i m K o m p l e x r a u m, wobei sich hier reziprok gegenüberstehen:

ein Drehsystem $(d,\bar{d})$ und die Menge der bezüglich $(d;\bar{d})$	ein Kräftesystem $(w,\bar{w})$ und die Menge der Drehsysteme

keine Arbeit leistenden $(d;\bar{d})$, bezüglich denen
Kräftesysteme $(w,\bar{w})$. $(w;\bar{w})$ keine Arbeit leistet.

Sind wie oben die d_i fest und die w_i variabel, so stellt (14) die Gleichung der unendlich kleinen Bewegung in Komplexkoordinaten $w_1,w_2,\ldots,w_6$ dar, deren Hyperebenenkoordinaten gleich $[d_4,d_5,d_6,d_1,d_2,d_3]$ sind. D.h. also:

> "Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten eines Kräftesystems wird eine unendlich kleine Bewegung dargestellt." (1871b, 236)

Es gilt natürlich auch die Umkehrung:

> "Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten einer unendlich kleinen Bewegung wird ein Kräftesystem dargestellt." (1871b, 237)

In diesem Fall ist

$$w_4d_1 + w_5d_2 + w_6d_3 + w_1d_4 + w_2d_5 + w_3d_6 = 0 \qquad (14')$$

die Gleichung des Kräftesystems in Hyperebenenkoordinaten $d_1,d_2,\ldots,d_6$, dessen Komplexkoordinaten gleich $(w_4,w_5,w_6,w_1,w_2,w_3)$ sind.

Vermöge der durch (14') vermittelten Reziprozität zwischen dem projektiven Raum der linearen Komplexe und seinem projektiven Dualraum der Hyperebenen kommen also den Kräftesystemen etwa Komplexkoordinaten und den unendlich kleinen Drehungen Hyperebenenkoordinaten (oder umgekehrt) zu. In der Isomorphie eines projektiven Raumes mit seinem Dualraum liegt der tiefere Grund der mathematischen Koordination von Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.

Angewendet auf die mit einem allgemeinen linearen Komplex in Involution liegenden speziellen Komplexe, d.h. auf dessen Geraden selbst, erhält man den bekannten Satz:

> "Wenn ein linearer Komplex das Bild eines Kräftesystems oder einer unendlich kleinen Bewegung ist, so sind die ihm angehörigen Geraden diejenigen Linien des Raumes, in bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden." (1871b, 238)

3. Würdigung des Schaffens von Klein

3.1 Kleins Beiträge zur Liniengeometrie und zur Mechanik starrer Körper

Kleins Beiträge zur Liniengeometrie und zur Mechanik starrer Körper lassen sich in drei Schritte gliedern:

1. Übergang vom Linienraum zum Komplexraum;
2. Die Deutung der Analogie zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen als mathematische (und nicht mechanische) Zuordnung, insbesondere als reziproke (oder polare) Beziehung im Komplexraum;
3. Andeutungen zur nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers .

Der erste Schritt ist bereits veranlagt in der Dissertation (1868) und kommt in den Arbeiten (1870a,b) voll zum Tragen. Der Schritt von der geraden Linie als Raumelement zum linearen Komplex als Raumelement ist für alles Folgende fundamental. Klein legte allerdings den Schwerpunkt auf die Betrachtung des Komplexraumes als fünfdimensionalen projektiven P u n k t - raum. Auf den entsprechenden projektiven Dualraum oder Hyperebenenraum ging er an keiner Stelle explizit ein. Diese willkürliche Beschränkung des Gesichtspunktes ist nicht ganz verständlich. Vielleicht, daß sich für Klein dadurch der Komplexraum zu weit vom anschaulich Erfaßbaren und mit der Mechanik in Zusammenhang Stehenden entfernt hätte. Wie zum Teil bereits gezeigt wurde und weiter unten noch deutlicher erkannt werden wird (vgl. Abs. VI 3.7.2) , ist gerade dieser umfassendere Gesichtspunkt erst geeignet, im Rahmen der nichteuklidischen Geometrie eine vollkommene Einsicht in die gegenseitigen Beziehungen der Grundbegriffe der geometrischen Mechanik zu erlangen.

Der zweite Schritt und der dritte wurde, wie ausführlich im Abschnitt 2.6 dargelegt, in der Arbeit (1871b) vollzogen. Dadurch wurde die Bedeutung des zunächst als Abstraktion erscheinenden Komplexraumes für die Mechanik zur Genüge nachgewiesen.

Die Kleinschen Erkenntnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Obwohl schon Möbius und Battaglini eine gewisse Einsicht in die dort angedeuteten Begriffsstrukturen hatten, war es doch erst Klein, der sie ganz durchschaute. Er unterschied als erster deutlich das g e o m e t r i s c h e Gebilde des linearen Komplexes von dessen m e c h a n i s c h e n D e u t u n g e n als Kräfte- oder Rotationsdyname. Zudem deckte er als erster das eigentliche Wesen der A n a l o g i e zwischen letzteren auf: Sie ist Ausdruck einer durch das Prinzip der virtuellen Arbeit induzierten Polarität (oder Reziprozität) im Komplexraum.

Nach Klein (1871b) sind also im Komplexraum z w e i Zuordnungen für die Mechanik von besonderer Bedeutung:

1. Die der mehrmals genannten Analogie zugrunde liegende, durch das Verschwinden der simultanen Invariante erzeugte Reziprozitätsbeziehung zwischen Komplexen und dazu in Involution liegenden Hyperebenen von Komplexen. Die diese Reziprozität oder Polarität erzeugende Quadrik im

Tabelle 2 : Grundbegriffe der euklidischen geometrischen Mechanik

	Kinematisch (Geschwindigkeiten und Beschleunigungen)	Geometrisch	Statisch (Impulse und Kräfte)
"Rotatorisch"	Rotation	Spezieller linearer Komplex (=Gerade)	Drehmoment (=Kräftepaar) = Kraft mit unendlich ferner Wirkungslinie
	Rotations-System (= Schraubung) - Zwei erzeugende Rotationen - Geraden mit verschwindender Translation	Linearer Komplex, Nullsystem - Konjugiertes Geradenpaar - Komplexgeraden, Nullgeraden	
		Analogie	
"Translatorisch"	Translation (=Rotationspaar) = Rotation mit unendlich ferner Achse	Spezieller linearer Komplex (=Gerade)	Einzelkraft
		Linearer Komplex, Nullsystem - Konjugiertes Geradenpaar - Komplexgeraden, Nullgeraden	Kräftesystem - Zwei erzeugende Kräfte (=Kraftkreuz) - Geraden mit verschwindendem Moment

Komplexraum besteht genau aus den speziellen linearen Komplexen, d.h. sie besteht aus sämtlichen Geraden des gewöhnlichen projektiven Raumes.

2. Die durch das Trägheitsellipsoid induzierte Beziehung von Kräftesystem (Kräftedyname) und momentanem Beschleunigungssystem (Beschleunigungsdyname) (vgl. Abs. 5.1).- Wie später gezeigt wird, handelt es sich dabei im Rahmen der nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers um eine reziproke Beziehung im Komplexraum und nicht um eine bloß kollineare (Abs. VII 1.3.3). Darin liegt der Grund, weshalb der Komplexraum, bloß als fünfdimensionaler P u n k t raum aufgefasst, nur ein einseitiges Bild der umfassenden Verhältnisse abgibt.

Erstere Reziprozität spielt vor allem bei kinematischen und statischen Überlegungen eine zentrale Rolle, und wird bei Lindemann (1874) ausführlich behandelt (Abs. VI 3.7.2). Die zweite Reziprozität wird insbesondere in der Dynamik wichtig und tritt erstmals bei Heath (1884) formal in Erscheinung (Abs. VII 1.3.2).

3.2 Kleins mathematische Denkweise

Verschiedene Komponenten in Felix Kleins (1849-1925) mathematischer Denkweise trugen dazu bei, ihn zum entscheidenden Förderer und Gestalter der geometrischen Mechanik werden zu lassen.

1. Die Berufung Kleins als ordentlicher Professor der Mathematik nach Erlangen 1872 machte ihn, "der von allen wohl am tiefsten in die Forschungen v o n S t a u d t s [1798-1867] eingedrungen war, zu dessen, wenn auch nicht unmittelbaren Nachfolger." ⟪Voss 1919, 285⟫ Obwohl sich Klein mit dem S t i l der von Staudtschen Schriften nie abfinden konnte - er lernte sie nur durch die Vermittlung seines Freundes O.Stolz (1842-1905) kennen-, war er nichtsdestoweniger von dessen M e t h o d e sehr beeinflußt.[10] Klein ist dadurch die synthetische Geometrie in ihrer vollkommensten Form nie fremdgeblieben, sie diente sogar als wesentliche Anregung seiner eigenen Forschungen.

Auf der anderen Seite kam Klein durch den Tod von J.Plücker (1801-1868) in engen Kontakt mit A. Clebsch (1833-1872) in Göttingen, und lernte diesen als Lehrer und Mensch tief würdigen und schätzen.[11] Bei dessen frühem Tod im November 1872 übernahm er es, "dem hochverehrten Lehrer und Freunde ein literarisches Denkmal zu setzen." ⟪Voss 1919, 285⟫.-Daraus entstand der Nachruf Klein (1874), in welchem Clebsch als Mathematiker prägnant charakteristisch dargestellt wurde: Clebsch sei im wesentlichen Algebraiker, dem die geometrische Anschauung nur als Hilfsmittel zur Erläuterung algebraischer Operationen diene.[12] Clebsch war in diesem Sinne sein Vorbild in der Beherrschung und Anwendung der analytisch-algebraischen Methode. Clebsch hatte auf den jungen Klein neben Plücker wohl den tiefsten Eindruck hinterlassen. Klein hatte nach dem Tode von Clebsch die Aufgabe übernommen, dessen wissenschaftliche Erbschaft zu verwalten und konnte so wie kein anderer in seine Denkweise eindringen. Klein war außerdem die Pflicht zugefallen, die Spezialschüler von Clebsch, die teilweise älter waren als er,

zu übernehmen und in ihrer Weiterbildung, sowie ihren selbständigen Arbeiten zu fördern. Zu diesen gehörte unter anderen auch F.Lindemann (1852-1939), dem er die Aufgabe stellte, die Vorlesungen von Clebsch über Geometrie (1876/91) herauszugeben.

> "Im Zusammenhang damit hielt ich mehrere Semester hindurch höhere Vorlesungen über die von C l e b s c h bevorzugten Gegenstände, also Invariantentheorie, projektive Geometrie, Abelsche Funktionen usw." ⟪Klein 1921, 412⟫

Neben die starke Beeinflußung und Prägung Kleins durch Plückers mathematische Methode und dessen im fortgeschrittenen Alter in den Vordergrund getretene Bevorzugung der Anschauung trat nun die algebraische Schulung durch Clebsch und verschmolz sich zur charakteristischen methodischen Einheit, die das ganze Lebenswerk von Klein prägen sollte.[13] Klein war immer bestrebt, sowohl die analytisch-algebraische, wie die anschaulich-geometrische Methode zu pflegen. Dies kam in seinen wissenschaftlichen Publikationen der Jahre 1868 - 1877 deutlich zum Ausdruck, wo sich neben rein geometrischen Arbeiten auch Abhandlungen zur Invariantentheorie und Gleichungstheorie finden. Aber man braucht nicht so weit zu gehen: schon allein die besprochenen liniengeometrischen Arbeiten offenbaren Kleins durchdringende geometrische Fähigkeiten, sowie seine souveräne Handhabung des analytisch-algebraischen Apparates.

Im Zentrum der Betrachtungen Kleins stand immer der Begriff, der g e d a n k l i c h e I n h a l t einer Sache. Die M e t h o d e der Behandlung hatte sich daran anzupassen, war nur Hilfsmittel zum Verständnis und somit sekundärer Natur. Jede Einseitigkeit bei derselben war der Herausschälung des Kerns der Sache hinderlich, mußte also unter allen Umständen vermieden werden. - Klein sprach sich selbst über diese Dinge relativ deutlich aus, wie im folgenden belegt werden soll.

Kleins Berufung nach Erlangen brachte die Pflicht mit sich, neben einer Antrittsrede ein gedrucktes Programm ("Erlanger Programm") vorzulegen.

> "Ich halte diese Sitte, trotz aller Unbequemlichkeit, die daraus für die Nächstbeteiligten erwachsen möge, für etwas sehr Gutes, indem ... der Neuling zur vollen Abklärung seiner Ideen gezwungen ist." ⟪Klein 1921, 411f.⟫

Klein schwang sich hier tatsächlich zu einer bewundernswert klaren Reflexion seiner Methoden empor. In der am 7.Dezember 1872 gehaltenen Antrittsrede (nicht zu verwechseln mit dem "Erlanger Programm" (1872b)), findet man folgende Passage:[14]

> "Glauben Sie nicht etwa, daß das Wesen der Mathematik in der Formel ruhe; die Formel soll nur eine exacte Bezeichnung der gedanklichen Verknüpfung sein. Damit ist durchaus nicht geleugnet, daß eine richtige Ausbildung des Formalismus eine für die Mathematik recht wesentliche Seite ist... wir verlangen ein inneres Verständnis des durch die fortschreitende Formelentwicklung bezeichneten Processes ..."

Neben seinen hochbedeutenden mathematischen Thesen im "Erlanger Programm" (1872b) (vgl. Abs. VI 2) hatte sich Klein auch dort zu methodischen Fragen geäußert. Es klingt wie eine Zusammenfassung seiner bisherigen Bestrebungen und als m e t h o d i s c h e s P r o g r a m m f ü r d i e Z u k u n f t :

> "Den Unterschied zwischen neuerer Synthese und neuerer analytischer Geometrie hat man zur Zeit nicht mehr als einen wesentlichen zu betrachten, da der gedankliche Inhalt sowohl als die Schlußweise sich auf beiden Seiten allmählich ganz ähnlich gestaltet haben . ... Wenn die synthetische Methode mehr mit räumlicher Anschauung arbeitet und ihren ersten, einfachen Entwicklungen dadurch einen ungemeinen Reiz erteilt, so ist das Gebiet räumlicher Anschauung der analytischen Methode nicht verschlossen, und man kann die Formeln der analytischen Geometrie als einen präzisen und durchsichtigen Ausdruck der geometrischen Beziehungen auffassen. Man hat auf der anderen Seite den Vorteil nicht zu unterschätzen, den ein gut angelegter Formalismus der Weiterforschung dadurch leistet, daß er gewissermaßen dem Gedanken vorauseilt. Es ist zwar immer an der Forderung festzuhalten, daß man einen mathematischen Gegenstand noch nicht als erledigt betrachten soll, solange er nicht begrifflich evident geworden ist, und es ist das Vordringen an der Hand des Formalismus eben nur ein erster aber schon sehr wichtiger Schritt." (1872b, 409f.)

Deutlicher hätte Klein sein die beiden Methoden vereinigendes Streben nicht charakterisieren können; er blieb diesen Intentionen sein Leben lang treu.[15]

In diesem methodischen Bestreben lag denn auch der tiefere Grund von Kleins eingehender Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik, die eine solche umfassende Betrachtungsweise der Natur der Sache nach notwendig forderte.

2. Hinzu kam eine weitere Komponente in Kleins mathematischer Denkweise, die hier aber nur kurz gestreift werden soll, da sie an anderer Stelle ausführlich analysiert wird[16]: die g e n e t i s c h e M e t h o d e. Darunter versteht man im Gegensatz zur logisch bis in alle Einzelheiten durchdringenden, meist deduktiven, Behandlung eines mathematischen Gegenstandes, dessen primär das Wesentliche, "den allgemeinen Fall" hervorhebende, vor allem die geometrisch-anschauliche Komponente mit umfassende Beschreibung.[17] So ist tatsächlich die Liniengeometrie zur Behandlung der a l l g e m e i n e n Probleme der Mechanik des starren Körpers besonders gut geeignet, während es bei speziellen Problemen oft möglich und sinnvoller ist, die translatorischen und rotatorischen Komponenten getrennt, also in gewöhnlicher Weise, zu berechnen.[18] Hier liegt übrigens auch e i n Grund, weshalb sich die geometrische Mechanik nie in den Anwendungen durchsetzen konnte.

3. Kleins Interesse an den A n w e n d u n g e n d e r L i n i e n - g e o m e t r i e a u f d i e M e c h a n i k d e s s t a r r e n K ö r p e r s ist auf seine frühe Beschäftigung mit Fragen der Physik zurückzuführen. Auf diesem Felde ist er auch zum ersten Mal mit Plücker in Kontakt gekommen (vgl. Abs. IV 2.3). Kleins Aufmerksamkeit wurde nun durch Plücker bald ausschließlich auf die Liniengeometrie gelenkt; er wollte aber eigentlich nach der Vollendung der Plücker-Ausgabe (1868/69) wieder zur Experimentalphysik zurückkehren. Durch verschiedene Umstände, wie den Tod von Clebsch und die Übernahme der Professur in Erlangen, sind diese Pläne vereitelt worden.[19] Als junger Privatdozent in Göttingen hielt Klein 1871 noch seine ersten Vorlesungen über physikalische Themen. Auch in seiner Erlanger Antrittsrede [20] kam er mehrfach auf die fruchtbare und notwendige Verbindung der Mathematik mit der Physik zu sprechen.- Klein be-

schäftigte sich immer wieder mit physikalischen Problemen; am weitesten in die Anwendungsgebiete vorgedrungen ist er aber in den verschiedenen Teilen der Mechanik.

> "Es gelang ihm, die Kinetik des starren Körpers mannigfach zu fördern, indem er an die damals in Deutschland fast unbekannten englischen Arbeiten [von R. Ball] anknüpfte ..., und er befreite damit zugleich die gesamte Mechanik von der Enge der Auffassung, in die sie bei uns durch eine stark ins Formale gehende analytische Richtung geraten war."
> ((Mises 1924, 87f.))

Klein unterließ es während seiner gesamten Vorlesungstätigkeit nicht, immer wieder über physikalische Themen zu sprechen. Er war später sogar Herausgeber, Leiter und Organisator bei dem großen Unternehmen der "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen", wo er den mechanischen Teil selbst redigierte.[21]

4. Zur Schraubentheorie von Robert Ball

Während Plücker seine Liniengeometrie ausarbeitete und Klein dessen Gedanken zu den Beziehungen von Liniengeometrie und Mechanik des starren Körpers klarstellte, kommt Robert Ball (1840-1913) von einer ganz anderen Seite auf ähnliche Ergebnisse. Balls Ausgangspunkt war das Studium kleiner Schwingungen eines starren Körpers; im Verlaufe der Untersuchungen kam er zu den Grundbegriffen seiner S c h r a u b e n t h e o r i e.[22]

Es kann sich hier nicht darum handeln, die Eigenart und besondere Struktur der Ballschen Schraubentheorie zu skizzieren.[23] Dies wäre eine eigene Untersuchung wert.[24] Vielmehr sollen kurz die wesentlichen gemeinsamen Punkte hervorgehoben werden, die zwischen der Liniengeometrie und der Ballschen Schraubentheorie bestehen.

Felix Klein wurde schon 1873 auf seiner ersten Englandreise mit Robert Ball bekannt ⟪Klein 1921, 241⟫. Bei dessen Darstellung der Schraubentheorie (Ball 1873) bemerkte Klein sofort, daß es sich bei dem Begriff der Schraube im wesentlichen um den Begriff des linearen Komplexes handelte. Das gleichzeitige Bekanntwerden mit den Ideen W.K. Cliffords (1845-1879) schlug sich später in der Arbeit (1890) nieder. Auf die Ballsche Schraubentheorie ging Klein erst (1902), anläßlich der Redaktionsarbeiten zur "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften", näher ein.

Klein hob die langjährigen Untersuchungen Robert Balls vor allem wegen ihrer A n s c h a u l i c h k e i t und dem e l e m e n t a r e n C h a r a k t e r der grundlegenden Entwicklungen hervor. Die S y s t e m a t i k lasse allerdings zu wünschen übrig - und deshalb entschloß er sich zu der längeren Abhandlung (1902).

> "Ich darf vielleicht hinzufügen, daß ich die betreffenden Überlegungen seit Jahren in Vorlesungen und gelegentlichen Vorträgen wiederholt zur Geltung gebracht habe; speziell knüpfe ich ... an meine eigenen Beiträge zur Liniengeometrie und Schraubentheorie ... [(1870a), (1871b)] sowie an die Auseinandersetzungen meines Erlanger Programms ... [(1872b)] an." (1902, 503f.)

Klein faßte seinen Vergleich der Liniengeometrie und der Ballschen Schraubentheorie folgendermaßen zusammen:

> "Die Ballsche Schraube ist der Inbegriff der um eine Achse herumgelegten Schraubenlinien von gegebenem Windungssinn, die eine bestimmte Ganghöhe haben, oder, wie Ball sagt, der Inbegriff von Zentralachse und Parameter (pitch). Die so definierte Ballsche Schraube ist mit dem Nullsystem, das jedem Punkt die Normalebene der durch ihn gehenden Schraubenlinien zuordnet, oder auch mit dem linearen Linienkomplex, der von den Normalen der sämtlichen Schraubenlinien gebildet wird, eindeutig zusammengeordnet; ob ich von der Ballschen Schraube, dem Nullsystem oder dem linearen Komplex spreche, ist für den hier vertretenen Standpunkt dasselbe." (1902, 511)

> "Die ... B a l l s c h e S c h r a u b e n t h e o r i e i s t m i t d e r j e n i g e n [euklidischen] L i n i e n g e o m e t r i e, w e l c h e d a s N u l l s y s t e m (oder, was dasselbe ist, den linearen Linienkomplex) a l s R a u m e l e m e n t b e n u t z t ... i d e n t i s c h." (1902, 516)

Die Ballsche Schraube besteht also aus der Hauptachse eines linearen Komplexes, zusammen mit dem Parameter κ . Sie läßt sich in moderner Schreibweise durch die sechs Koordinaten, bzw. das Vektorpaar $(a; \kappa_a a)$ repräsentieren. Nimmt man die Koordinatenwerte absolut, so entspricht den Koordinaten $(a; \kappa_a a)$ entweder eine unendlich kleine Bewegung (eine infinitesimale Schraubung oder Geschwindigkeitsverteilung, wie man auch sagt) oder ein allgemeines Kraftsystem. Die Größe a nannte Ball im letzteren Fall "wrench" und im ersteren "twist". Zwei Schrauben $(a; \kappa_a a)$ und $(b; \kappa_b b)$ heißen r e z i p r o k , wenn ein "wrench" um die eine Schraube keine Arbeit bei dem "twist" um die andere Schraube leistet, d.h. wenn

$$a \cdot (\kappa_b b) + b \cdot (\kappa_a a) = 0 \quad .$$

Nach Klein ist dies genau dann der Fall, wenn die beiden Schrauben in Involution liegen. "In Involution" und "reziprok" sind also äquivalente Begriffe.

Weiter heißt nach Ball eine Schraube H a u p t t r ä g h e i t s - s c h r a u b e bezüglich eines starren Körpers, wenn ein "wrench" (hier Impuls) um sie einen momentanen "twist" um diesselbe Schraube bewirkt. Ball zeigte, daß es im allgemeinen für einen starren Körper sechs Hauptträgheitsschrauben gibt.[25] Diese sind paarweise reziprok, bilden also ein System von Kleinschen Fundamentalkomplexen (vgl. Abs. 2.5), bei Ball die sechs K o r r e z i p r o k a l s c h r a u b e n genannt. Dieser Zusammenhang wurde Klein ebenfalls bei seinem Besuch in England 1873 bewußt, nachdem Ball (1873) seine diesbezügliche Theorie dargestellt hatte ⟪Klein 1921, 241⟫.

Eine besondere Rolle spielte bei Ball eine Regelfläche dritten Grades, bestehend aus den euklidischen Hauptachsen der linearen Komplexe eines Komplexbüschels, das sogenannte Zylindroid (vgl. Abs. IV 4.4). Für ihn repräsentierte das Zylindroid ein eindimensionales lineares System von Schrauben. Die Linearkombination zweier linearer Komplexe liefert einen Komplex, der zum durch diese Komplexe bestimmten Büschel gehört. Seine Hauptachse (d.h. die Schraube) liegt also auf dem dazugehörigen Zylindroid. Das Zylindroid tritt also gewissermaßen für die Schraubentheorie an die Stelle des Kräfteparallelogramms in der Theorie der Zusammensetzung von Kräften, die in einer Ebene liegen; und zwar wird das Zylindroid bedeutsam bei der konkreten Analyse der Zusammensetzung von Kräften, deren Wirkungslinien sich nicht schneiden und insbesondere bei der Zusammensetzung beliebiger Kräftesysteme (Schrauben).

Ball entwickelte seine Theorie der Schrauben im wesentlichen für alle Freiheitsgrade eines starren Körpers, wie auch beim Vorhandensein eines Potentials. Zur praktischen Handhabung ersann er dabei verschiedenste elegante geometrische Repräsentationen von Schraubensystemen, d.h. von linearen Systemen von linearen Komplexen. Ball, der von Beruf eigentlich Astronom war [26], zeigte sich hier als mindestens ebenso begabter Geometer.

5. Die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen im Rahmen der euklidischen Liniengeometrie

Felix Klein hatte in der Frühzeit seiner Beschäftigung mit der Liniengeometrie und der Mechanik des starren Körpers noch nicht explizit dynamische Fragen behandelt. Erst später, eigentlich erst nach der Entwicklung der nichteuklidischen Kinematik und Dynamik des starren Körpers durch Lindemann (1874), Heath (1884) und andere, wurde auch die euklidische geometrische Mechanik wieder vermehrt gefördert, insbesondere durch Studys Untersuchungen zur Kinematik (vgl. Abs. VII 3.1). Auch Klein kam wieder auf diese Gebiete zurück, etwa in (1902).

Da die Mechanik des starren Körpers im Rahmen der euklidischen Liniengeometrie in f o r m a l e r Hinsicht manches mit der nichteuklidischen Fassung der Theorie gemeinsam hat, soll dieselbe in geeigneter Weise hier kurz skizziert werden. Dies umso mehr, als durch die bis jetzt besprochenen Entwicklungen alle notwendigen Voraussetzungen vorhanden sind, dieser Schritt aber in der h i e r vorgebrachten Form in der Literatur kaum zu finden ist (außer in stark verallgemeinerter Form bei Mises (1924a)).

5.1 Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im ruhenden Bezugssystem

Im folgenden werden die Beziehungen zwischen einem mit einem starren Körper verbundenen Bezugssystem K und einem raumfesten Bezugssystem R betrachtet.

Ein starrer Körper vollführt nach Chasles (1830) in jedem Augenblick eine Schraubenbewegung um eine wohlbestimmte Achse. Diese Schraubenbewegung läßt sich darstellen durch eine Rotationsdyname, d.h. durch ein Vektorpaar $(d;\bar{d})$. d sei die momentane Winkelgeschwindigkeit um die Schraubungsachse und $\bar{d}$ die momentane Translationsgeschwindigkeit längs dieser Achse; es gilt also $\bar{d} = \kappa d$.

Die Absolutänderung eines Vektors r bezüglich K in R setzt sich zusammen aus

1. der Relativänderung bezüglich K : $\dot{r}_{|K}$
2. der durch K mitgeteilten Bewegung vermöge der momentanen Schraubenbewegung $(d;\bar{d})$ im Punkt r : $d \times r + \bar{d}$.

Also ist

$$\dot{r}_{|R} = \dot{r}_{|K} + d \times r + \bar{d} .$$

In dieser Form gilt das Gesetz für O r t s v e k t o r e n. Für einen nicht an einen Punkt gebundenen Vektor v (freier Vektor) ist die translative Verschiebung von K unbedeutend: $\bar{d} = 0$. Es gilt folglich

$$\dot{v}_{|R} = \dot{v}_{|K} + d \times v \quad . \tag{15}$$

Der starre Körper werde aufgefaßt als ein System von Massenpunkten. Dann gilt für den Impuls p_i und das Moment $\bar{p}_i$ (bezüglich des Koordinatenursprungs von R) eines Teilchens mit der Masse μ_i wegen $\dot{r}_{|K} = 0$

$$p_i = \mu_i \dot{r}_i = \mu_i \quad (d \times r_i + \bar{d})$$

$$\bar{p}_i = r_i \times p_i \quad .$$

Sei

$$p = \sum p_i \quad ,$$

$$\bar{p} = \sum \bar{p}_i \quad ,$$

dann ist das angreifende Kraftsystem $(f;\bar{f})$ definiert durch

$$\begin{aligned} f &= \dot{p} \\ \bar{f} &= \dot{\bar{p}} \end{aligned} \qquad \text{d.h.} \qquad \begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\bar{p}} \end{pmatrix} \quad . \tag{16}$$

Es stellt sich sofort die Frage: Wie sieht die Beziehung zwischen $(f;\bar{f})$ und $(d;\bar{d})$ aus?
Zunächst muß das Verhältnis von $(p;\bar{p})$ und $(d;\bar{d})$ bestimmt werden.
Es gilt

$$\begin{aligned} p &= \sum \mu_i \quad (d \times r_i + \bar{d}) = \sum \mu_i \, d \times r_i + \sum \mu_i \, \bar{d} \\ &= d \times (\sum \mu_i r_i) + (\sum \mu_i \bar{d}) \quad . \end{aligned}$$

Nach Definition ist der S c h w e r p u n k t gegeben durch

$$s = \frac{1}{\mu} \sum \mu_i r_i \quad , \quad \text{wobei} \quad \mu = \sum \mu_i \quad .$$

Damit wird

$$p = d \times \mu s + \mu \bar{d} \quad .$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \sum r_i \times p_i \\ &= \sum \mu_i r_i \times (d \times r_i + \bar{d}) = \sum \mu_i r_i \times (d \times r_i) + \sum \mu_i r_i \times \bar{d} \quad . \end{aligned}$$

Es gilt nun $\sum \mu_i r_i \times (d \times r_i) = Id$, wobei I ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, der sogenannte Trägheitstensor des gegebenen starren Körpers ist.[27] Die genaue Gestalt von I hängt von der Massenverteilung ab.
Damit wird nun

$$\bar{p} = Id + (\sum \mu_i r_i) \times \bar{d} = Id + \mu s \times \bar{d} \quad .$$

Und zusammengefaßt:

$$p = - \mu s \times d + \mu \bar{d} \quad ,$$

$$\bar{p} = Id + \mu s \times \bar{d} \quad .$$

Definiert man mit $s = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

so wird

$$\begin{aligned} p &= - \mu S d + \mu \bar{d} \\ \bar{p} &= Id + \mu S \bar{d} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} p \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu S & M \\ I & \mu S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad . \tag{17}$$

Die Bewegungsgleichungen im ruhenden System sind jetzt wegen (16) einfach

$$\begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu S & M \\ I & \mu S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d} \\ \dot{\bar{d}} \end{pmatrix} \quad . \tag{18}$$

Gleichung (18) stellt die bereits von Klein (1871b, 233) postulierte lineare Verwandtschaft im Komplexraum dar, induziert durch die dynamischen Eigenschaften des starren Körpers (vgl. Abs. 2.6 und 3.1). Denn offenbar ist durch (18) jedem Kraftsystem $(f;\bar{f})$ eindeutig eine Beschleunigungsdyname $(\dot{d};\dot{\bar{d}})$ zugeordnet und umgekehrt - dasselbe gilt für die zugrundeliegenden linearen Komplexe.

5.2 Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im mitbewegten Bezugssystem

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen im mitbewegtem Bezugssystem muß man mit Hilfe der Beziehung (15) die Vektoren p und $\bar{p}$ transformieren:

$$f = \dot{p}_{|R} = \dot{p}_{|K} + d \times p \ ,$$

$$\bar{f} = \dot{\bar{p}}_{|R} = \dot{\bar{p}}_{|K} + d \times \bar{p} \ .$$

Da im folgenden alles in Bezug auf K betrachtet wird, werden die Subskripte wieder weggelassen. Dann ergibt sich mit $d = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\bar{p}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \bar{p} \end{pmatrix} \quad .$$

Zusammen mit (17) wird die allgemeinste Bewegungsgleichung schließlich zu

$$\begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu S & M \\ I & \mu S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d} \\ \dot{\bar{d}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu S & M \\ I & \mu S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \bar{d} \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu S & M \\ I & \mu S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d} \\ \dot{\bar{d}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu DS & DM \\ DI & \mu DS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad . \tag{19}$$

Bezieht man die Bewegung auf den Schwerpunkt, so wird $s = 0$ und $S = 0$, also

$$\begin{pmatrix} p \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f \\ \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d} \\ \bar{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & DM \\ DI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \bar{d} \end{pmatrix} \tag{20}$$

oder

$$f = M\dot{\bar{d}} + (DM)\,\bar{d} = \mu\dot{\bar{d}} + \mu d \times \bar{d}$$

$$\bar{f} = I\dot{d} + (DI)\,d = I\dot{d} + d \times (Id)$$

A n a l y s e v o n f :

$$f = \dot{p}_{|R} = \mu(\dot{d} + d \times \bar{d}) \quad .$$

r_0 sei ein Punkt im Schwerpunktsystem. Bezogen auf ihn hat die Drehung $(d;\bar{d})$ die Darstellung $(d;\bar{d} + d \times r_0)$. Damit wird

$$f = \mu(\,(\bar{d} + d \times r_0)^{\cdot} + d \times (\bar{d} + d \times r_0)\,)$$

$$= \mu(\,\dot{\bar{d}} + \dot{d} \times r_0 + d \times \dot{r}_0 + d \times \bar{d} + d \times (d \times r_0)\,) \quad .$$

Nun gilt aber $\bar{d} = \dot{r}_0$. Denn es ist ja $p = \mu\bar{d}$, wobei p definiert ist als $p = \sum p_i$, also gilt für jedes i $p_i = \mu_i\bar{d} = \mu_i\dot{r}_i$, folglich $\bar{d} = \dot{r}_i$. Damit wird

$$f = \mu(\ddot{r}_0 + \dot{d} \times r_0 + 2d \times \dot{r}_0 + d \times (d \times r_0)\,). \tag{21}$$

Speziell für eine konstante D r e h u n g , $\dot{d} = 0$, wird

$$f = \mu(\ddot{r}_0 + \underbrace{2d \times \dot{r}_0}_{\text{Coriolis-}} + \underbrace{d \times (d \times r_0)}_{\text{Zentrifugal-}}\,)$$

Beschleunigung

A n a l y s e v o n $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \dot{\bar{p}}_{|R} = I\dot{d} + (DI)d \quad .$$

Da I symmetrisch ist, ist I diagonalisierbar, folglich gilt

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} \quad . \tag{22}$$

Dies sind aber die E u l e r s c h e n G l e i c h u n g e n :

$$f_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\,\omega_3$$

$$f_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\,\omega_3$$

$$f_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\,\omega_2$$

Im kräftefreien Fall, $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, erhält man durch Multiplikation dieser drei Gleichungen je nacheinander mit ω_1, ω_2, ω_3 , und nachfolgender Addition

$$I_1\,\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2\,\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3\,\dot{\omega}_3\omega_3$$

und schließlich Integration nach der Zeit, ein erstes Integral der Bewegung:

$$\frac{1}{2}\ (I_1\omega_1{}^2 + I_2\omega_2{}^2 + I_3\omega_3{}^2) = T\ .$$

Dies ist die E n e r g i e e r h a l t u n g s g l e i c h u n g für die Bewegung eines freien starren Körpers um den Schwerpunkt (vgl. Abs. 5.3).

5.3 Formeln für Arbeit und Energie

Die momentane Leistung für einen Punkt r_i des starren Körpers, mit der Geschwindigkeit $\dot{r}_i$ und der angreifenden Kraft f_i, ist definiert durch

$$f \cdot \dot{r}_i\ .$$

Ist der momentane Geschwindigkeitszustand des starren Körpers gegeben durch das Vektorpaar $(d;\bar{d})$, so gilt $\dot{r}_{i|R} = \dot{r}_{i|K} + d \times r_i$. Nun ist aber, wie bereits im letzten Abschnitt gezeigt wurde, $\dot{r}_{i|K} = \bar{d}$, also wird die Leistung gleich

$$f_i \cdot (\bar{d} + d \times r_i) = f_i \cdot \bar{d} + f_i \cdot (d \times r_i)\ .$$

Das rechts stehende Spatprodukt läßt sich umformen in $d \cdot (r_i \times f_i)$ und mit $\bar{f} = r_i \times f_i$ wird die Leistung im Punkt i gleich

$$f_i \cdot \bar{d} + \bar{f}_i \cdot d\ .$$

Summiert man über alle i und setzt $(f;\bar{f}) = (\sum f_i;\sum \bar{f}_i)$ für das angreifende Kräftesystem, so wird schließlich die m o m e n t a n e G e s a m t l e i s t u n g für den starren Körper gleich

$$f \cdot \bar{d} + \bar{f} \cdot d\ . \qquad (23)$$

Betrachtet man $(d;\bar{d})$ als i n f i n i t e s i m a l e V e r r ü c k u n g, so stellt (23) die für diese Verrückung geleistete A r b e i t dar.

Die k i n e t i s c h e E n e r g i e T_i eines Teilchens i des starren Körpers mit der Masse μ_i und dem Ortsvektor r_i im System R ist gegeben durch $2T_i = \mu_i\ (\dot{r}_i)^2$. Dabei gilt (Abs. 5.1) $\dot{r}_{i|R} = \dot{r}_{i|K} + \bar{d} + d \times r_i$. Wegen $\dot{r}_{i|K} = 0$ wird damit

$$2T_i = \mu_i(\bar{d} + d \times r_i)^2 = \mu_i\bar{d}^2 + 2\mu_i\bar{d}\cdot(d \times r_i) + (d \times r_i)^2\ .$$

Nach Voraussetzung ist $\bar{d} = \kappa d$, also ist $\bar{d} \times d = 0$ und die totale kinetische Energie T des starren Körpers wird schließlich

$$\begin{aligned} 2T &= \sum \mu_i\bar{d}^2 + \sum \mu_i\ (d \times r_i) \cdot (d \times r_i) \\ &= \mu\bar{d}^2 + \sum \mu_i\ d\cdot(\ r_i \times (d \times r_i)) \\ &= \mu\bar{d}^2 + d\cdot(\ \sum\ \mu_i r_i \times (d \times r_i)) \\ &= \mu\bar{d}^2 + d\cdot(Id)\ , \end{aligned}$$

wobei I der Trägheitstensor ist. Bezieht man I auf die Hauptträgheitsachsen, und sieht von der kinetischen Energie des Schwerpunktes, $2T_s = \mu d^2$, ab, so wird die kinetische Energie der Drehbewegung des starren Körpers gleich

$$\frac{1}{2}\ (I_1\omega_1{}^2 + I_2\omega_2{}^2 + I_3\omega_3{}^2)\ . \qquad (24)$$

Kapitel VI

Nichteuklidische Liniengeometrie und die Grundbegriffe der nichteuklidischen Kinematik und Statik

1. Zur Entwicklung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Deutschland durch Felix Klein

1.1 Die Geburt der nichteuklidischen Geometrie

Die durch N.I. Lobačevskij (1793-1856) und J. Bolyai (1802-1860) ins Leben gerufene, durch C.F. Gauss (1777-1855) im Stillen entdeckte (hyperbolische) nichteuklidische Geometrie rief zunächst kein großes Echo hervor.[1] Erst die Veröffentlichung des Briefwechsels von Gauss und H.Ch. Schumacher (1780-1850) in den Jahren 1860-63 brachte die Entwicklung ins Rollen. Es folgten kurz darauf Übersetzungen der Schriften von Bolyai und Lobačevskij ins Französische und Italienische.

Die weitere Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie spielte sich zunächst relativ unabhängig im Rahmen zweier mathematischer Gebiete ab. Das eine war die sogenannte neuere oder projektive Geometrie, innerhalb welcher A.Cayley (1821-1895) und F.Klein (1849-1925) den Zusammenhang zur nichteuklidischen Geometrie herstellten (Abs. 1.2). Diese Entwicklungsrichtung wurde vor allem in Deutschland und England verfolgt und hatte einen weitreichenden Einfluß auf die Algebra, insbesondere auf die Entwicklung hyperkomplexer Zahlensysteme (Kap.VII).

Einen Impuls in ganz anderer Richtung, innerhalb des differentialgeometrischen Rahmens, gab B.Riemann (1826-1866) mit seinem Habilitationsvortrag von 1854, der allerdings erst (1867) veröffentlicht wurde. Bereits sein epochemachender Ansatz ging andere Wege als die hier zu besprechende nichteuklidische Geometrie und Mechanik, indem er von einer l o k a l e n Maßbestimmung ausging und diese zum physikalischen Raum hypothetisch in Verbindung setzte. - Für die nichteuklidische Geometrie von Bedeutung ist vor allem seine erste Erwähnung eines (später elliptisch genannten) Raumes konstanter p o s i t i v e r Krümmung, neben demjenigen von Lobačevskij und Bolyai, der, wie Klein (1871c) später bemerkte, eine konstante negative Krümmung hat.[2]

Riemanns Habilitationsvortrag wirkte zunächst, was die nichteuklidische Geometrie angeht, besonders auf die italienischen Mathematiker. Es sei nur erinnert an die fundamentale Arbeit E.Beltramis (1835-1900) zur Theorie der Räume konstanter Krümmung (1868b) und der sich daran anschließenden Arbeiten der italienischen differentialgeometrischen Schule (Abs. VII 2).

1.2 Die Cayley-Kleinsche Maßbestimmung

1.2.1 Cayleys projektive Maßbestimmung

Ohne Kenntnis der nichteuklidischen Geometrie entwickelte Cayley in "A Sixth Memoir upon Quantics" (1859) eine Maßbestimmung auf rein projek-

tive Weise. Sein Ausgangspunkt war zunächst ein rein algebraischer. Die Arbeit (1859) ist die sechste in einer Serie von Arbeiten über "Quantics"; darunter versteht Cayley "the entire subject of rational and integral functions and of the equations and loci to which these give rise." (1854, 221) Die geometrische Interpretation rationaler Funktionen erwähnte Cayley in der die Serie eröffnenden Abhandlung (1854) nur beiläufig; interessant ist aber sein allgemeiner Standpunkt:

> "I consider that there is an ideal space of any number of dimensions. ... An equation or system of equations represents, or is represented by a locus. ... the entire series of points, the coordinates if which satisfy the equation or system of equations, constitutes the locus." (1854, 222)

Die berühmte Arbeit (1859) widmet sich nun ganz den geometrischen Anwendungen der vorangegangenen algebraischen Untersuchungen in der Geometrie der geraden Linie und der Ebene. Sie sind aber tatsächlich von der Dimension unabhängig.

Bei der Diskussion der Maßbestimmung in der Ebene ging Cayley von einem Kegelschnitt mit der Gleichung $\Omega(x,x) = \sum a_{ik}x_ix_k = 0$, den er "Absolute" nannte, aus, und definierte als Distanz der Punkte $x = (x_1,x_2,x_3)$ und $y = (y_1,y_2,y_3)$ die Größe

$$\arccos \frac{\Omega(x,x)}{\sqrt{\Omega(x,x)\ \Omega(y,y)}} .$$

Natürlich überträgt sich diese Formel in entsprechender Weise auf den Winkel zweier Geraden in Geradenkoordinaten (in der Ebene).

Indem Cayley die Form der Gleichung der "Absolute" auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ spezialisierte, fand er die euklidischen Distanz- und Winkelformeln:

> "In ordinary plane geometry, the Absolute degenerates into a pair of points, viz. the points of intersection of the line infinity with any evanescent circle, or what is the same thing, the Absolute is the two circular points at infinity." (1859, 592)

Diese beiden konjugiert imaginären Punkte wurden damals die (imaginären) K r e i s p u n k t e d e r E b e n e genannt. Das entsprechende Gebilde im euklidischen Raum ist ein imaginärer Kegelschnitt, der damals so genannte (imaginäre) K u g e l k r e i s (Abs. 1.2.2).

Cayley war sich über das Verhältnis von projektiver und metrischer Geometrie wohl bewußt:

> "... the metrical properties of a figure are not the properties of the figure considered p e r s e apart from everything else, but its properties when considered in connexion with another figure, viz. the conic termed the Absolute. ...we pass out of ... [pure descriptive geometry] into metrical geometry by fixing upon a conic of the figure as a standard reference and calling it the Absolute. Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is a l l geometry, and reciprocally." (1859, 592)

Wie aus dem letzten Teil dieses Satzes hervorgeht, nahm für Cayley die deskriptive, d.h. die projektive Geometrie eine ganz besondere Stellung ein. Dieses Urteil des berühmten englischen Mathematikers war entscheidend für die intensive und anhaltende Pflege der projektiven und nichteuklidischen

Geometrie in England (vgl. Abs. VII 1.1 und 1.3.1). Der Einfluß Cayleys reichte sogar bis zu B. Russels erster Schrift "An Essay on the Foundations of Geometry" (1897), in welcher noch (nach Riemann (1867) !) der projektive Raum als Gefäß aller möglichen physikalischen Theorien aufgefasst wurde.

1.2.2 Projektive Maßbestimmung und nichteuklidische Geometrie

Zur Fertigstellung der Herausgabe von Plückers "Neuer Geometrie ..." (1868/69) ging Klein 1868 nach Göttingen zu Clebsch und lernte dort Riemanns Arbeiten kennen.[3] Noch im selben Jahr fuhr er nach Berlin, wurde mit Sophus Lie (1842-1899) bekannt, mit dem ihn bald eine tiefere Freundschaft verband. Von Otto Stolz (1842-1905) erfuhr Klein zum ersten Mal von der nichteuklidischen Geometrie "und erfasste damals gleich den Gedanken, daß diese mit Cayleys allgemeiner Maßbestimmung auf das engste zusammenhängen müsse." ⟪Klein 1921, 50⟫ K.Weierstrass (1815-1897), bei dem Klein in einem Seminar von seinen diesbezüglichen Ideen berichtete, lehnte einen solchen Zusammenhang ohne großen Kommentar ab ⟪Klein 1921, 51⟫.

Nach einem kurzen Aufenthalt in Paris, zusammen mit S. Lie, wo Klein den neuesten Stand der Gruppentheorie kennenlernte, kehrte er Anfang 1871 nach Göttingen zurück, wo er sich habilitierte.

> "Ich erhielt dann einen neuen wesentlichen Impuls dadurch, daß O.Stolz für das Sommersemester 1871 nach Göttingen kam. Die Ideen über den Zusammenhang der Nicht-Euklidischen Geometrie mit der Cayleyschen Maßbestimmung, die sich seit meiner Berliner Zeit bereits einigermaßen weitergebildet hatten, traten in den Vordergrund, und es gelang mir, Stolz nicht nur von ihrer Richtigkeit zu überzeugen, sondern auf Grund der Ansätze v. Staudts zu einer unabhängigen projektiven Begründung der Gesamttheorie vorzudringen. ... Mein Interesse war schon von meiner Bonner Zeit her darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden, äußerlich einander unähnlichen und doch ihrem Wesen nach verwandten Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. ... So ist im November 1871 der Grundgedanke meines im Oktober 1872 ausgearbeiteten Erlanger Programms [(1872b)] entstanden." ⟪Klein 1921, 51f.⟫

In seinen Aufsätzen "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" (1871c,d) stellte Klein nun konkret den Zusammenhang zwischen der Cayleyschen Maßbestimmung und den nichteuklidischen Geometrien von Bolyai, Lobačevskij, Gauss und Riemann her. Sein methodisches Vorgehen unterschied sich allerdings grundsätzlich von demjenigen Cayleys. Klein ging immer vom Geometrisch-Anschaulichen aus, während Cayley die projektiven Maßbestimmungen im Rahmen seiner algebraischen Theorie der "Quantics" diskutierte.

Die in (1871c) skizzierten Gedanken werden in (1871d) ausführlich dargestellt. - Kleins Überlegungen sollen gleich innerhalb des projektiven R a u m e s vorgeführt werden. Als fundamentale Fläche, die "Absolute" Cayleys, sei eine nichtausgeartete Fläche zweiten Grades im projektiven Raum gegeben, etwa durch die Gleichung

$$\Omega(x,x) = \sum a_{ik}x_i x_k = 0 .$$

"Zwei gegebene Raumpunkte bestimmen durch den Durchschnitt ihrer Verbindungslinie mit der Fläche zwei Punkte der letzteren. Die beiden gegebenen Punkte haben zu diesen beiden ein gewisses Doppelverhältnis, und der mit einer willkürlichen Konstanten ... multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses soll die Entfernung der beiden gegebenen Punkte genannt werden. Analog, wenn zwei Ebenen gegeben sind, so lassen sich durch die Durchschnittslinie derselben zwei Tangentialebenen an die Fundamentalfläche legen. Dieselben bestimmen mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhältnis. Der mit einer willkürlich zu wählenden Konstanten ... multiplizierte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses ist es, den wir als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichnen." (1871c, 248)

Sind $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ und $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ die beiden gegebenen Punkte, so ist ihre Verbindungsgerade gleich $\rho x = y + \lambda z$. Schneidet man diese mit der Fundamentalfläche, so erhält man folgende quadratische Gleichung für λ:

$$\Omega(y + \lambda z, y + \lambda z) = \Omega(y,y) + 2\lambda\,\Omega(y,z) + \lambda^2\,\Omega(z,z) = 0 .$$

Der Quotient der beiden Lösungen λ_1, λ_2, ist gleich dem gesuchten Doppelverhältnis.[4] Also wird mit dem komplexwertigen Faktor ε der Abstand δ der Punkte y, z gleich

$$\delta(y,z) = \varepsilon \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \varepsilon \ln \frac{\Omega(y,z) + \sqrt{\Omega^2(y,z) - \Omega(y,y)\ \Omega(z,z)}}{\Omega(y,z) - \sqrt{\Omega^2(y,z) - \Omega(y,y)\ \Omega(z,z)}} .$$

Mit Hilfe der Identität

$$\ln a = 2i \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

läßt sich dies umformen in

$$\delta(y,z) = 2i\varepsilon \arccos \frac{\Omega(y,z)}{\sqrt{\Omega(y,y)\ \Omega(z,z)}} .$$

Die Gleichung von Ω in Ebenenkoordinaten U_1, U_2, U_3, U_4 ist gegeben durch

$$\Omega'(U,U) = \sum A_{ik} U_i U_k = 0 ,$$

wobei A_{ik} das algebraische Komplement der Matrix (a_{ik}) bezüglich a_{ik} bedeutet. Der Winkel zweier Ebenen V, W wird mit dem komplexwertigen Faktor ε' dann gleich

$$2i\ \varepsilon' \arccos \frac{\Omega'(V,W)}{\sqrt{\Omega'(V,V)\ \Omega'(W,W)}} .$$

Aus Symmetriegründen setzt man etwa $\varepsilon = \varepsilon' = -i/2$.

Die distanz- und winkelerhaltenden Transformationen sind diejenigen linearen Transformationen (genauer: Projektivitäten), die die Fundamentalfläche invariant lassen. Solche lassen nämlich das Doppelverhältnis invariant und führen Punkte der Fundamentalfläche in ebensolche über.

Wählt man die Fundamentalfläche imaginär (nullteilig), so ergibt sich die elliptische Geometrie, wählt man sie reell und

oval und betrachtet nur die Punkte im Inneren, so erhält man die h y p e r b o l i s c h e G e o m e t r i e. Klein zeigte, daß der so mit einer Metrik versehene projektive Raum im ersten Fall konstante positive und im zweiten Fall konstante negative Krümmung hat.[5]

Wird als fundamentale Fläche ein imaginärer Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene (imaginärer Kugelkreis) genommen, so erhält man genau die e u k l i d i s c h e G e o m e t r i e . Die entsprechenden Distanz- und Winkelformeln lassen sich durch einen Grenzübergang aus den allgemeinen Formeln gewinnen.[5]

Auf die von der euklidischen Geometrie unabhängige Begründung der projektiven Geometrie, insbesondere der projektiven Maßbestimmungen, kam Klein in allen seinen Abhandlungen zur nichteuklidischen Geometrie immer wieder zurück - ein Punkt, der ihm offenbar sehr am Herzen lag. Läßt sich auch die reine projektive Geometrie konsequent synthetisch ohne Verwendung eines Maßbegriffes aufbauen, so muß man doch für die Einführung einer projektiven Maßbestimmung Koordinaten, oder besser, Doppelverhältnisse zu Hilfe nehmen. Letztere werden gelegentlich metrisch definiert und dadurch die ganze projektive Maßbestimmung auf eine euklidisch-metrische Grundlage gestellt. Klein wies nun mit Nachdruck wiederholt auf die im Anschluß an von Staudt ohne metrische Begriffe durchführbare projektive Definition des Doppelverhältnisses hin, die letztlich einer Einführung projektiver Koordinaten gleichkommt.[6] Er führte aber seine Überlegungen nicht bis in alle Einzelheiten aus und wurde deshalb oft mißverstanden und in dieser Hinsicht abgelehnt (vgl. Abs. VII 1.2.2).

2. Das Erlanger Programm und das Aufkommen des modernen Mannigfaltigkeitsbegriffs

2.1 Das Erlanger Programm von Felix Klein

In der Anfang Juni 1872 abgeschlossenen, aber erst 1873 gedruckten Arbeit (1873) brachte Klein bereits den Grundgedanken des Erlanger Programms vor. Ausgehend von der Definition einer Mannigfaltigkeit beliebig vieler Dimensionen - bei Klein im wesentlichen identisch mit dem n-dimensionalen projektiven Raum - entwickelte er die Idee, die verschiedenen "Geometrien" durch die zugehörige Transformationsgruppe zu charakterisieren. Die an dieser Stelle nur angedeuteten, und sich nur auf lineare Transformationen beziehenden Ausführungen wurden in dem berühmten E r l a n g e r P r o g r a m m : "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (1872b) verallgemeinert und präzisiert. (Wichtige Vorarbeiten sind außerdem (1871a,b) und (1872a)).

> "Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden." (Klein 1872b, 463)

Es ist leicht zu sehen, wie sich in diese allgemeine Erklärung des Begriffs der Geometrie die projektiven Modelle der nichteuklidischen Geometrien einordnen. Zunächst ist die n-dimensionale projektive Geometrie charakterisiert durch die Gruppe der linearen Transformationen auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ und dann die nichteuklidischen Geometrien durch diejenigen Untergruppen, die eine Fläche zweiten Grades invariant lassen.

Das Erlanger Programm war von weitreichendem Einfluß und historischer Tragweite.[7] Seine Entstehung ist ohne Kleins intensive Auseinandersetzung mit der projektiven Geometrie und den nichteuklidischen Geometrien sowie mit der Liniengeometrie nicht denkbar. Von fundamentaler Bedeutung war ebenso die im Anschluß an Riemanns Ideen erfolgte Erweiterung des Gesichtspunktes auf die Betrachtung von Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen. Sie machte den Weg frei für das Studium viel allgemeinerer (topologischer) Mannigfaltigkeiten, an dem Klein noch selbst großen Anteil hatte.[8]

2.2 Nichteuklidische Geometrie, n-dimensionale Geometrie und der Begriff der Mannigfaltigkeit

In rein formaler Weise führten bereits J.L. Lagrange (1736-1813), A.L. Cauchy (1789-1857) und C.F. Gauss (1777-1855) eine geometrische Sprechweise für die Untersuchung von Funktionen- und Variablen-Systemen höherer Dimensionen ein.[9] Von einer systematischen Begründung konnte aber noch keine Rede sein. In der projektiven Geometrie lag die Verallgemeinerung über drei Dimensionen hinaus von der algebraischen Behandlung her sehr nahe. Es war denn auch J.Plücker (1801-1868) mit seiner Linien-

geometrie, dem der erste systematische Durchbruch in die vierte Dimension gelang - wenn er auch selbst die Untersuchung beliebiger n-dimensionaler Punkträume als "metaphysisch" ablehnte (Abs. IV 1.3) . A.Cayley (1821-1895) gewann ebenfalls durch die Betrachtung von geometrischen Systemen (z.B. ebene Kurven m-ter Ordnung) mit mehr als drei freien Variablen höher dimensionale projektive Räume. Nach der grundlegenden Vorarbeit (1843) gelang ihm (1870) eine prinzipielle Begründung der n-dimensionalen projektiven Geometrie. Diese Arbeit war ein Resultat der englischen Schule, vertreten durch J.J.Sylvester (1814-1897), G.Salmon (1819-1904) und Cayley, in welcher sich die abstrakte mit der konstruktiven Tendenz glücklich verband. ((Scholz 1980, 234))[10]

F.Klein (1849-1925), beeinflusst durch Riemanns Habilitationsvortrag (1867), sowie vor allem durch Plückers Liniengeometrie, wie überhaupt durch die projektive Geometrie, konnte sein Erlanger Programm (1872b) schon auf dem Hintergrund der n-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit vorstellen.- In Italien waren hinsichtlich der n-dimensionalen projektiven Geometrie die Arbeiten (1874),(1877a) von E.d' Ovidio (1843-1933) und (1882) von G. Veronese (1854-1917) bahnbrechend; erstere standen im engsten Zusammenhang mit den im Anschluß an Klein erfolgten Arbeiten zur nichteuklidischen Liniengeometrie (vgl. Abs. VII 2.1.2).

Einen Impuls in anderer Richtung gab H. Helmholtz (1821-1894) mit seinen Beiträgen (1868a,b), (1870) zu den Grundlagen der Geometrie. Bei seinen analytischen Untersuchungen spielte die i n f i n i t e s i m a l e B e w e g l i c h k e i t eines starren Körpers eine wesentliche Rolle; er verwendete diese geradezu zur Definition des physikalischen Raumes. Die sich daran anschließenden Untersuchungen sind unter dem Namen Riemann-Helmholtz-Liesches Raumproblem [11] bekannt geworden und gehen in eine ganz andere Richtung als die geometrische Mechanik des starren Körpers im hier gemeinten Sinne.

Sich mehr an ein allgemeines Publikum richtend, trugen die Arbeiten Helmholtz' wesentlich zur Diskussion um die Probleme der nichteuklidischen Geometrie und der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in einer breiteren Öffentlichkeit bei. Bei ihm ist auch der Ursprung der Auseinandersetzungen dieser neuen mathematischen Begriffe mit den philosophischen Ansichten I.Kants (1724-1804) zu suchen. Helmholtz wandte sich explizit gegen die Kantsche Auffassung des (euklidischen) Raumes als apriorische Form der Anschauung und setzte seine empirische Erkenntnistheorie der Raumstruktur dagegen.[12]

2.3 Bemerkungen zur Bewußtseinsgeschichte

Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, ging die Wiederentdeckung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie ganz parallel und in enger personeller sowie inhaltlicher Verbindung mit der konsequenten Herausarbeitung des Begriffs des n-dimensionalen projektiven Raumes. Dies ist bewußtseinsgeschichtlich eine bedeutende Tatsache.[13] Sobald die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie auf einen nicht mit unserem Anschauungs-

raum identischen, aber exakt denkmöglichen nichteuklidischen Raum geführt hatte, lösten sich auch die Schranken, die die Dreidimensionalität des gewöhnlichen Raumes setzte: man nahm nun n-dimensionale Punkträume f o r m a l genau so ernst wie die schon bekannten anschaulichen Räume höherer Dimensionen, wie etwa den vierdimensionalen Linienraum. Hatte sich das Bewußtsein der Mathematiker einmal an e i n e r Stelle vom euklidischen Anschauungsraum gelöst, so waren den Denmöglichkeiten kaum mehr Grenzen zu setzen.[14] Die rasche Weiterentwicklung der Mannigfaltigkeitstheorie sowie die Entstehung der Topologie bestätigen dies zur Genüge.

In den Rahmen der Sprengung dieser Bewußtseinsschranken in der Mathematik, d.h. der Loslösung von der sinnlichen Anschauung zugunsten einer rein begrifflichen Durchdringung, gehört auch ein zentrales Motiv des Gegenstandes der vorliegenden Arbeit: die Erweiterung der geometrischen Mechanik in eine n i c h t e u k l i d i s c h e M e c h a n i k d e s s t a r r e n K ö r p e r s. Es handelte sich hier um die erste konkrete Anwendung des neuen Gebietes der nichteuklidischen Geometrie auf eine klassische Disziplin der Physik. Die dadurch erschlossenen überraschenden Denkmöglichkeiten konnten nicht ohne Folgen bleiben.

Die Rezeption der revolutionären Auffassungen Riemanns zur mathematischen Struktur des physikalischen Raumes kamen erst so richtig n a c h der Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie durch Felix Klein u.a. in Gang. Im weiteren sind die später aufgekommenen Geometrisierungen des physikalischen Phasen- und Konfigurationsraumes ohne die genannten Entwicklungen zur Erweiterung des Begriffs der Geometrie nicht denkbar. Ja, letztlich verursachten die Auseinandersetzungen um die nichteuklidische Geometrie wesentlich die Entstehung der modernen abstrakten Auffassung der Mathematik ((Coolidge 1940, 87)).

Die Entdeckung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie war e i n Aspekt im Rahmen einer Bewußtseinsentwicklung, die in den siebziger Jahren des 19.Jh., ausgehend von der Mathematik, auf die ganze Kultur übergriff und in deren Konsequenzen wir noch heute darinnenstehen. Eine Veranlassung dazu bildete die nichteuklidische Geometrie. Etwas später kamen weitere Entwicklungsströme hinzu, die für alles folgende entscheidend wurden:

1. Die Begründung der Mengenlehre durch Georg Cantor (1845-1918), die endlich Licht in die Abgründe des Begriffs der Unendlichkeit brachte und begriffliche Klarheit in mathematische Bereiche trug, die sich der Anschauung vollkommen entzogen.
2. Die Entstehung der axiomatischen Methode, sowie
3. die Herausarbeitung der mathematischen Logik als eigene Disziplin der Grundlagenforschung.

3. Geometrische Grundbegriffe der Mechanik des starren Körpers in Räumen mit projektiver Maßbestimmung: Ferdinand Lindemann

3.1 Zur Entstehung der Dissertation Lindemanns

Die Übersiedlung Kleins nach Erlangen Ende 1872 brachte mit dem Tod von Clebsch im November ganz neue Aufgaben an ihn heran:

> "Ich hatte zunächst dafür zu sorgen, daß Lindemann, der bald nach Erlangen kam, die Ausarbeitung von Clebschs Vorlesungen über die Geometrie übernehmen konnte..." ((Klein 1921, 412))

So wurde Lindemann in der ersten Zeit Kleins engster Mitarbeiter in Erlangen und zugleich sein zweiter Doktorand. Klein regte ihn an, die Grundbegriffe der Mechanik im Rahmen der projektiven Geometrie zu untersuchen. Lindemann ergriff diese Aufgabe mit Begeisterung; geschult durch Clebschs geometrische Intuition und elegante algebraische Behandlungsweise, sowie in der anregendsten Weise mit Klein in Verbindung stehend, schuf Lindemann ein Werk, das die Grundlage für alle späteren tiefergehenden geometrischen Untersuchungen zur nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers werden sollte.

Das Ziel der Dissertation Lindemanns war, die bei den Untersuchungen von Poinsot, Möbius und Chasles aufgrund des undualistischen Charakters der euklidischen Maßbestimmung aufgetretenen Asymmetrien in den Grundbegriffen der Mechanik des starren Körpers durch eine konsequente projektive Behandlung in ein neues Licht zu stellen. In der euklidischen Geometrie haben nämlich die Distanz- und Winkelmessungen durchaus nicht denselben Charakter: der Vollwinkel hat einen endlichen Wert, während die Gerade in ihrer gesamten Ausdehnung keine endliche Länge hat. Bei den nichtausgearteten projektiven Maßbestimmungen ist dies anders, hier verhalten sich Distanzen und Winkel völlig gleich, d.h. dualistisch. Der tiefere Grund dieser Verhältnisse ist darin zu suchen, daß der euklidischen Geometrie ein in der unendlich fernen Ebene liegender imaginärer Kegelschnitt (imaginärer Kugelkreis) als absolutes oder fundamentales Gebilde zugrunde liegt. Dadurch wird die metrische Geometrie in einem Punkte bestimmt durch den von ihm an diesen Kegelschnitt gelegten imaginären Kegel zweiter Ordnung, während die metrische Geometrie der Ebene allein durch die zwei imaginären Schnittpunkte (imaginäre Kreispunkte) mit diesem charakterisiert ist.

> "... und dieser Auszeichnung der metrischen Geometrie im Punkte steht die Tatsache zur Seite, daß wir an ihn, als erzeugendes Element, unsere mechanischen Vorstellungen vorwiegend zu knüpfen pflegen. Man kann aber eine allgemeinere Maßbestimmung concipieren, bei welcher das Gesetz der Dualität vollkommen gewahrt bleibt, und es hat ... wohl ein gewisses Interesse, die Gestaltung der mechanischen Gesetze unter einer solchen Voraussetzung zu betrachten. ... Es treten dann Punkt und Ebene einander auch in metrischer Beziehung vollkommen gleichmäßig als elementare Größen gegenüber, und somit lehnt sich die ganze Darstellung auf das Engste an die projectivische Geometrie an." (Lindemann 1874, 57f)

Die differentialgeometrischen und analytischen Untersuchungen von Beltrami, Riemann und Lipschitz nebenbei erwähnend, grenzte Lindemann sein eigenes Vorgehen klar dagegen ab:

> "Während die erwähnten Untersuchungen sich auf die allgemeinsten Probleme der Mechanik beziehen, und soweit sie kinematischer Natur sind, die allgemeinste endliche Bewegung eines Systems behandeln, ist es vielmehr der Zweck der vorliegenden Arbeit, die ersten Grundlagen einer projectivischen Auffassung der Mechanik zu geben; sie beschränken sich deshalb darauf, unter den angeführten Voraussetzungen die Theorie der unendlich kleinen Bewegungen eines freien, unveränderlichen Systems und die der Kräfte, welche in einem solchen angreifen, vom rein projectivischen Standpunkte aus zu entwickeln." (1874, 61)

Das genaue Studium der Gesetze der Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen zusammen mit der Analogie zwischen diesen Gesetzen und denjenigen bei den Kräften, gab die Grundlagen für die Gesetze der Zusammensetzung der Kräfte bei allgemeiner projektiver Maßbestimmung.

> "Für alle diese Untersuchungen ist die zweifache Form charakteristisch, in der es erlaubt ist, alle Gesetze und Relationen auszusprechen, was eben in der vollkommenen dualistischen Maßbestimmung für die Geometrie im Punkte und in einer Ebene seinen Grund hat." (1874, 61)

Es soll gleich hier angemerkt werden, daß es Lindemann in keiner Weise darum ging, der projektiven Verallgemeinerung der mechanischen Grundbegriffe einen Realitätsbezug zuzuweisen:

> "...mir erscheint der Werth derartiger Verallgemeinerung als ein rein mathematischer ..., daß mir daher in den folgenden Untersuchungen alle jene philosophischen Speculationen fern liegen, welche man in Betreff unserer Raumanschauung daran knüpfen könnte." (1874, 60, Anm. ***))

Beeinflußt durch Felix Klein ging es Lindemann offenbar darum, mit Hilfe der projektiven Geometrie eine Einsicht in die verwickelte Struktur der geometrischen Grundbegriffe der Mechanik des starren Körpers zu gewinnen, um von daher die besonderen Verhältnisse, die man in der euklidischen Mechanik vorfindet, besser verstehen zu können.

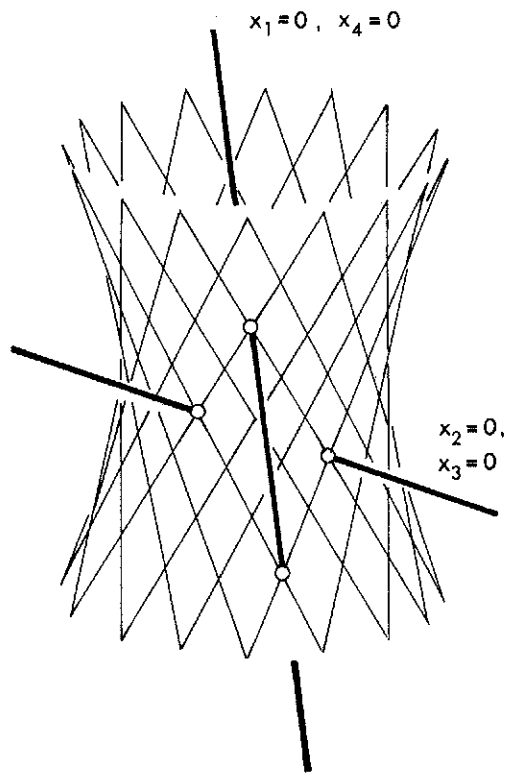
In den folgenden Abschnitten 3.2 bis 3.7 werden die wichtigsten Resultate der Lindemannschen Arbeit (1874) in nur wenig veränderter Schreibweise skizziert und analysiert. Diese ausführlichen Betrachtungen rechtfertigen sich durch die markante Bedeutung, sowie den weitreichenden Einfluß dieser Abhandlung auf die Weiterentwicklung der nichteuklidischen Geometrie und Mechanik.

3.2 Nichteuklidische Bewegungen

Bei einer nichteuklidischen Bewegung, d.h.einer linearen Transformation einer Fläche zweiten Grades in sich,gibt es im allgemeinen ein invariantes Tetraeder, das man sich etwa wie folgt konstruiert denken kann: Jede nichtausgeartete Fläche zweiten Grades besitzt zwei reelle oder komplexe Scharen von Erzeugenden, die bei einer Bewegung in sich transformiert werden (andernfalls werden sie vertauscht und es handelt sich nicht um eine e i g e n t l i c h e Bewegung[15]). Daher bleiben in diesen beiden

Scharen im allgemeinen je zwei Erzeugende fest; sie bestimmen durch ihre vier Schnittpunkte die Ecken jenes Tetraeders. Bezüglich eines solchen hat dann die Fläche die Gleichung[16]

$$x_1x_4 + x_2x_3 = 0 \quad . \quad (1)$$



Dabei sind die Kanten $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ Polaren in Bezug auf die Fundamentalfläche und die vier Ebenen des Tetraeders berühren dieselbe in den entsprechenden Ecken (Fig.1). Diese Polaren haben die Strahlenkoordinaten (0,0,1,0,0,0) und (0,0,0,0,0,1). Die übrigen Kanten des Tetraeders gehören der Fläche an und haben die Koordinaten (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,0) und (0,0,0,0,1,0).

Figur 1

Die Fläche mit der Gleichung (1) sei nun die "Absolute", d.h. die Fundamentalfläche der projektiven Maßbestimmung. Diejenigen Bewegungen des Raumes, die das genannte Tetraeder invariant lassen, haben die Form

$$\rho x_i = \alpha_i x_i' \quad , \qquad \text{d.h.} \quad \rho x = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} x' = \alpha x' \quad , \ \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2)$$

Setzt man dies in (1) ein, so wird die Gleichung der Fläche zu

$$\alpha_1\alpha_4 x_1' x_4' + \alpha_2\alpha_3 x_2' x_3' = 0 \quad .$$

Damit sie invariant bleibt, muß also die Bedingung

$$\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3 \qquad (3)$$

erfüllt sein. Offenbar geht durch eine Transformation der Form (2) jede Fläche des Flächenbüschels

$$x_1x_4 + \lambda x_2x_3 = 0 \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

in sich über,

> "d.h. ein jeder Punkt des Raumes bewegt sich auf der durch ihn und die vier auf der Fundamentalfläche gelegenen Kanten des Tetraeders gehenden Fläche 2.Ordnung; dies Flächenbüschel ver-

tritt somit die bei specieller [d.h. euklidischer] Maßbestimmung auftretenden Cylinderflächen." (1874, 72)

S a t z Jede Verschiebung n a c h einer Geraden ist identisch mit einer Drehung u m deren absolute Polare (d.h. um die bezüglich der Fundamentalfläche polare Gerade) (1874, 72).

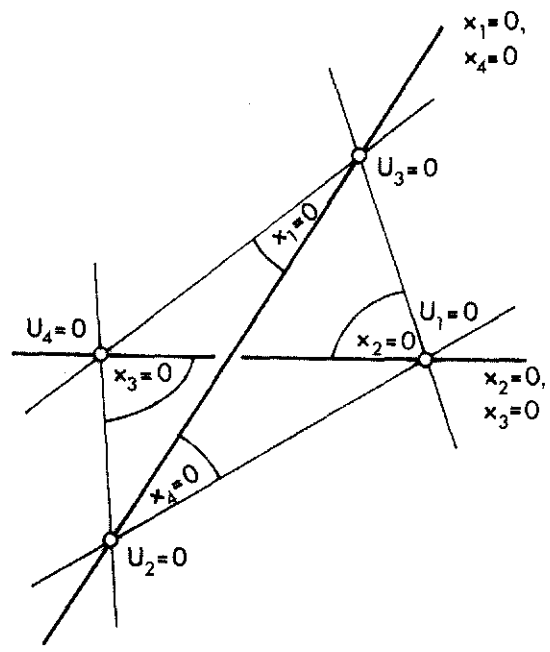
Setzt man in das Ebenenbüschel $x_2 + \mu x_3 = 0$ die Beziehung (2) ein, so wird daraus das Büschel $\alpha_2 x_2' + \mu\alpha_3 x_3' = 0$. Es ist also genau dann elementweise invariant, wenn $\alpha_2 = \alpha_3$; die Bewegung besteht dabei aus einer Verschiebung längs der Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Führt man in naheliegender Weise bezüglich desselben Koordinatentetraeders neben den Punktkoordinaten auch Ebenenkoordinaten $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ ein (Fig. 2), so lautet die Gleichung der Fläche

$$U_1 U_4 + U_2 U_3 = 0$$

und die dazugehörige Transformation, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\sigma U' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} U = \alpha U \quad .$$

Ist $\alpha_2 = \alpha_3$, so bleiben alle Punkte der Punktreihe $U_2 + \nu U_3 = 0$ einzeln fest, und die Bewegung besteht in einer Drehung um die Gerade $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, d.h. um die absolute Polare $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ von $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.-



Figur 2

Eine Bewegung, die gleichzeitig ein Flächenbüschel und die Ebenen eines Ebenenbüschels in sich überführt, muß auch die Schnittkurven beider unverändert lassen. Ebenfalls müssen die Berührungskegel dieser Flächen mit den Spitzen in den invarianten Punkten auf der dazu polaren Geraden in sich übergeführt werden. D.h. es gilt der

S a t z Bei einer Verschiebung nach einer Geraden g bewegt sich jeder Punkt auf einem Kegelschnitt, dessen Ebene diese Ge-

rade enthält. Jede Ebene des Raumes umhüllt einen Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze auf der polaren Geraden von g liegt, um welche eine Drehung stattfindet (1874,72).

Jede Bewegung eines im nichteuklidischen Sinne starren Systems kann in der oben angeführten Weise dargestellt werden. Denn eine solche lässt die Fundamentalfläche invariant, es gibt folglich ein invariantes Tangentialtetraeder, bezüglich welchem die Bewegung die Form (2) hat.

S a t z Jede Bewegung eines starren räumlichen Systems ist äquivalent einer Drehung um eine Gerade und einer gleichzeitigen Verschiebung nach derselben.[17]
Dabei kann statt dieser Gerade auch deren absolute Polare gewählt werden (1874, 73).

Lindemann nannte nun die Kurve, auf welcher sich dabei jeder Punkt bewegt und die auf einer Fläche des Büschels (4) liegt, eine p r o j e k t i v e S c h r a u b e n l i n i e , die Bewegung selbst eine S c h r a u b e n b e w e g u n g und die beiden zueinander bezüglich der Fundamentalfläche polaren - d.h. absolut polaren - Kanten des invarianten Tetraeders die H a u p t a c h s e n d e r B e w e g u n g (1874, 73).

3.3 Unendlich kleine Bewegungen in ihrem Zusammenhange mit linearen Komplexen

3.3.1 Charakteristiken von Punkten und Geraden

Im Folgenden sollen nun unendlich kleine, d.h. infinitesimale Transformationen des Raumes, die die Fundamentalfläche invariant lassen, studiert werden. Wiederholt man die Transformation $\rho x_i = \alpha_i x_i'$ λ-mal, so wird

$$\rho x_i = \alpha_i^{\lambda} x_i'$$

und damit beim Übergang zum kontinuierlichen Fall

$$\rho dx_i = \ln\alpha_i \, \alpha_i^{\lambda} x_i' d\lambda$$

$$dx_i = \ln\alpha_i \, x_i \, d\lambda.$$

Setzt man $a_i = \ln\alpha_i$ so wird schließlich (1874, 74)

$$dx_i = a_i x_i d\lambda \quad . \tag{5}$$

Die Bedingungsgleichung $\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ geht dabei über in

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3 \quad . \tag{6}$$

Bei einer solchen Bewegung schreitet jeder Punkt des Raumes, der kein Fixpunkt ist, momentan auf einer Geraden fort und jede Ebene, die keine Fixebene ist, dreht sich momentan um eine solche.
Letztere ist eindeutig bestimmt als Schnittlinie zweier infinitesimal benachbarter Ebenen. Seien U_i die Koordinaten einer Ebene, dann sind $V_i = U_i + dU_i$ die Koordinaten der infinitesimal benachbarten Ebene von U . Ihre Schnittgerade mit U ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= U_i V_k - U_k V_i \\ &= U_i \, (U_k + dU_k) - U_k \, (U_i + dU_i) \end{aligned}$$

$$= U_i dU_k - U_k dU_i \quad .$$

Natürlich gilt auch für die Ebenenkoordinaten die Beziehung

$$dU_i = a_i U_i d\lambda \quad ;$$

mit dieser wird

$$Q_{ik} = U_i U_k \, (a_k - a_i) \, d\lambda \quad .$$

Da die Linienkoordinaten nur bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor bestimmt sind, gilt schließlich

$$\sigma Q_{ik} = U_i U_k \, (a_k - a_i) \quad . \tag{7}$$

Nach Chasles (1843) wird diese Gerade die C h a r a k t e r i s t i k d e r E b e n e U genannt. Entsprechend heißt die Verbindungsgerade

$$\tau p_{ik} = x_i x_k \, (a_k - a_i) \tag{8}$$

zweier infinitesimal benachbarter Punkte x und $x + dx$ die C h a r a k t e r i s t i k d e s P u n k t e s x (1874, 74).

3.3.2 Rotationskomplex und Translationskomplex

Lindemann charakterisierte (1874, §3) den R o t a t i o n s - und T r a n s l a t i o n s k o m p l e x abwechselnd auf analytische und synthetische Weise. Es soll hier, in Anbetracht der großen Bedeutung der beiden Komplexe für die nichteuklidische Mechanik des starren Körpers, in ähnlicher Art die (von mir ein wenig ergänzte und im dualistischen Sinn vervollständigte) Erklärung und Theorie der beiden linearen Komplexe ausführlich dargestellt werden.

Die im folgenden auftretenden polaren Verhältnisse beziehen sich, wenn nichts anderes gesagt wird, immer auf die Polarität an der absoluten (oder fundamentalen) Fläche der projektiven Maßbestimmung, die man sich ein für allemal gegeben denkt. Man spricht dann in diesem Zusammenhang von der a b s o l u t e n P o l a r i t ä t. Der Begriff s e n k r e c h t ist eng mit dieser absoluten Polarität verknüpft: Eine Gerade liegt senkrecht zu einer Ebene ε, wenn sie durch den absoluten Pol (d.h. den Pol bezüglich der Fundamentalfläche) von ε geht. Eine Gerade g schneidet eine Gerade h senkrecht, wenn g auch die absolute Polare von h schneidet. Zwei Punkte oder zwei Ebenen liegen senkrecht zueinander, wenn sie bezüglich der Fundamentalfläche konjugiert sind.

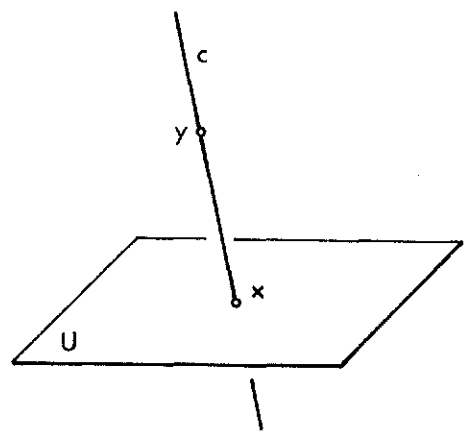
Jeder Punkt x des Raumes bewegt sich momentan längs einer Geraden. Diese ist die Verbindungsgerade infinitesimal benachbarter Punkte und wird C h a r a k t e r i s t i k von x genannt.
Jedes Punktfeld U dreht sich momentan um die Charakteristik von U .

Jede Ebene U des Raumes dreht sich momentan um eine Gerade. Diese ist die Schnittgerade infinitesimal benachbarter Ebenen und wird C h a r a k t e r i s t i k von U genannt.
Jedes Ebenenbündel x bewegt sich momentan längs der Charakteristik von x .

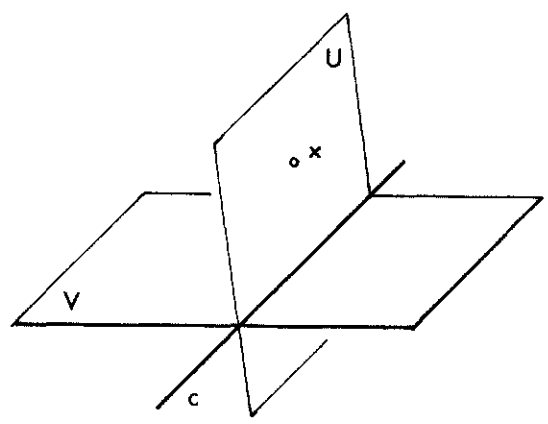
Vermittels der absoluten Polarität stehen die Bewegungen der Punkte und Ebenen in speziellen Beziehungen zueinander:

In einer beliebigen Ebene U gibt es genau einen Punkt x , der sich senkrecht zu dieser Ebene bewegt, d.h. dessen Charakteristik c durch den Pol y der Ebene U geht (Fig.3).

Durch einen beliebigen Punkt x gibt es genau eine Ebene U , die sich senkrecht zu diesem Punkt bewegt, d.h. deren Charakteristik c in der Polarebene V des Punktes x liegt (Fig.4).



Figur 3



Figur 4

Beweis: Die Gleichung der Absoluten ist gegeben durch
$x_1x_4 + x_2x_3 = 0$ oder $x^T a x = 0$ mit

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Polarebene U oder V eines Punktes y bzw. x ist dann gegeben durch

$\rho U = ay$

Also gilt

$$\rho \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Die gesuchte Gerade c ist die Verbindungsgerade von x und y und ist nach Definition gleich der Charakteristik von x:

$p_{ik} = x_iy_k - x_ky_i = x_ix_k\,(a_k - a_i)$.

Einsetzen der Werte (9) für y_i gibt sechs Gleichungen, wovon die erste lautet:

$$p_{12} = x_1y_2 - x_2y_1 = \rho(x_1U_3 - x_2U_4) = x_1x_2(a_2 - a_1) \ .$$

Unter Verwendung der Identität
$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$
läßt sich einsehen, daß diese Gleichungen durch den Ansatz

$$\rho U = \begin{pmatrix} & & & a_4-a_1 \\ & & a_3-a_2 & \\ & a_2-a_3 & & \\ a_1-a_4 & & & \end{pmatrix} x = bx \qquad (11)$$

befriedigt werden. Die schiefsymmetrische Matrix b stellt ein N u l l s y s t e m dar, dessen linearer Komplex die Gleichung
$y^T bx = 0$ oder
$(a_4-a_1)p_{14} + (a_3-a_2)p_{23} = 0$ (13)

$\sigma V = ax$

Also gilt

$$\sigma \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Die gesuchte Gerade c ist die Schnittgerade von U und V und ist nach Definition gleich der Charakteristik von U:

$Q_{ik} = U_iV_k - U_kV_i = U_iU_k\,(a_k - a_i)$.

Einsetzen der Werte (10) für V_i gibt sechs Gleichungen, wovon die erste lautet:

$$Q_{12} = U_1V_2 - U_2V_1 = \frac{1}{\sigma}(U_1x_3 - U_2x_4) = U_1U_2(a_2 - a_1) \ .$$

Unter Verwendung der Identität
$a_1 + a_4 = a_2 + a_3$
läßt sich einsehen, daß diese Gleichungen durch den Ansatz

$$\frac{1}{\sigma}\, x = \begin{pmatrix} & & & a_4-a_1 \\ & & a_3-a_2 & \\ & a_2-a_3 & & \\ a_1-a_4 & & & \end{pmatrix} U = BU \qquad (12)$$

befriedigt werden. Die schiefsymmetrische Matrix B stellt ein N u l l s y s t e m dar, dessen linearer Komplex die Gleichung $V^T BU = 0$ oder
$(a_4-a_1)Q_{14} + (a_3-a_2)Q_{23} = 0$ (14)

hat. Der Punkt x heißt der N u l l p u n k t der Ebene U und letztere die N u l l e b e n e von x .
Vermöge des Nullsystems wird nun jeder Ebene U des Raumes genau ein Nullpunkt x zugeordnet, dessen Charakteristik nach Konstruktion durch den Pol y von U geht.-

Der sich senkrecht aus U herausbewegenden Punkt x hat keine Bewegungskomponente innerhalb U , er ist Fixpunkt bei der Bewegung der Ebene U in sich selbst :

Die Bewegung eines Punktfeldes U läßt sich in jedem Augenblick ersetzen durch eine Drehung derselben um eine seiner Geraden, d.h. um seine Charakteristik, und eine gleichzeitige Bewegung in sich um einen in ihm gelegenen Punkt (1874, 75) .

Der oben eingeführte lineare Komplex heißt der R o t a t i o n s - k o m p l e x d e r u n e n d - l i c h k l e i n e n B e w e g - u n g (1874, 76).

Gemäß dem oben bewiesenen Satz gilt:
Die Komplexstrahlen durch einen beliebigen Punkt des Raumes sind senkrecht zur Charakteristik dieses Punktes, und umgekehrt ist die Charakteristik eines Punktes senkrecht zu dessen Nullebene, d.h. geht durch den absoluten Pol derselben.

hat. Die Ebene U heißt die N u l l e b e n e des Punktes x und letzterer der N u l l p u n k t von U .
Vermöge des Nullsystems wird nun jedem Punkt x des Raumes genau eine Nullebene U zugeordnet, deren Charakteristik nach Konstruktion in der Polarebene V von x liegt.-

Die sich senkrecht zu x bewegende Ebene U hat keine Bewegungskomponente innerhalb des Ebenenbüschels x , ist also Fixebene der Bewegung des Bündels x in sich selbst:

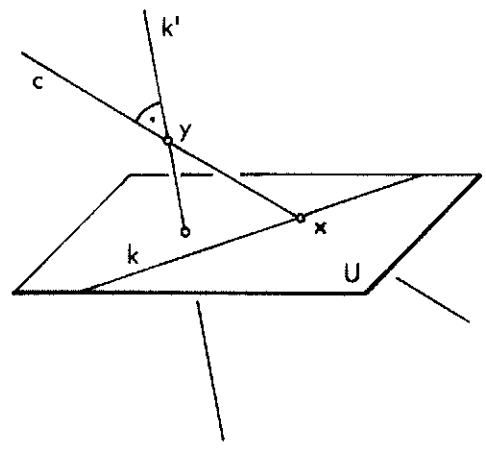
Die Bewegung eines Ebenenbündels x läßt sich in jedem Augenblick ersetzen durch eine Verschiebung seines Mittelpunktes nach einem durch ihn gehenden Strahl, d.h. längs seiner Charakteristik, und eine gleichzeitige Bewegung in sich, bei der eine in ihm enthaltene Ebene festbleibt (1874, 77).

Der oben eingeführte lineare Komplex heißt der T r a n s l a - t i o n s k o m p l e x d e r u n - e n d l i c h k l e i n e n B e w e g u n g (1874,77) .

Gemäß dem oben bewiesenen Satz gilt:
Die Komplexstrahlen in einer beliebigen Ebene des Raumes sind senkrecht zur Charakteristik dieser Ebene, und umgekehrt liegt die Charakteristik einer Ebene senkrecht zu deren Nullpunkt, d.h. liegt in der absoluten Polarebene desselben.

Die Geraden des Rotations- und Translationskomplexes haben nun folgende wichtige Eigenschaft:

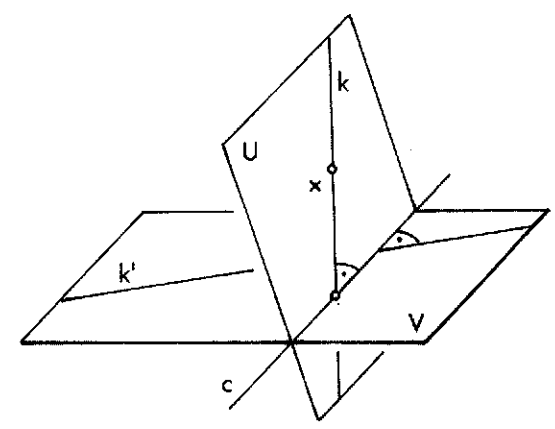
Die Charakteristiken der Punkte, welche einer Geraden k des Rotationskomplexes angehören, sind senkrecht zu dieser Geraden (d.h. schneiden deren absolute Polare).
Beweis (Fig.5): Die Nullebene aller Punkte einer Komplexgeraden k gehen alle durch diese selbst. Die Charakteristik c eines Punktes x ist nun aber immer senkrecht



Figur 5

zu seiner Nullebene U , also hier auch zu der Komplexgeraden k . Ist k' die absolute Polare von k , so muß also c eine Treffgerade von k und k' sein.

Die Charakteristiken der Ebenen, welche durch eine dem Translationskomplex angehörige Gerade k hindurchgehen, sind normal zu dieser Geraden, (d.h. schneiden deren absolute Polare).
Beweis (Fig.6): Die Nullpunkte aller Ebenen einer Komplexgeraden k liegen auf dieser selbst. Die Charakteristik c einer Ebene U liegt nun aber immer in der absoluten Polarebene



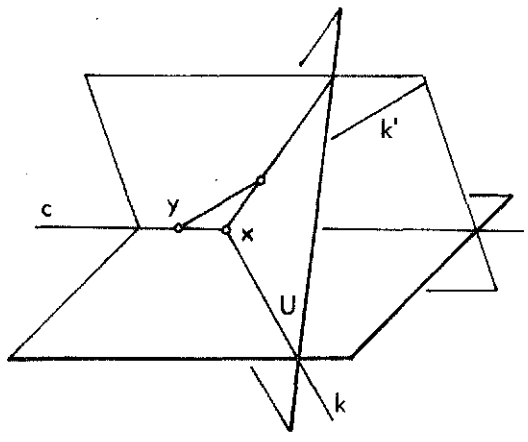
Figur 6

V ihres Nullpunktes x. Ist k' die absolute Polare von k , so muß also c eine Treffgerade von k und k' sein.

Entscheidend ist, daß auch die Umkehrungen richtig sind:

Diejenigen Geraden, auf welchen die Fortschreitungsrichtungen (Charakteristiken) ihrer Punkte senkrecht stehen, d.h. deren absolute Polare schneiden, bilden einen linearen Komplex, den R o t a t i o n s k o m p l e x (1874, 75).

Beweis (Fig.7): Sei k eine solche Gerade und k' deren absolute Polare. Die Charakteristik c eines Punktes x



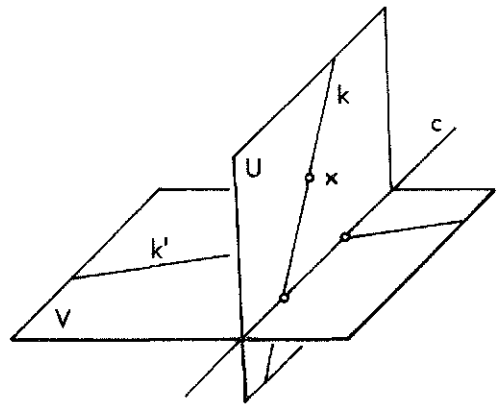
Figur 7

von k ist nach Voraussetzung senkrecht zu k , d.h. schneidet die absolute Polare k' von k in einem Punkt y .

Die Polarebene U von y geht durch k und ist offenbar die Nullebene von x , denn die Charakteristik von x geht durch den absoluten Pol von U . Die Nullebenen aller Punkte von k gehen also durch k , d.h. k gehört dem Rotationskomplex an.-

Diejenigen Geraden, auf welchen die Drehachsen (Charakteristiken) ihrer Ebenen senkrecht stehen, d.h. deren absolute Polare schneiden, bilden einen linearen Komplex, den T r a n s - l a t i o n s k o m p l e x .

Beweis (Fig.8): Sei k eine solche Gerade und k' deren absolute Polare. Die Charakteristik c einer Ebene U



Figur 8

von k ist nach Voraussetzung senkrecht zu k , d.h. schneidet die absolute Polare k' von k und spannt mit k' zusammen eine Ebene V auf.

Der Pol x von V liegt auf k und ist offenbar der Nullpunkt von U , denn die Charakteristik von U liegt in der absoluten Polarebene ihres Nullpunktes x . Die Nullpunkte aller Ebenen durch k liegen also auf k selbst, d.h. k gehört dem Translationskomplex an.-

Weiter oben wurde gezeigt, daß die Komplexgeraden solche Geraden sind, deren Punkte bzw. Ebenen Charakteristiken besitzen, die zu ihr senkrecht liegen, d.h. ihre absolute Polare schneiden; und umgekehrt, daß Geraden mit dieser Eigenschaft zu einem linearen Komplex gehören.
Also gilt:

Der R o t a t i o n s k o m p l e x besteht genau aus denjenigen Geraden des Raumes, entlang welchen die infinitesimale Bewegung keine Translation hervorruft.

Der T r a n s l a t i o n s k o m p l e x besteht genau aus denjenigen Geraden des Raumes, um die die infinitesimale Bewegung keine Drehung hervorruft.

Nach Konstruktion sind der Rotations- und der Translationskomplex absolut polar zueinander, d.h. polar bezüglich der Fundamentalfläche der nichteuklidischen Maßbestimmung. Dies läßt sich übrigens auch aus ihren Gleichungen ablesen:

Schreibt man die Gleichung des Translationskomplexes (14) in Strahlenkoordinaten

$$(a_4 - a_1)p_{23} + (a_3 - a_2)p_{14} = 0,$$

so bemerkt man, daß gegenüber der Gleichung des Rotationskomplexes (13) p_{23} und p_{14} vertauscht sind; also sind diese beiden Komplexe tatsächlich absolut polar.
Im Falle der e u k l i d i s c h e n Geometrie kann der Rotationskomplex auf genau dieselbe Weise wie oben charakterisiert werden, während der Translationskomplex überhaupt nicht existiert.

Es soll nun noch die Bedeutung k o n j u g i e r t e r G e r a d e n bezüglich des Rotationskomplexes aufgesucht werden. Eine Gerade p sei bestimmt durch die Punkte x und y. Ihre bezüglich eines linearen Komplexes konjugierte Gerade p' ist dann definiert als die Schnittgerade der Nullebenen U und V von x bzw. y. Also ist

$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ und $P'_{ik} = U_i V_k - U_k V_i$, wobei nach (11), für $\rho = 1$

$$\begin{aligned} U_1 &= x_4 (a_4 - a_1) & V_1 &= y_4 (a_4 - a_1) \\ U_2 &= x_3 (a_3 - a_2) & V_2 &= y_3 (a_3 - a_2) \\ U_3 &= x_2 (a_2 - a_3) & V_3 &= y_2 (a_2 - a_3) \\ U_4 &= x_1 (a_1 - a_4) & V_4 &= y_1 (a_1 - a_4) \end{aligned} \qquad (11)$$

Also wird

$$\begin{aligned} p'_{34} &= P'_{12} = U_1V_2 - U_2V_1 = (x_4y_3 - x_3y_4)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2) \\ p'_{42} &= P'_{13} = U_1V_3 - U_3V_1 = (x_4y_2 - x_2y_4)(a_4 - a_1)(a_2 - a_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p'_{14} &= P'_{23} = U_2V_3 - U_3V_2 = (x_3y_2 - x_2y_3)(a_2 - a_3)(a_3 - a_2) \end{aligned}$$

Dividiert man diese sechs Gleichungen mit dem Faktor $(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)$,

so erhält man die folgenden Beziehungen zwischen den Koordinaten von p und denjenigen der konjugierten Geraden p' :

$$\begin{aligned} p'_{12} &= -\,p_{12} & p'_{34} &= -\,p_{34} \\ p'_{13} &= -\,p_{13} & p'_{42} &= -\,p_{42} \\ p'_{14} &= \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1}\,p_{23} & p'_{23} &= \frac{a_4 - a_1}{a_3 - a_2}\,p_{14} \end{aligned} \qquad (15)$$

S a t z Die Charakteristik einer Ebene U und die ihres zugehörigen Nullpunktes x sind konjugierte Geraden in Bezug auf den linearen Komplex, dessen Geraden senkrecht zu sich selbst versetzt werden (= Rotationskomplex) (1874,77).

Beweis: Die Charakteristik p von x hat die Koordinaten $p_{ik} = x_i x_k\,(a_k - a_i)$ und diejenige von U die Koordinaten $Q_{ik} = U_i U_k\,(a_k - a_i)$. Ersetzt man mit Hilfe der oben aufgestellten Koordinaten-Beziehungen (11) zwischen dem Nullpunkt x und der Nullebene U die U_i durch die x_i , so wird für die Charakteristik von U

$$\begin{aligned} q_{34} &= Q_{12} = U_1U_2\,(a_2-a_1) = x_4x_3\,(a_4-a_1)\,(a_3-a_2)\,(a_2-a_1) \\ q_{42} &= Q_{13} = U_1U_3\,(a_3-a_1) = x_4x_2\,(a_4-a_1)\,(a_2-a_3)\,(a_3-a_1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{14} &= Q_{23} = U_2U_3\,(a_3-a_2) = x_3x_2\,(a_3-a_2)\,(a_2-a_3)\,(a_3-a_2) \quad . \end{aligned}$$

Dividiert man diese sechs Gleichungen mit dem Faktor $-\,(a_4 - a_1)\,(a_3 - a_2)$, so wird:

$$\begin{aligned} q_{12} &= -x_1x_2(a_4 - a_3) & q_{34} &= -x_3x_4\,(a_2 - a_1) \\ q_{13} &= -x_1x_3(a_4 - a_2) & q_{42} &= -x_4x_2\,(a_1 - a_3) \\ q_{14} &= x_2x_3\,(a_3 - a_2)\,\frac{(a_3-a_2)}{(a_4-a_1)} & q_{23} &= x_1x_4\,(a_4 - a_1)\,\frac{(a_4-a_1)}{(a_3-a_2)} \quad . \end{aligned} \qquad (16)$$

Mit Hilfe der Identität (6) $a_1 + a_4 = a_3 + a_2$ läßt sich jetzt leicht feststellen, dass die p_{ik} und die q_{ik} die Beziehungen (15) identisch erfüllen, sobald man $q_{ik} = p'_{ik}$ setzt; z.B. aus $q_{34} = p'_{34} = -p_{34}$ wird $-x_3x_4\,(a_2-a_1) = -x_3x_4\,(a_4-a_3)$ und schließlich $a_2 + a_3 = a_4 + a_1$. -

Ein analoger Satz gilt natürlich auch für den Translationskomplex: Die Charakteristik eines Punktes und die Charakteristik der ihm in diesem Komplex zugehörigen Nullebene sind konjugierte Geraden in Bezug auf denselben.

> "Die Bedeutung zweier solcher [konjugierter] Geraden für die Bewegung ist auch noch eine andere; es stehen nämlich nach Obigem die Charakteristiken der Punkte der einen senkrecht zu den durch die andere gehenden Ebenen; durch eine bloße Drehung um diese kann ich also jene in die Lage bringen, welche sie in der Folge der unendlich kleinen Bewegung einnimmt, und es bedarf nur noch einer Drehung um die letztere, um auch die andere in ihre Endlage zu bringen; also:
>
> E i n e u n e n d l i c h k l e i n e B e w e g u n g k a n n i m m e r e r s e t z t w e r d e n d u r c h d i e F o l g e v o n z w e i u n e n d l i c h

> kleinen Rotationen um zwei in Bezug auf den erwähnten Complex einander conjugierte Gerade. ...
>
> Da aber eine jede solche Drehung identisch ist mit einer Verschiebung nach der absoluten Polaren der Drehaxe, so ist die Bewegung auch äquivalent mit zwei Translationen nach den absoluten Polaren zweier solcher conjugierter Rotationsaxen ... [Diese sind dann konjugiert bezüglich des Translationskomplexes:]
>
> Eine unendlich kleine Bewegung kann immer ersetzt werden durch zwei Translationen, deren Directricen einander in Bezug auf den linearen Complexe conjugiert sind, welcher dem zuerst erwähnten Complexe in Bezug auf die Fundamentalfläche polar zugeordnet ist." (1874, 76)

Die angeführten Eigenschaften des Rotationskomplexes und des Translationskomplexes zeigen, welch fundamentale Bedeutung dem linearen Komplex für die infinitesimale Bewegung zukommt. Um seine Rolle noch deutlicher aufzuklären, werden im Anschluß an Lindemann dessen metrischen Eigenschaften, d.h. seine geometrischen Eigenschaften bezüglich der Fundamentalfläche, im Abschnitt 3.3.3 noch etwas genauer untersucht.

3.3.3 Der lineare Komplex in seiner Beziehung zur Fundamentalfläche der Maßbestimmung

3.3.3.1 Die Gleichung der Fundamentalfläche in Linienkoordinaten

Zur späteren Verwendung wird hier kurz die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Linienkoordinaten abgeleitet (vgl. Clebsch/Lindemann (1891, 140f.)). Lindemann setzte sie als bekannt voraus.

Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Punktkoordinaten sei gegeben durch

$$\sum a_{ik}x_i x_k = 0 \quad .$$

Die Koordinaten Y_i der Polarebene eines Punktes y_i sind dann:

$$\rho Y_i = \sum a_{ik}x_i y_k \quad .$$

Eine Fläche zweiten Grades berührt genau diejenigen Geraden, welche ihre eigene Polare schneiden. Es soll deshalb zunächst die Polarenbeziehung in Linienkoordinaten abgeleitet werden: Eine Gerade p sei gegeben durch die Punkte y und z. Die Polare von p bezüglich der Fläche ist die Schnittgerade der Polarebene von y und z. Diese haben die Ebenenkoordinaten

$$\left[\sum_m a_{1m}y_m, \sum_m a_{2m}y_m, \sum_m a_{3m}y_m, \sum_m a_{4m}y_m\right]$$

$$\left[\sum_n a_{1n}z_n, \sum_n a_{2n}z_n, \sum_n a_{3n}z_n, \sum_n a_{4n}z_n\right] \quad .$$

Daraus lassen sich die Achsenkoordinaten P'_{ik} der Polaren p' von p bestimmen:

$$\begin{aligned}\rho P'_{ik} &= (\sum_m a_{im}y_m)(\sum_n a_{kn}z_n) - (\sum_m a_{km}y_m)(\sum_n a_{in}z_n)\\ &= \sum_{m,n} a_{im}a_{kn}y_m z_n - \sum_{m,m} a_{km}a_{in}y_m z_n\\ &= \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn}y_m z_n - a_{km}a_{in}y_m z_n) \quad .\end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Vertauschung von m und n kann man erreichen, daß

$$\begin{aligned}\rho P'_{ik} &= \frac{1}{2}\sum_{m,n} (a_{im}a_{kn}y_m z_n + a_{in}a_{km}y_n z_m) -\\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{m,n} (a_{km}a_{in}y_m z_n + a_{kn}a_{im}y_n z_m)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m,n} a_{im}a_{kn}(y_m z_n - y_n z_m) - \frac{1}{2}\sum_{m,n} a_{km}a_{in}(y_m z_n - y_n z_m)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})(y_m z_n - y_n z_m) \quad .\end{aligned}$$

Also wird schließlich

$$\rho P'_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in}) p_{mn} \quad . \tag{17}$$

Dies ist die gesuchte P o l a r e n b e z i e h u n g .- Zur Berechnung der Gleichung der Fläche in Linienkoordinaten, muß man eine Gleichung für alle diejenigen Geraden p , die ihre eigene Polare p' schneiden, aufstellen. Dann muß aber gelten (Abs. V 2.1, Gleichung (10)):

$$(p,p') = p \cdot P' = \sum_{i,k} p_{ik}P'_{ik} = 0$$

und damit wird die gesuchte G l e i c h u n g d e r F l ä c h e i n S t r a h l e n k o o r d i n a t e n

$$\sum_{i,k}\sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in}) p_{mn}p_{ik} = 0 \quad . \tag{18}$$

Ist A_{ik} das algebraische Komplement von a_{ik} bezüglich der Matrix (a_{ik}) , so lautet die Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten

$$\sum_{i,k} A_{ik}X_iX_k = 0 \quad .$$

Die Koordinaten des Pols y der Ebene Y werden dann

$$\rho y_i = \sum A_{ik}Y_k \quad .$$

Wegen der formalen Übereinstimmung mit dem entsprechenden Ausdruck in Punktkoordinaten schließt man sofort auf die folgende Form der Polarenbeziehung:

$$\rho p'_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{m,n} (A_{im}A_{kn} - A_{km}A_{in}) P_{mn} \quad , \tag{19}$$

und auf die G l e i c h u n g d e r F l ä c h e i n A c h s e n - k o o r d i n a t e n

$$\sum_{i,k}\sum_{m,n} (A_{im}A_{kn} - A_{km}A_{in}) P_{mn}P_{ik} = 0 \quad . \tag{20}$$

Man beachte, daß die Gleichung der Fläche in Linienkoordinaten nie eindeutig bestimmt sein kann. Man kann stets ein Vielfaches der Identität $\frac{1}{2}(p,p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ bzw. $\frac{1}{2}(P,P) = P_{12}P_{34} + P_{13}P_{42} + P_{14}P_{23} = 0$ additiv hinzufügen, ohne die Bedeutung der Gleichung zu verändern.

3.3.3.2 Die nichteuklidischen Hauptachsen des linearen Komplexes

S a t z Es gibt genau ein Paar von Geraden, welche zueinander konjugiert sind in Bezug auf einen gegebenen linearen Strahlenkomplex, sowie polar in bezug auf eine gegebene Fläche zweiten Grades. (1874, 78)

Der synthetische Beweis dieses wichtigen Satzes wurde an anderer Stelle skizziert.[18] Diese beiden Geraden heißen die H a u p t a c h s e n d e s l i n e a r e n K o m p l e x e s. Sie sind zugleich die Hauptachsen des zu diesem bezüglich der Fläche polaren Komplexes. Im euklidischen Fall bestehen diese beiden Hauptachsen aus der im Endlichen gelegenen "gewöhnlichen" Hauptachse und der dazu senkrechten unendlich fernen Geraden.

Es sollen die Koordinaten der Hauptachsen explizit berechnet werden.[19] Man geht dazu von den Koordinaten p_{ik} einer beliebigen Geraden aus, berechnet die Koordinaten p'_{ik} ihrer Polaren bezüglich der Fundamentalfläche sowie die Koordinaten r_{ik} der Konjugierten bezüglich des Rotationskomplexes. Wegen des obigen Satzes muß dann für ein gewisses $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten: $\rho p'_{ik} = r_{ik}$. Zunächst ist nun

$$p'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})\, p_{mn} .$$

Bei der Fläche mit der Gleichung

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k = x_1x_4 + x_2x_3 = 0$$

ist aber nur a_{14} und a_{23} von Null verschieden: $a_{14} = a_{23} = 1$. Damit wird

$$\begin{aligned}
p'_{12} &= \sum_{m,n} (a_{1m}a_{2n} - a_{2m}a_{1n})\, p_{mn} = (a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14})\, p_{34} = -p_{34}\\
p'_{13} &= \sum_{m,n} (a_{1m}a_{3n} - a_{3m}a_{1n})\, p_{mn} = (a_{14}a_{32} - a_{34}a_{12})\, p_{42} = p_{42}\\
p'_{14} &= \sum_{m,n} (a_{1m}a_{4n} - a_{4m}a_{1n})\, p_{mn} = (a_{11}a_{44} - a_{41}a_{14})\, p_{14} = -p_{14}\\
p'_{34} &= \sum_{m,n} (a_{3m}a_{4n} - a_{4m}a_{3n})\, p_{mn} = (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})\, p_{12} = -p_{12}\\
p'_{42} &= \sum_{m,n} (a_{4m}a_{2n} - a_{2m}a_{4n})\, p_{mn} = (a_{41}a_{23} - a_{21}a_{43})\, p_{13} = p_{13}\\
p'_{23} &= \sum_{m,n} (a_{2m}a_{3n} - a_{3m}a_{2n})\, p_{mn} = (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})\, p_{23} = -p_{23} .
\end{aligned}$$

Also ist

$$p'_{ik} = (-p_{12}, p_{13}, -p_{23}, -p_{34}, p_{42}, -p_{14}) .$$

Die Koordinaten r_{ik} der konjugierten Geraden bezüglich des Rotationskomplexes ergeben sich aus (15) :

$$r_{ik} = (-p_{12}, -p_{13}, \eta p_{23}, -p_{34}, -p_{42}, \frac{1}{\eta} p_{14}) \quad .$$

Dabei wurde $\eta = (a_3 - a_2) / (a_4 - a_1)$ gesetzt. Im allgemeinen Fall wird $\eta \neq 0$ und $\eta \neq \pm 1$ sein. Damit ergeben sich aus der Identifizierung $\rho p'_{ik} = r_{ik}$ die Beziehungen

$$\rho p_{12} = p_{12} \qquad \rho p_{34} = p_{34}$$
$$\rho p_{13} = -p_{13} \qquad \rho p_{42} = -p_{42}$$
$$\rho p_{23} = -\eta p_{23} \qquad \rho p_{14} = -\frac{1}{\eta} p_{14}$$

und daraus die vier Möglichkeiten

$$\rho = \pm 1 \quad , \quad \rho = -\eta \quad , \quad \rho = -\frac{1}{\eta} \quad .$$

Mit Hilfe der Bedingungsgleichung für Geradenkoordinaten $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ erhält man die Lösungen

$$\begin{array}{lll} \rho = 1: & (1,0,0,0,0,0) & , \quad (0,0,0,1,0,0) \\ \rho = -1: & (0,1,0,0,0,0) & , \quad (0,0,0,0,1,0) \\ \rho = -\eta: & (0,0,1,0,0,0) & \\ \rho = -\frac{1}{\eta}: & (0,0,0,0,0,1) & . \end{array}$$

Die ersten vier Geraden gehören sowohl der absoluten Fläche wie dem Rotationskomplex an. Sie erfüllen trivialerweise die geforderten Bedingungen. Die beiden letzten Lösungen sind die Koordinaten der gesuchten Hauptachsen. Letztere sind offenbar identisch mit den Hauptachsen der unendlich kleinen Bewegung (vgl. Abs. 3.2). Man wäre zum selben Resultat gekommen, wenn man anstatt des Rotationskomplexes den Translationskomplex der Betrachtung zugrundegelegt hätte. Es gilt also der

S a t z Die Hauptachsen der unendlich kleinen Bewegung sind identisch mit den Hauptachsen des Rotations- und des Translationskomplexes (1874, 78).

Es ergibt sich somit nebenbei noch einmal, daß der Rotations- und der Translationskomplex dieselben Hauptachsen besitzen. Dies ist ebenso eine Folgerung aus der Tatsache, daß die beiden Komplexe absolut polar zueinander sind.

Die Kollineationen $\rho x_i = \alpha_i x'_i$ stellen nach Erklärung (Abs. 3.2) genau die Schraubenbewegungen um die Hauptachsen der unendlich kleinen Bewegung dar. Wegen $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ wird $\sigma p_{ik} = \alpha_i \alpha_k (x'_i y'_k - x'_k y'_i) = \alpha_i \alpha_k p'_{ik}$ und damit bleibt die Gleichung des Rotationskomplexes (13) wegen (3) $\alpha_1 \alpha_4 = \alpha_2 \alpha_2$ bei der Kollineation $\rho x_i = \alpha_i x'_i$ invariant. Damit erhält man den schon von Plücker (1868, 38) (vgl. Abs. IV 4.3) im euklidischen Fall gefundenen

S a t z Ein linearer Komplex geht durch eine Schraubenbewegung um eine seiner Hauptachsen in sich selbst über (1874, 78) .

Es soll nun noch der Spezialfall der Rotation um eine Gerade betrachtet

werden. Findet die Rotation etwa um die Achse $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ (Fig.1) statt, so bleiben die Ebenen des Büschels $x_2 + \lambda x_3 = 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ invariant, d.h. mit $\rho x_i = \alpha_i x_i'$ wird die Gleichung dieses Büschels gleich $\alpha_2 x_2' + \lambda \alpha_3 x_3' \overset{!}{=} x_2' + \lambda x_3' = 0$ und deswegen $\alpha_2 = \alpha_3$, also auch $a_2 = a_3$. Daraus folgt mit Hilfe der Gleichung des Rotationskomplexes (13) : $(a_4 - a_1)p_{14} + (a_3 - a_2)p_{23} = 0$ offenbar $p_{14} = 0$ und aus der Gleichung des dazu polaren Translationskomplexes $p_{23} = 0$. Die beiden zu dieser unendlich kleinen Drehung gehörigen linearen Komplexe sind also speziell und ihre Trägergeraden zueinander absolut polar.

3.3.4 Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen

> "Die beiden linearen Complexe, auf welche wir im Vorigen geführt wurden, sind für die Natur einer unendlich kleinen Bewegung, sowie auch für die Theorie der Kraftsysteme von hoher Bedeutung; es ist daher wohl von Interesse zu verfolgen, wie sich die Coordinaten derselben aus den Coëffizienten einer nicht in kanonischer Form gegebenen Transformation zusammensetzen, zumal da wir die so gewonnenen Ausdrücke geradezu zur Definition der Bewegung (resp. später eines Kraftsystems) benutzen werden." (1874, 80)

Lindemann leitete zunächst eine Beziehung zwischen der Matrix a der Fundamentalfläche mit der Gleichung $x^T a x = 0$ und der Matrix α der unendlich kleinen Bewegung mit der Gleichung $dx = \alpha x d\lambda$, ab:

$$a = J\left((a\alpha) + (a\alpha)^T\right)$$

wobei $J \in \mathbb{R}$ ein gewisser fester Faktor ist. Als nächstes wird die Gleichung der Nullkorrelation des Rotationskomplexes berechnet:

$$U = (a - 2Ja\alpha))x \quad .$$

Die Matrix $r = a - 2Ja\alpha$ ist tatsächlich schiefsymmetrisch:

$$r^T = a^T - 2J(a\alpha)^T = a - 2J(a\alpha)^T$$

$$r^T + r = 2a - 2J\left((a\alpha) + (a\alpha)^T\right) = 0 \quad .$$

Faßt man die Matrixelemente von r als Koordinaten des Rotationskomplexes auf, so läßt sich die Gleichung $y^T r x = 0$ mit

$$r = \begin{pmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & 0 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad R_{ik} = -R_{ki}$$

in der Form $R_{ik}p_{ik} = 0$ schreiben. D.h. die Gleichung des Rotationskomplexes hat die Form

$$R_{12}p_{12} + R_{13}p_{13} + R_{14}p_{14} + R_{34}p_{34} + R_{42}p_{42} + R_{23}p_{23} = 0 \quad .$$

Dabei sind die R_{ik} durch die Beziehung

$$\begin{aligned} r = a - 2Ja\alpha &= J\left((a\alpha) + (a\alpha)^T\right) - 2J(a\alpha) \\ &= J\left((a\alpha)^T - (a\alpha)\right) \end{aligned}$$

definiert, d.h. sie enthalten noch einen unbestimmten Faktor J . Für die eindeutige Festlegung des linearen Komplexes (Rotationskomplex)

ist dies unerheblich. Man kann diesen zur freien Verfügung stehenden Faktor J nun aber als Maß für die Größe (oder Intensität) der unendlich kleinen Bewegung, d.h. der Geschwindigkeit oder Beschleunigung, auffassen.

> "Denken wir uns nämlich die Coëffizienten der Gleichung der Fundamentalfläche absolut bestimmt, so brauchen wir J nur für eine bestimmte unendlich kleine Bewegung gleich der Einheit zu setzen, um durch Vergleichung mit ihr die Intensität anderer Bewegungen zu messen. Legen wir demgemäß den R_{ik} absolute Werte bei, so ist eine jede unendlich kleine Bewegung durch diese 6 Coordinaten des ihr zugehörigen Rotationskomplexes vollkommen bestimmt, und wir werden diese daher geradezu als C o o r d i n a t e n d e r b e t r e f f e n d e n B e w e g u n g bezeichnen." (1874, 82)

Durch die zugehörigen dualen Überlegungen käme man auf eine Darstellung der unendlich kleinen Bewegung mit Hilfe des Translationskomplexes. Auch seine Koordinaten T_{ik} lassen sich dann, absolut genommen, als Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung auffassen. Diese zweifache Art der

> "Darstellung derselben Bewegung wird sich durch alle folgenden Betrachtungen hindurchziehen; sie ist für die allgemeine projectivische Maßgeometrie charakteristisch.
> Der Zusammenhang zwischen beiden Darstellungsweisen wird stets durch die Fundamentalfläche vermittelt, indem der eine Complex dem andern ... in Bezug auf sie polar conjugirt ist." (1874, 83)

Sind die Komplexe speziell, so reduziert sich die Bewegung auf eine Translation bzw. auf eine Rotation um die konjugierte Polare (Abs. 3.3.3.2).

Für die Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen gilt dann der im euklidischen Fall schon von Möbius (1838, 564f.) gefundene

S a t z Unendlich kleine Bewegungen setzen sich zusammen, indem sich ihre absolut genommenen Koordinaten addieren (1874, 84) .

Hieran schließt Lindemann einige sich leicht aus der Koordinatenbestimmung ergebende Sätze an, die mehr oder weniger in seinem Wortlaut wiedergegeben werden sollen.

Verschwinden von den Koordinaten R_{ik} alle bis auf eine, so ist der entsprechende lineare Komplex jedenfalls ein spezieller (da dann seine Koordinaten die Bedingungsgleichung für L i n i e n koordinaten erfüllen). Also stellt eine jede der sechs Koordinaten des Rotationskomplexes eine unendlich kleine Rotation um eine Kante des Koordinatentetraeders dar (etwa R_{14} um die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$) und ebenso jede Koordinate des Translationskomplexes eine unendlich kleine Translation längs einer Kante desselben. Daraus ergibt sich sofort der schon für die euklidische Kinematik (wo nur der Rotationskomplex existiert) von Möbius (1838, 564) aufgestellte

S a t z Jede unendlich kleine Bewegung läßt sich erzeugen durch sechs unendlich kleine Rotationen um die Kanten eines Tetraeders bzw. durch sechs unendlich kleine Translationen längs denselben (1874, 84).

Bei der Bestimmung der unendlich kleinen Bewegung durch ihre Koordinaten ist dieser Satz fast selbstverständlich. Nach dem Vorgehen von Felix Klein können die eben aufgestellten Sätze mit Hilfe einer neuen Koordinatenbe-

stimmung noch verallgemeinert werden. Wie Klein (1870b) zeigte (vgl. Abs. V 2.4.2), lassen sich die Koordinaten eines beliebigen linearen Komplexes definieren als die simultanen Invarianten desselben in Bezug auf sechs gegebene linear unabhängige lineare Komplexe. Da nun jede unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Komplex dargestellt werden kann, erhält man den

S a t z Jede unendlich kleine Bewegung kann durch dieselben sechs Schraubenbewegungen erzeugt werden, wenn von diesen keine die Folge der übrigen oder einiger unter ihnen ist (d.h. wenn die entsprechenden linearen Komplexe linear unabhängig sind) (1874, 85).

Unter diesen sechs linearen Komplexen können natürlich gewisse speziell sein. Sind sie es alle, so hat man den für den euklidischen Fall schon von Möbius (1838, 563) gefundenen allgemeinen

S a t z Ein Körper kann auf jede mögliche Art infinitesimal bewegt werden, wenn er um sechs voneinander unabhängige Geraden infinitesimal gedreht, bzw. längs ihnen verschoben werden kann. (Diese sechs Geraden dürfen nicht alle e i n e m Komplex angehören.) (1874, 85)

3.3.5 Geometrische Beziehungen, die durch eine unendlich kleine Bewegung vermittelt werden

Zur anschaulichen Erfassung einer unendlich kleinen Bewegung ist es sinnvoll, das Liniengebilde, bestehend aus den Verbindungsgeraden unendlich benachbarter Punkte, heranzuziehen. Diese Verbindungsgeraden nennt man im Anschluß an Chasles (1843) C h a r a k t e r i s t i k e n . Es sind im Grunde genommen die (momentanen) Bahntangenten der Punkte des starren Körpers. Die Menge aller Bahntangenten oder Charakteristiken bilden nun, wie Lindemann zeigte[20], einen Komplex zweiten Grades, den sogenannten C h a r a k t e r i s t i k e n k o m p l e x. Er hat die besondere Eigenschaft, daß jede seiner Geraden die Ebenen eines gewissen Tetraeders (hier das Koordinatentetraeder) in demselben konstanten Doppelverhältnis schneidet. Wie man zeigen kann (Lindemann 1874, 86), ist dieses Doppelverhältnis gleich dem Parameter des der unendlich kleinen Bewegung zugeordneten linearen Komplexes.

Wie sich zeigt, kommt man auf denselben Komplex zweiten Grades, wenn man diejenigen Geraden aufsucht, die Charakteristiken von E b e n e n sind. Daraus folgt: Ist eine Gerade Charakteristik eines Punktes, so ist sie auch Charakteristik einer Ebene und umgekehrt (1874, 87).

Wie bereits erwähnt, sind die Geraden des Charakteristikenkomplexes Tangenten an diejenigen Kurven, auf welchen sich die Punkte des starren Körpers bewegen. Diese Kurven wurden p r o j e k t i v e S c h r a u b e n l i n i e n genannt (Abs. 3.2); sie sind auch dadurch definiert, daß sie durch die lineare Transformation, welche die betrachtete Bewegung darstellt, in sich übergeführt werden; es handelt sich also um eine spezielle

Art der von Klein und Lie (1870c) näher untersuchten Gebilde. Natürlich geht bei der Bewegung einer solchen Schraubenlinie in sich auch der Komplex der Charakteristiken in sich über, da seine Geraden eben jene Kurven umhüllen.

Bei einer linearen eigentlichen Transformation gehen die Erzeugendenscharen jeder invarianten Fläche je in sich über. Dabei gehen auch die Tangenten an eine bestimmte projektive Schraubenlinie in Tangenten derselben über. Nun bleiben die metrischen Relationen zwischen den Erzeugenden und einer solchen Tangente sicher erhalten, d.h. die Tangenten einer projektiven Schraubenlinie bilden mit den beiden Scharen von Erzeugenden der Fläche zweiten Grades, auf welcher sie liegen, konstante Schnittwinkel (1874, 92).

In (1874,§§7 und 8) geht Lindemann daran, einige tiefer liegende geometrische Tatsachen, die mit der unendlich kleinen Bewegung in Zusammenhang stehen, abzuleiten, wobei es sich eigentlich um Dinge handelt, die der Theorie der Komplexe zweiten Grades angehören. Es sollen hier einige diesbezügliche Sätze zusammengestellt werden, um einen Eindruck von Lindemanns geometrischen Interessen und Können zu vermitteln. Die meisten davon finden sich in spezieller (d.h. euklidischer) Form bereits bei Chasles (1843), (1860), (1861a). Eine zusammenfassende Darstellung der im Euklidischen geltenden Sätze gab Schoenflies in seinem schönen Buch "Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung" (1886).

Die Punkte, deren Charakteristiken einen bestimmten Punkt treffen, bilden eine Raumkurve dritter Ordnung (1874, 97).	Die Ebenen, deren Charakteristiken in einer bestimmten Ebene liegen, umhüllen eine abwickelbare Fläche dritter Klasse (1874, 97).

An diesen Satz schließen sich einige kompliziertere Sätze an, welche auf hohem Niveau die synthetische und algebraische Flächen- und Kurventheorie des Raumes voraussetzen. Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Die Punkte, deren Charakteristiken eine bestimmte Gerade schneiden, inzidieren mit einer Fläche zweiter Ordnung (1874, 100).	Die Ebenen, deren Charakteristiken eine bestimmte Gerade schneiden, inzidieren mit einer Fläche zweiter Klasse (1874, 100).
Die Charakteristiken der Punkte einer beliebigen Geraden sind die Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades.	Die Charakteristiken der Ebenen eines beliebigen Ebenenbüschels erzeugen eine Fläche zweiten Grades.

Ist die links genannte Gerade Träger des rechts genannten Ebenenbüschels, so sind die beiden Flächen identisch (1874, 101).

Gehört eine Gerade dem Charakteristikenkomplex an,

so umhüllen die Charakteristiken ihrer Punkte einen Kegelschnitt in der Ebene, deren Charakteristik sie ist (1874, 102).	so bilden die Charakteristiken der durch sie gehenden Ebenen einen Kegel zweiter Ordnung, mit der Spitze in dem Punkt, von welchem sie Charakteristik ist (1874, 102).

3.4 Metrische Beziehungen im Linien- und Komplexraum

Im Anschluß an Lindemann sollen hier die Verallgemeinerung der Begriffe der Neigung und des Momentes zweier Geraden entwickelt werden; diese Begriffe spielen in der nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers eine zentrale Rolle.

3.4.1 Die Neigung zweier Geraden oder linearer Komplexe

Entsprechend zur Definition des Winkels zweier Ebenen (vgl. Abs. 1.2.2) ist der Winkel zweier sich schneidender Geraden p und q erklärt als der mit $-i/2$ multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches diese mit denjenigen beiden Tangenten bilden, die von ihrem Schnittpunkte an die Fundamentalfläche gelegt werden können, sodaß die vier Geraden alle in einer Ebene liegen und diese Ebene keine Tangentialebene der Fundamentalfläche ist (1874, 63). Zur Berechnung des Winkels muß man die Fundamentalfläche in Linienkoordinaten

$$\phi(g,g) = \sum_{i,k} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})\, g_{mn}g_{ik} = 0$$

schneiden mit dem Geradenbüschel $\rho g_{ik} = p_{ik} + \lambda q_{ik}$; $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$.
Wegen der Symmetrie der Matrix (a_{ik}) wird aus

$$\sum_{i,k} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})\, (p_{mn} + \lambda q_{mn})\, (p_{ik} + \lambda q_{ik}) = 0$$

die Beziehung

$$\sum_{i,k} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})\, (p_{mn}p_{ik} + 2\lambda p_{mn}q_{ik} + \lambda^2 q_{mn}q_{ik})$$

oder abgekürzt

$$\phi(p,p) + 2\lambda\,\phi(p,q) + \lambda^2\,\phi(q,q) = 0 \;.$$

Das Doppelverhältnis der genannten vier Geraden ist nun gleich dem Quotienten der beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung[4] in λ, also wird der Winkel zwischen p und q gleich

$$-\frac{i}{2} \ln \frac{\phi(p,q) + \sqrt{\phi^2(p,q) - \phi(p,p)\,\phi(q,q)}}{\phi(p,q) - \sqrt{\phi^2(p,q) - \phi(p,p)\,\phi(q,q)}} = \arccos \frac{\phi(p,q)}{\sqrt{\phi(p,p)\;\phi(q,q)}} \;.$$

Im euklidischen Fall hat nun die Neigung zweier windschiefer Geraden dieselbe analytische Darstellung wie der Winkel zweier sich schneidender Geraden. Es ist deshalb sinnvoll, die Neigung zweier Geraden p und q im n i c h t euklidischen Fall zu d e f i n i e r e n als den mit $-i/2$ multiplizierten Logarithmus des Quotienten aus den Wurzeln der Gleichung

$$\phi(p+\lambda q, p+\lambda q) = \phi(p,p) + 2\lambda\,\phi(p,q) + \lambda^2\phi(q,q) = 0 \quad . \qquad (21)$$

Was bedeutet aber dann diese Gleichung geometrisch?[21]
Sind p'_{ik} und q'_{ik} die Strahlenkoordinaten der absoluten Polaren von p bzw. q, so gilt für die Achsenkoordinaten nach (17)

$$\rho P'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})p_{mn} \quad .$$

Bei dem Produkt

$$(p',p) = p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + \dots + p'_{23}p_{14}$$

wird das erste Glied wegen $p'_{12} = P'_{34}$ zu

$$\rho p'_{12}p_{34} = \sum_{m,n} (a_{3m}a_{4n} - a_{4m}a_{3n})p_{mn}p_{34} \quad .$$

Also ergibt sich als Summe aller Glieder

$$\rho(p',p) = \sum_{m,n} \sum_{i,k} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})p_{mn}p_{ik} \quad ,$$

d.h.

$$\rho(p',p) = \phi(p,p) \quad . \qquad (22)$$

Ganz entsprechend zeigt man

$$\rho(q',q) = \phi(q,q) = \rho(q,q')$$
$$\rho(p',q) = \phi(p,q) = \phi(q,p) = \rho(q',p) \quad .$$

Damit läßt sich die quadratische Gleichung für λ

$$\phi(p,p) + 2\lambda\,\phi(p,q) + \lambda^2\,\phi(q,q) = 0$$

umschreiben in

$$\rho((p,p') + \lambda(p,q') + \lambda(q,p') + \lambda^2\,(q,q')) = 0 \quad .$$

Dies ist aber identisch mit

$$\rho(p+\lambda q, p'+\lambda q') = 0 \quad . \qquad (23)$$

Faßst man die p_{ik} und q_{ik} als Komplexkoordinaten auf, so besagt diese Relation nichts anderes, als daß der lineare Komplex $p + \lambda q$ i n I n v o l u t i o n mit dem linearen Komplex $p' + \lambda q'$ liegt (vgl. Abs. V 2.3). D.h. also hier: der lineare Komplex $p + \lambda q$ ist mit seinem absolut polaren Komplex $p' + \lambda q'$ in Involution.

Die quadratische Gleichung (23) hat im allgemeinen zwei Lösungen λ_1, λ_2 ; somit gibt es in einem Komplexbüschel im allgemeinen zwei lineare Komplexe, die zu ihren absolut konjugierten in Involution liegen.

Was bedeutet hier der Quotient der Wurzeln der Gleichung (23) ?

Definition — Das D o p p e l v e r h ä l t n i s v o n v i e r K o m p l e x e n e i n e s K o m p l e x b ü - s c h e l s ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, die die vier linearen Komplexe einer beliebigen Ebene zuordnen, bzw. der vier Ebenen, die einem Punkt zugeordnet werden. Erstere liegen alle auf einer Geraden der Kongruenz des Büschels; letztere gehen durch eine solche. (1874, 65)

Sind p_{ik} , q_{ik} , $p_{ik} + \lambda_1 q_{ik}$, $p_{ik} + \lambda_2 q_{ik}$ die Koordinaten der vier linearen Komplexe, so haben die einer Ebene zugehörigen Nullpunkte Koordinaten der Form x_i , y_i , $x_i + \lambda_1 y_i$, $x_i + \lambda_2 y_i$ (Abs. V 2.2).

Der Quotient λ_1/λ_2 ist dann gleich dem Doppelverhältnis der vier linearen Komplexe.

Die N e i g u n g z w e i e r l i n e a r e r K o m p l e x e ist also gleich dem mit $-i/2$ multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit denjenigen beiden linearen Komplexe ihres Büschels bilden, die mit ihren absolut polaren Komplexen in Involution liegen, d.h. sie ist gleich (1874, 66)

$$-\frac{i}{2}\ln\frac{\phi(p,q)+\sqrt{\phi^2(p,q)-\phi(p,p)\;\phi(q,q)}}{\phi(p,q)-\sqrt{\phi^2(p,q)-\phi(p,p)\;\phi(q,q)}} =$$

$$= \arccos\frac{\phi(p,q)}{\sqrt{\phi(p,p)\;\phi(q,q)}} = \arccos\sqrt{\frac{(p',q)\;(p,q')}{(p,p')\;(q,q')}}\quad . \quad (24)$$

Sind die beiden linearen Komplexe p und q s p e z i e l l , d.h. sind sie zu Geraden degeneriert, so ergibt sich:

Die N e i g u n g z w e i e r G e r a d e n p und q ist gleich dem mit $-i/2$ multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, gebildet aus den Schnittpunkten einer beliebigen Ebene mit p und q und aus den beiden Punkten, welche der Ebene durch diejenigen linearen Komplexe des (hyperbolischen) Komplexbüschels $p + \lambda q$ zugeordnet sind, die zu ihren absolut polaren Komplexen in Involution liegen (1874, 65).

Schneiden sich die beiden Geraden p und q , so degeneriert das Komplexbüschel in ein Strahlenbüschel; die beiden Tangenten an die Fundamentalfläche schneiden dann tatsächlich ihre absoluten Polaren, (d.h. sie fallen sogar mit ihr zusammen) - was bei speziellen linearen Komplexen der involutorischen Lage entspricht. In diesem Falle geht der Ausdruck für die N e i g u n g zweier Geraden über in den Ausdruck für den Neigungswinkel.

Es läßt sich zeigen (Lindemann 1874, 67f.), daß die hier gegebene Definition der nichteuklidischen Neigung zweier Geraden sich auf den euklidischen Fall spezialisieren läßt. Dabei kommt genau die erwartete Formel

$$\arccos\frac{p_{12}q_{12}+p_{13}q_{13}+p_{14}q_{14}}{\sqrt{p_{12}^2+p_{13}^2+p_{14}^2}\,\sqrt{q_{12}^2+q_{13}^2+q_{14}^2}}$$

heraus. Geometrisch liegt dabei folgendes vor: das (ausgeartete!) Fundamentalgebilde der euklidischen Maßbestimmung, ein imaginärer Kegelschnitt (imaginärer Kugelkreis) in der unendlich fernen Ebene, induziert keine eindeutige r ä u m l i c h e Polaritätsbeziehung. Einem linearen Komplex läßt sich dadurch kein bestimmter anderer als absolut polarer Komplex zuordnen. Einer geraden Linie, genauer einem Parallelstrahlenbündel läßt sich aber umkehrbar eindeutig eine absolute Polare zuordnen, nämlich die Polare ihres Fernpunktes bezüglich des imaginären Kugelkreises. Diese ist Trägergerade des zur ursprünglichen Geraden senkrechten Parallelebenenbüschels. Damit ist den Parallelstrahlenbündeln des euklidischen Raumes umkehrbar eindeutig das Strahlenfeld der unendlich fernen Ebene zugeordnet.

Es soll nun die Menge der euklidischen Hauptachsen eines Komplexbüschels betrachtet werden. Diese bilden eine Linienfläche dritter Ordnung (das so-

genannte Zylindroid - vgl. Abs. IV 4.4) und lassen sich eineindeutig auf eine eindimensionale Teilmenge der Parallelstrahlenbündel des euklidischen Raumes beziehen.[22] Ihnen entspricht in der unendlich fernen Ebene also ein wohlbestimmtes Strahlenbüschel. Dieses soll als das zum Komplexbüschel absolut polare Büschel bezeichnet werden.

Die beiden Komplexe des Büschels, die mit ihren absolut polaren Komplexen in Involution liegen, sind dann diejenigen, welche die ihnen zugehörigen Geraden selbst enthalten (so ist die involutorische Lage eines linearen Komplexes und einer Geraden erklärt - vgl. Abs. V 2.3) . In diesem Sinne läßt sich die oben gegebene allgemeine geometrische Definition der gegenseitigen Neigung von zwei linearen Komplexen auch für die spezielle euklidische Maßbestimmung beibehalten (1874, 67).

3.4.2 Das gegenseitige Moment zweier Geraden oder linearer Komplexe

Euklidisch ist das gegenseitige Moment zweier Geraden definiert als das Produkt des kürzesten Abstandes mit dem Sinus der Neigung der beiden Geraden (Abs. IV 5). In dieser Formulierung scheint das Moment nicht ohne weiteres auf die allgemeine nichteuklidische Maßbestimmung übertragbar zu sein.

> "Das Wesentliche in dem gebräuchlichen [euklidischen] Ausdrucke ist jedoch, daß er bestimmt ist, eine invariante Beziehung der beiden Geraden zu ihren in der unendlich fernen Ebene gelegenen absoluten Polaren zu geben, denn es ist die Linie kürzester Entfernung die durch den Schnittpunkt dieser beiden Polaren gehende Gerade, welche beide gegebene Linien trifft." (1874, 68)

Zu jeder Geraden g des euklidischen Raumes gibt es ein zu ihr senkrechtes Parallelebenenbüschel, dessen Trägergerade man als absolute Polare von g bezüglich des imaginären Kugelkreises bezeichnen kann. Die kürzeste Verbindung zweier windschiefer Geraden g und h liegt dann auf der eindeutig bestimmten Treffgeraden von g und h , sowie den Polaren g' und h' von g bzw. h in der unendlich fernen Ebene; letztere schneiden sich nämlich im Fernpunkt der Trägergeraden der kürzesten Verbindung.

> "Wir werden daher auch bei allgemeiner Maßbestimmung das Moment als eine invariante Beziehung der beiden Geraden zu ihren absoluten Polaren auffassen, und zwar wollen wir statt der Geraden sogleich zwei lineare Complexe ... annehmen." (1874, 68)

Definition Das g e g e n s e i t i g e M o m e n t z w e i e r l i n e a r e r K o m p l e x e ist gleich dem Kosinus der Neigung des einen gegen den absolut konjugierten polaren Komplex des anderen (1874, 68).

Zur Berechnung des gegenseitigen Moments zweier linearer Komplexe muß man die Koordinaten des absolut polaren Komplexes bezüglich eines gegebenen Komplexes bestimmen.

Die absolute Polare einer Geraden p hat die Achsenkoordinaten (Abs. 3.3.3.1, Gleichung (17))

$$\rho p'_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in})p_{mn} \quad . \qquad (17)$$

Die vollkommene Symmetrie zwischen den zueinander polaren Geraden p und P' hat zur Folge, daß auch gilt

$$\rho' P_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{r,s} (a_{mr}a_{ns} - a_{nr}a_{ms}) p'_{rs} \quad . \tag{25}$$

Was sind nun die Koordinaten des zu einem linearen Komplex mit den Koordinaten c_{ik} absolut polaren Komplexes c' ?
Die Gleichung des Komplexes c ist etwa gegeben durch

$$\sum_{i,k} c_{ik} P_{ik} = 0 \quad .$$

Sind die Geraden P_{ik} die absoluten Polaren der Geraden p'_{mn} eines linearen Komplexes C'_{ik} , d.h. des zu c absolut polaren Komplexes, so gilt

$$\rho' P_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in}) p'_{mn} \quad .$$

Setzt man dies in die Gleichung des Komplexes c ein, so erhält man

$$\frac{1}{2\rho'} \sum_{i,k} c_{ik} \left(\sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in}) p'_{mn} \right) = 0 \quad .$$

Diese Gleichung hat die Form

$$\sum_{m,n} C'_{mn} p'_{mn} = 0 \quad ,$$

wobei

$$\rho C'_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (a_{mi}a_{nk} - a_{ni}\, a_{mk}) c_{ik} \quad . \tag{26}$$

Man beachte, daß diese Beziehung die selbe Struktur wie die Polarenbeziehung (17) für Geraden hat. Natürlich gilt auch hier eine Polarenbeziehung der Form

$$\rho' C_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{r,s} (a_{ir}a_{ks} - a_{kr}a_{is}) c'_{rs} \quad . \tag{27}$$

Wie Lindemann (1874, 68f.) zeigte, stehen ρ und ρ' in der Beziehung $\rho\,\rho' = \det(a_{ik})$.

Bildet man nun ganz analog wie bei den Linienkoordinaten (Abs. V 2.1) den Ausdruck (c',c) , so erhält man mit der Festlegung

$$\Phi(c,c) = \sum_{i,k} \sum_{m,n} (a_{im}a_{kn} - a_{km}a_{in}) c_{mn} c_{ik}$$

entsprechend zur Herleitung von (22) die Beziehungen $\rho(c',c) = \Phi(c,c)$ und $\rho'(c,c') = \Phi(c',c')$. Nun ist sicher $(c,c') = (c',c)$, also $\rho'/\rho = \Phi(c',c')/\Phi(c,c)$. Zieht man einen weiteren linearen Komplex d hinzu, so gilt offenbar $\rho'(c,d) = \Phi(c',d)$ und $\rho'(d,c) = \Phi(d',c) = \Phi(c,d') = \Phi(c',d) = \rho'(c,d)$. Weiter ist $\rho(c',d') = \Phi(c,d')$, also wegen $\Phi(c',d) = \Phi(c,d')$

$$\rho(c',d') = \rho'(c,d)$$

oder

$$\rho\,\rho'(c',d') = \rho'^2(c,d) \quad .$$

Nach Erkärung ist nun das gegenseitige Moment der linearen Komplexe c und d gleich dem Kosinus der Neigung der Komplexe c und d', d.h. gleich dem Kosinus der Neigung des Komplexes c und des absolut polaren Komplexes von d, folglich gilt (1874, 69)

$$= \frac{\Phi(c,d')}{\sqrt{\Phi(c,c)\quad \Phi(d',d')}} = \frac{\Phi(d,c')}{\sqrt{\Phi(d,d)\quad \Phi(c',c')}} =$$

$$= \frac{\rho'\ (c,d)}{\sqrt{\Phi(d,d)\ (\rho'/\rho)\ \Phi(c,c)}} = \frac{\sqrt{\rho\rho'}\ (c,d)}{\sqrt{\Phi(c,c)\quad \Phi(d,d)}}$$

$$= \sqrt{\det\ (a_{ik})}\ \frac{(c,d)}{\sqrt{\Phi(c,c)\quad \Phi(d,d)}} \quad .$$

Der arccos des Momentes läßt sich als Doppelverhältnis deuten: dadurch erweist er sich als projektive Invariante. Um dies einzusehen, geht man von dem durch die linearen Komplexe c und d' bestimmten Komplexbüschel aus. Ist der Komplex d bekannt, so hat der absolut polare Komplex von d die Achsenkoordinaten $\rho D'_{ik}$, also lauten die Koordinaten eines bestimmten Komplexes des Büschels in Achsenkoordinaten $C_{ik} + \lambda(\rho D'_{ik})$ oder in Strahlenkoordinaten $c_{ik} + \lambda(\rho d'_{ik})$. Das dazu absolut polare Büschel läßt sich dann darstellen durch

$$(c_{ik} + \lambda(\rho d'_{ik}))' = \rho C'_{ik} + \lambda\rho\rho' D_{ik} = \rho(C'_{ik} + \lambda(\rho' D_{ik})) \quad .$$

Man beachte dabei: der absolut polare Komplex zu d'_{ik} hat die Koordinaten $\rho' D_{ik}$. Die Komplexe des Büschels $c + \lambda(\rho d')$, die mit ihren absolut polaren in Involution liegen, ergeben sich dann aus der quadratischen Gleichung in λ:

$$\rho(c+\lambda\rho d'\ ,\ c'+\lambda\rho' d) = 0 \quad ,$$

d.h.

$$(c,c') + \lambda(\rho(c',d') + \rho'\ (c,d)) + \lambda^2 \rho\rho'(d,d') = 0 \quad .$$

Man interessiert sich nun für den mit $-i/2$ multiplizierten Logarithmus des Quotienten der beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 dieser Gleichung. Sie hat die Form $\alpha + 2\lambda\beta + \lambda^2\gamma = 0$ und somit ist (vgl. Abs. 1.2.2)

$$-\frac{i}{2}\ \ln\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \arccos\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \quad .$$

Wegen $\rho(c',d') = \rho'(c,d)$ wird $2\beta = 2\rho'\ (c,d)$; weiter ist $\alpha = (c,c') = \Phi(c,c)/\rho$ und $\gamma = \rho\rho'\ (d,d') = (\rho\rho'/\rho)\ \Phi(d,d)$, also $\alpha\gamma = (\rho\rho'/\rho^2)\ \Phi(c,c)\ \Phi(d,d)$ und schließlich wird das genannte Doppelverhältnis gleich (1874, 69)

$$\arccos\ \frac{\rho'(c,d)}{\sqrt{(\rho'/\rho)\ \Phi(c,c)\quad \Phi(d,d)}} = \arccos\ \frac{\det(a_{ik})\quad (c,d)}{\sqrt{\Phi(c,c)\quad \Phi(d,d)}}$$

In Worten: der arccos des Momentes ist gleich mit dem $-i/2$ multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, gebildet von dem einen Komplex c, dem absolut Polaren d' des anderen und den beiden Komplexen des Büschels $c + \lambda\rho d'$, die mit ihren absolut polaren Komplexen in Involution liegen.

Wiederum läßt sich zeigen (Lindemann 1874, 69f.), daß durch die Spezialisierung der Maßbestimmung auf den euklidischen Fall die bekannte Formel (vgl. Abs. IV 5)

$$\frac{1}{2}\ \frac{(c,d)}{\sqrt{c_{12}^2+c_{13}^2+c_{14}^2}\sqrt{d_{12}^2+d_{13}^2+d_{14}^2}}$$

herauskommt. Die oben gegebene geometrische Interpretation dieser Formel kann beibehalten werden (vgl. die Ausführungen am Ende des Abschnittes 3.4.1):

> "... das darin auftretende Doppelverhältnis wird nunmehr gebildet von dem einen gegebenen Complexe, der dem anderen zugeordneten Geraden des unendlich fernen Strahlenbüschels und den beiden Complexen der durch die gegebenen bestimmten Gruppe [= Büschel], welche die ihnen zugeordneten Strahlen enthalten." (1874, 70)

Sind die linearen Komplexe speziell, so ändert sich nichts Wesentliches. Der obige Ausdruck liefert dann unmittelbar das halbe Produkt der kürzesten Entfernung mit dem Sinus der Neigung.

Setzt man $c = d$, so erhält man im nichteuklidischen Fall die Verallgemeinerung des Parameters des linearen Komplexes, d.h. das Moment des linearen Komplexes in Bezug auf sich selbst.

3.4.3 Die Intensität einer unendlich kleinen Bewegung

Lindemann berechnete zunächst mit Hilfe des nichteuklidischen infinitesimalen Streckenelements[23] die " I n t e n s i t ä t" einer unendlich kleinen Bewegung eines Punktes x längs seiner Charakteristik p. Wie sich zeigte, ist die Intensität ein Maß für die Geschwindigkeit dieser Bewegung; anstatt von einer unendlich kleinen Bewegung läßt sich also auch von einer (momentanen) Geschwindigkeitsverteilung sprechen. Die so berechnete Intensität hängt aber von den Koordinaten des Punktes x ab; Lindemann konnte einstweilen nur mit geometrischen Argumenten darauf hinweisen, daß diese völlig unabhängig vom gewählten Punkt x auf p ist. Weiter unten griff er dieses Problem wieder auf (1874, 128f.) und zeigte, wie sich die Intensität allein aus den Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung, bzw. des ihr zugrundeliegenden linearen Komplexes, berechnen läßt. Sind etwa R_{ik} die Achsenkoordinaten einer unendlich kleinen Rotation R, so wird ihre Intensität gleich (1874, 129)

$$|R| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\Phi(R,R)}{\det\,(a_{ik})}}$$

und entsprechend für eine unendlich kleine Translation T mit den Strahlenkoordinaten t_{ik}

$$|T| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\Phi(t,t)}{\det\,(a_{ik})}}\ ,$$

wobei $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ wieder die Gleichung der Fundamentalfläche der Maßbestimmung darstellt. Diese Ausdrücke übertragen sich natürlich sofort auf S y s t e m e von unendlich kleinen Rotationen bzw. Translationen, d.h. auf unendlich kleine Bewegungen der allgemeinsten Natur. Lindemann d e f i n i e r t e die Intensität eines solchen Systems mit den Koordinaten R_{ik} oder t_{ik} durch dieselben Ausdrücke $|R|$ bzw. $|T|$ (1874, 130).

3.5 Über Begriff und Maß der Kraft

3.5.1 Grundsätzliches zum Begriff der Kraft

Bisher wurden ausschließlich unendlich kleine Bewegungen und deren Gesetzmäßigkeiten betrachtet. Diese ließen sich rein deduktiv aus der Betrachtung unendlich kleiner linearer Transformationen, welche die Fundamentalfläche invariant lassen, ableiten. Zur Bestimmung des Kraftbegriffs steht man vor einer anderen Situation. Im Rahmen des euklidischen Raumes lassen sich seine Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe von Experimenten feststellen - dies geht aber im allgemeinen in einem nichteuklidischen Raum nicht mehr.

> "Wenn wir den Begriff der Kraft für unsere allgemeine Maßbestimmung genau feststellen wollen, kommt es darauf an, das ihm bei der gebräuchlichen Vorstellung nur in Folge der speciellen Natur unserer [euklidischen] Maßgeometrie Anhaftende von ihm zu trennen und so die Seiten des Kraftbegriffes zu kennzeichnen, welche unabhängig davon bestehen bleiben, eine Aufgabe, deren Lösung uns die bisher gewonnenen Anschauungen über unendlich kleine Bewegungen ermöglichen werden." (1874, 116)

Der wesentliche Gedanke besteht in der Verwendung der vom euklidischen Raum her bekannten Analogie zwischen den Gesetzen der Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen und der Zusammensetzung von Kräften. Im euklidischen Fall stehen sich gegenüber

die Translation und das Kräftepaar (freie Vektoren)

sowie

die Rotation und die Einzelkraft (Stäbe, d.h. liniengebundene Vektoren) .

Das euklidische Winkelmaß ist e l l i p t i s c h e r Natur, d.h. im projektiven Sinne n i c h t ausgeartet. Beim Übergang zur allgemeinen nichteuklidischen Maßbestimmung werden folglich alle auf Winkel bezüglichen Sätze sich im wesentlichen nicht ändern. Es ist sinnvoll, nach dem Prinzip der oben genannten Analogie folgenden Grundsatz an die Spitze der Betrachtungen zu stellen.

G r u n d s a t z "Die Zusammensetzung der Kräfte geschieht nach denselben Gesetzen wie die der unendlich kleinen Rotationen." (1874, 117)

Der Begriff der Kraft im Rahmen der nichteuklidischen Mechanik hat also rein mathematisch-definitorischen Charakter. Er gibt nur an, w i e man sich einen solchen sinnvoll denken kann und muß. Ob ihm ein Äquivalent in der Welt der Wahrnehmungen entspricht, ist dadurch in keiner Weise festgestellt. Lindemann geht auf dieses Problem auch an keiner Stelle ein (vgl. dazu Abs. 3.1).

3.5.2 Rotationskräfte und Translationskräfte

Es ergab sich schon mehrfach Gelegenheit, darauf hinzuweisen, wie im euklidischen Raum Rotationen und Translationen (Rotationspaare) einen wesentlichen Unterschied aufweisen: erstere bestimmen eindeutig eine Achse, letztere nur eine Richtung. Entsprechendes gilt für Einzelkräfte und Drehmomente (Kräftepaare).

In der nichteuklidischen Geometrie liegen die Verhältnisse ganz anders. Neben den Begriff der Rotation u m eine Achse stellt sich völlig gleichberechtigt der Begriff der Translation l ä n g s einer Achse (Abs. 3.2). Beide gehorchen denselben Gesetzen der Zusammensetzung. Im Grundsatz vom letzten Abschnitt wurden den Rotationen die Einzelkräfte gegenübergestellt. Diese wirken längs einer Achse auf einen Punkt, den A n g r i f f s - p u n k t der Einzelkraft; sie sollen deshalb T r a n s l a t i o n s - k r ä f t e genannt werden. In ganz entsprechender Weise läßt sich nun der Translation, hier im nichteuklidischen Falle ebenso mit wohlbestimmter Achse, die Dreh- oder R o t a t i o n s k r a f t als koordinierter Begriff gegenüberstellen. Letztere tritt an Stelle des der euklidischen Translation zugeordneten Drehmomentes. Eine Rotationskraft wirkt im Gegensatz dazu nunmehr um eine wohlbestimmte Achse auf eine Ebene derselben, die A n g r i f f s e b e n e der Rotationskraft.

> "Eine Drehkraft steht einer Translationskraft dann ebenso dualistisch gegenüber, wie eine Rotation einer Translation, und entsprechend gilt der Satz: E i n e u m e i n e A c h s e w i r k e n d e R o t a t i o n s k r a f t i s t i d e n - t i s c h m i t e i n e r n a c h d e r a b s o l u t e n P o l a r e d i e s e r A c h s e w i r k e n d e n T r a n s l a t i o n s k r a f t " (1874, 118) und umgekehrt.

Daraus folgt, dass die Zusammensetzung beider Arten von Kräften genau denselben Gesetzen gehorchen; man kann den Grundsatz nunmehr folgendermaßen verallgemeinern:

G r u n d s a t z "Rotations- und Translationskräfte setzen sich zusammen wie unendlich kleine Translationen bzw. Rotationen." (1874, 118)

Verfolgt man die Analogie von unendlich kleinen Bewegungen und Kräften weiter, so wird man ohne weiteres dazu geführt, als die K o o r d i - n a t e n e i n e r K r a f t die absoluten Werte der Koordinaten der dazugehörigen Achse zu definieren. Die I n t e n s i t ä t oder das Maß e i n e r R o t a t i o n s k r a f t R (vgl. Abs. 3.4.3), gegeben durch die Achsenkoordinaten R_{ik} , wird dann (1874, 129)

$$|R| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\phi(R,R)}{\det(a_{ik})}},$$

und die I n t e n s i t ä t e i n e r T r a n s l a t i o n s k r a f t T , gegeben durch die Strahlenkoordinaten t_{ik} , wird

$$|T| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\phi(t,t)}{\det(a_{ik})}}.$$

3.5.3 Zusammensetzung von Kräften

Gemäß dem vorhergehenden Abschnitt lassen sich Kräfte durch ihre Koordinaten definieren, es gilt also der

S a t z "Kräfte setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren". (1874, 120)

Natürlich darf man dabei nur gleichartige Kräfte (d.h. nur Rotations- oder Translationskräfte) miteinander kombinieren.

> "Sind die ... Axen der Kräfte beliebig im Raume vertheilt, so können wir, indem wir eine Rotationskraft durch eine Translationskraft nach der absoluten Polare ihrer Axe ersetzen, alles auf Translationskräfte allein zurückführen und die Addition ihrer Coordinaten ergibt dann 6 Größen , welche wir als C o o r d i n a t e n d e s K r a f t s y s t e m s bezeichnen wollen, und die wir als Coordinaten eines linearen Complexes auffassen können. Das Kraftsystem ist dann äquivalent mit zwei Translationskräften [=Translationskraftkreuz], welche nach zwei in Bezug auf den Complex conjugirten Geraden wirken." (1874, 121)

Lindemann nannte diesen linearen Komplex den d e m K r a f t s y s t e m z u g e o r d n e t e n T r a n s l a t i o n s k o m p l e x. In derselben Weise lassen sich natürlich alle Kräfte mit Hilfe von Rotationskräften darstellen und man kommt so zum Begriff des d e m K r a f t - s y s t e m z u g e o r d n e t e n R o t a t i o n s k o m p l e x e s. Diese beiden linearen Komplexe sind zueinander bezüglich der Fundamentalfläche polar. Im euklidischen Falle existiert nur der Translationskomplex. Sind die Komplexe speziell, so ist das Kraftsystem durch eine Einzelkraft ersetzbar.

Die I n t e n s i t ä t eines Kraftsystems ist formal gleich erklärt wie diejenige einer Einzelkraft (Abs. 3.5.2).

3.5.4 Zusammensetzung von Kraftsystemen

Die Koordinaten eines Kraftsystems sind durch Addition der Koordinaten von Einzelkräften definiert. Deshalb gilt der

S a t z "Kraftsysteme setzen sich zusammen, indem sich ihre Coordinaten addiren." (1874, 121)

Addiert man die Koordinaten zweier Kraftsysteme bzw. der ihnen zugehöri-

Tabelle 1 : Grundbegriffe der nichteuklidischen geometrischen Kinematik und Statik

	Kinematisch	Geometrisch	Statisch
Rotatorisch	Rotation Koordinaten = absolute Koordinaten der Achse Zusammensetzung = Addition der Koordinaten	Spezieller linearer Komplex Koordinaten = relative Koordinaten der Achse	Rotationskraft (Angriffsebene) Koordinaten = absolute Koordinaten Zusammensetzung = Addition der Koordinaten
	Rotationssystem Koordinaten = absolute Koordinaten des linearen Komplexes Zusammensetzung = Addition der Koordinaten	Linearer Komplex (Rotationskomplex) Koordinaten = relative Koordinaten	Rotationskraftsystem Koordinaten = absolute Koordinaten des linearen Komplexes Zusammensetzung = Addition der Koordinaten
	Zwei erzeugende Rotationen	Konjugierte Geraden	Rotationskraftkreuz
	Rotationssystem als Raumelement ∞^6 Rotationssysteme	Linearer Komplex als Raumelement ∞^5 lineare Komplexe	Rotationskraftsystem als Raumelement ∞^6 Rotationskraft - systeme
Dual im P^3		Analogie	
Translatorisch	Translation Koordinaten = absolute Koordinaten des Strahls Zusammensetzung = Addition der Koordinaten	Spezieller linearer Komplex Koordinaten = relative Koordinaten des Strahls	Translationskraft (Angriffspunkt) Koordinaten = absolute Koordinaten des Strahl Zusammensetzung = Addition der Koordinaten
	Translationssystem Koordinaten = absolute Koordinaten des linearen Zusammensetzung = Addition der Koordinaten	Linearer Komplex (Translationskomplex) Koordinaten = relative Koordinaten	Translationskraftsystem Koordinaten = absolute Koordinaten des linearen Komplexes Zusammensetzung = Addition der Koordinaten
	Zwei erzeugende Translationen	Konjugierte Geraden	Translationskraft-kreuz
	Translationssystem als Raumelement ∞^6 Translationssysteme	Linearer Komplex als Raumelement ∞^5 lineare Komplexe	Translationskraftsystem als Raumelement ∞^6 Rotationskraft-systeme

gen linearen Komplexe, so erhält man ein drittes Kraftsystem, dessen zugehöriger linearer Komplex im durch die beiden ersten Komplexe bestimmten Büschel liegt. Dieses Komplexbüschel ist vollständig durch den geometrischen Ort der Hauptachsen seiner Komplexe bestimmt. Im euklidischen Fall ist dies eine Regelfläche dritten Grades, das sogenannte Zylindroid (vgl. Abs. IV 4.4), und im nichteuklidischen Fall eine Regelfläche vierten Grades (1874, 135f).

Diese Fläche vierten Grades hat eine ähnliche Bedeutung wie das Zylindroid: Für zwei beliebige lineare Komplexe (Kraftsysteme) des entsprechenden Büschels gehören die Hauptachsen des "resultierenden" Komplexes (Kraftsystems) ebenfalls zu dieser Fläche.

3.5.5 Zusammenfassung: Tabelle der gegenseitigen Beziehungen von unendlich kleinen Bewegungen und Kräften

Aufgrund des nichtausgearteten Charakters der allgemeinen projektiven Maßbestimmung kommt das Dualitätsprinzip im nichteuklidischen Raum in allen Einzelheiten zur Erscheinung. Man erhält dadurch eine vollkommene Symmetrie zwischen den rotatorischen und den translatorischen Begriffen (vgl. Tabelle 1).

Wegen der postulierten Analogie zwischen den Gesetzen der Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen und Kräfte stellt sich neben jeden rein geometrischen Begriff (in der Mitte der Tabelle 1) sowohl ein kinematischer wie ein statischer Begriff - und dies sogar in doppelter Weise wegen des D u a l i t ä t s p r i n z i p s i m d r e i d i m e n s i o n a l e n p r o j e k t i v e n R a u m. Letzteres vermittelt zwischen "oben" und "unten" d.h. zwischen "rotatorisch" und "translatorisch", die A n a l o g i e koordiniert die Begriffe übers Kreuz. Es wird sich später zeigen, daß dieser zunächst nur postulierten Koordination der kinematischen und statischen Begriffe eine Polarität im fünfdimensionalen projektiven Raum der linearen Komplexe zugrundeliegt (Abs. 3.7.2).

3.6 Theorie der Momente

3.6.1 Grundsätzliches zum Begriff des Momentes

Bisher wurden die kinematischen und statischen Grundbegriffe nur nebeneinandergestellt und auf ihre auf sich selbst beruhenden Gesetzmäßigkeiten hin untersucht. Als Leitprinzip diente die mehrfach erwähnte Analogie zwischen dem Verhalten der Kräfte und demjenigen der unendlich kleinen Bewegungen. Im vorliegenden Abschnitt sollen die neu gewonnenen Begriffe direkt aufeinander bezogen werden, um so in das eigentlich Mechanische (innerhalb der Statik) vorzustoßen. Dies geschieht mit Hilfe der im Abschnitt 3.4 aufgestellten metrischen Beziehungen, die zu einer Theorie der Momente ausgebaut werden können. Um ein möglichst deutliches Bild der vorliegenden Verhältnisse zu geben, werden alle Sätze in Worten ausformuliert und zugleich in einer bestimmten Struktur angeordnet (Tab.2 u. 3).

Tabelle 2 : Der Momentbegriff in der nichteuklidischen geometrischen Mechanik

	Kinematisch	Geometrisch	Mechanisch	
Rotatorisch	.....	Spezieller linearer Komplex	Rotationskraft (Achse r)	
			Verschiebungsmoment V_R	Drehmoment D_R
			bezüglich eines Strahls a	bezüglich einer Achse a
			=Moment der Achsen a und r mal Intensität der Kraft	=Moment von r mit der absoluten Polaren a' mal Intensität der Kraft =Kosinus der Neigung von a und r mal Intensität der Kraft
	.....	Linearer Komplex	Rotationskraftsystem R	
			Verschiebungsmoment V_R	Drehmoment D_R
			bezüglich eines Strahls a	bezüglich einer Achse a
			=Moment des Kraftsystems R mit a mal Intensität von R =prop. (R,A)	=Kosinus der Neigung von a und R mal Intensität von R
			Nach Definition ist $V_R = V_T$ und $D_R = D_T$	
Translatorisch	.....	Spezieller linearer Komplex	Translationskraft (Strahl r)	
			Verschiebungsmoment V_T	Drehmoment D_T
			bezüglich eines Strahls a	bezüglich einer Achse a
			=Moment von r mit der absoluten Polaren a' mal Intensität der Kraft =Kosinus der Neigung von a und r mal Intensität der Kraft	=Moment von a und r mal Intensität der Kraft
	.....	Linearer Komplex	Translationskraftsystem T	
			Verschiebungsmoment V_T	Drehmoment D_T
			bezüglich eines Strahls a =Kosinus der Neigung von a und T mal Intensität von T	bezüglich einer Achse a =Moment des Kraftsystems T mit a mal Intensität von T = prop. (T,A)

"Als D r e h m o m e n t e i n e r K r a f t i n B e z u g a u f e i n e A x e definieren wir gewöhnlich die Größe, um welche die Kraft den Körper an dem sie angebracht ist, um die Axe, wenn diese festgehalten wird, zu drehen strebt. Vollkommen dualistisch entsprechend müssen wir nun auch ein V e r s c h i e b u n g s m o m e n t e i n e r K r a f t i n B e z u g a u f e i n e n S t r a h l einführen; dies drückt dann die Größe aus, um welche die Kraft den bez. Körper nach dem Strahle zu verschieben strebt, wenn er festgehalten wird. Das Verschiebungsmoment einer Translationskraft in Bezug auf eine Gerade tritt demnach an Stelle der P r o j e c t i o n d e r K r a f t auf diese bei specieller [d.h. euklidischer] Maßbestimmung." (1874, 122)

Anstatt Drehmomente und Verschiebungsmomente für Kräfte zu betrachten, könnte man dasselbe auch für unendlich kleine Bewegungen tun. Dieses wurde aber von Lindemann nicht weiter ausgeführt, da alle auf Kräfte bezüglichen Definitionen und Sätze sich ohne weiteres für unendlich kleine Bewegungen übersetzen lassen. Es war übrigens Möbius in (1838), der die für die euklidische Kinematik gültigen Sätze zuerst formulierte. Die euklidische Theorie der Momente im Linien- und Komplexraum geht auf Battaglini (1869b) zurück (vgl. Abs.IV 6).

3.6.2 Drehmomente und Verschiebungsmomente

Die wichtigsten Definitionen sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

3.6.3 Momente von Kraftsystemen

Die Formulierung des gegenseitigen Momentes zweier Kraftsysteme bedeutet eigentlich, daß man von der Auffassung eines Kraftsystems als Summe oder als Menge von Kräften übergeht zur Auffassung eines Kraftsystems als einheitliches Gebilde, d.h. als Raumelement (Tabelle 3).

Wie Lindemann (1874, 131f.) zeigte, ist das Verschiebungsmoment eines Rotationskraftsystems R bezüglich eines linearen Komplexes A proportional zu

$$(R,A) = R_{12}A_{34}+R_{13}A_{42}+R_{14}A_{23}+R_{34}A_{12}+R_{42}A_{13}+R_{23}A_{14}$$

und das Drehmoment eines Translationskraftsystems T bezüglich A proportional zu (T,A) .

Ist A ein spezieller Komplex, d.h. gilt $(A,A) = 0$, so folgt daraus sofort (wegen $V_R = V_T$ und $D_R = D_T$ - vgl. Tabelle 3):

"Das Drehmoment eines Kraftsystems verschwindet für alle Geraden des zugehörigen Translationscomplexes." (1874, 126)

Denn $(T,A) = 0$ ist die Gleichung des Translationskomplexes.

"Das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems verschwindet für alle Geraden des zugehörigen Rotationscomplexes." (1874,126)

Denn $(R,A) = 0$ ist die Gleichung des Rotationskomplexes.

Tabelle 3 : Der Momentbegriff in der nichteuklidischen geometrischen Mechanik

	Kinematisch	Geometrisch	Mechanisch
Rotatorisch	.....	Linearer Komplex als Raumelement	Rotationskraftsystem R Verschiebungsmoment V_R: bezüglich eines linearen Komplexes A = Moment der beiden Komplexe mal Intensität von R = prop. (R,A) Drehmoment D_R: bezüglich eines linearen Komplexes A = Kosinus der Neigung der beiden Komplexe mal Intensität von R
	.....	(absolute Koordinaten)	(Koordinaten des Rotationskraftsystems = Verschiebungsmomente nach den Kanten des Koordinatentetraeders.) Satz: Verschiebungsmoment von R bezüglich seines eigenen Komplexes = Moment des Komplexes bezüglich sich selbst (Parameter) mal Intensität von R Satz: Drehmoment von R bezüglich seines eigenen Komplexes =Intensität von R
			Nach Definition ist $V_R = V_T$ und $D_R = D_T$
Translatorisch	.....	Linearer Komplex als Raumelement	Translationskraftsystem T Verschiebungsmoment V_T: bezüglich eines linearen Komplexes A = Kosinus der Neigung der beiden Komplexe mal Intensität von T Drehmoment D_T: bezüglich eines linearen Komplexes A = Moment der beiden Komplexe mal Intensität von T = prop. (T,A)
	.....	(absolute Koordinaten)	(Koordinaten des Translationskraftsystems = Drehmomente um die Kanten des Koordinatentetraeders) Satz: Verschiebungsmoment von T bezüglich seines eigenen Komplexes = Intensität von T Satz: Drehmoment von T bezüglich seines eigenen Komplexes = Moment des Komplexes bezüglich sich selbst (Parameter) mal Intensität

Für die euklidische Mechanik hatte zuerst Möbius (1833) auf die Bedeutung des linearen Komplexes (den Komplex der Nullgeraden - vgl. Abs. III 2.1) besonders aufmerksam gemacht.

Ist A ein nicht spezieller linearer Komplex, so ergibt sich als wichtige Verallgemeinerung der obigen Sätze:

Es gibt vierfach unendlich viele lineare Komplexe, bezüglich denen das Drehmoment eines Kraftsystems verschwindet.	Es gibt vierfach unendlich viele lineare Komplexe bezüglich denen das Verschiebungsmoment eines Kraftsystems verschwindet.
Diese Komplexe liegen alle in Involution mit dem Translationskomplex. (1874, 132)	Diese Komplexe liegen alle in Involution mit dem Rotationskomplex. (1874, 132)

3.7 Der Begriff der Arbeit

3.7.1 Grundsätzliches zum Begriff der Arbeit

Mit den gegebenen Definitionen der gegenseitigen Momente von unendlich kleinen Bewegungen und Kraftsystemen ist es nicht mehr schwer, den Begriff der Arbeit eines Kraftsystems bezüglich einer unendlich kleinen Bewegung zu bestimmen. Man kann dies auf verschiedene Weisen tun (Tabelle 4), die natürlich alle miteinander äquivalent sind. (1874, §14)

Sind T_{ik} oder R_{ik} die Koordinaten des einem Kraftsystem zugehörigen Translationskomplexes bzw. Rotationskomplexes und T'_{ik} oder R'_{ik} die Koordinaten des einer unendlich kleinen Bewegung zugeordneten Translationskomplexes bzw. Rotationskomplexes, so zeigt Lindemann (1874, 140), daß die A r b e i t A proportional ist der Größe

$$\sum_{i,k=1}^{6} R_{ik}t'_{ik} = (R,T')$$

oder

$$\sum_{i,k=1}^{6} T_{ik}r'_{ik} = (T,R') \quad .$$

Ist das Kraftsystem im Gleichgewicht, so muß die virtuelle Arbeit verschwinden, d.h. für sämtliche mit dem betrachteten starren Körper verträglichen unendlich kleinen Bewegungen verschwindet die Arbeit A ; also gilt:

$$(R,T') = 0 \quad \text{für alle} \quad T' \quad ,$$

oder

$$(T,R') = 0 \quad \text{für alle} \quad R' \quad .$$

Tabelle 4 : Der Arbeitsbegriff in der nichteuklidischen geometrischen Mechanik

Rotatorisch	Elementararbeit einer Rotationskraft (eines Rotationskraftsystems) bezüglich einer	
	Rotation mit Achse a = Drehmoment der Kraft (des Kraftsystems) um a mal Intensität der Rotation	Translation mit Strahl a = Verschiebungsmoment der Kraft (des Kraftsystems) längs a mal Intensität der Translation
	Arbeit eines Rotationskraftsystems bezüglich eines	
	Rotationssystems R = Drehmoment bezüglich R mal Intensität von R	Translationssystems T = Verschiebungsmoment bezüglich T mal Intensität von T
Translatorisch	Elementararbeit einer Translationskraft (eines Translationskraftsystems) bezüglich einer	
	Rotation mit Achse a = Drehmoment der Kraft (des Kraftsystems) um a mal Intensität der Rotation	Translation mit Strahl a = Verschiebungsmoment der Kraft (des Kraftsystems) längs a mal Intensität der Translation
	Arbeit eines Translationskraftsystems bezüglich eines	
	Rotationssystems R = Drehmoment bezüglich R mal Intensität von R	Translationssystems T = Verschiebungsmoment bezüglich T mal Intensität von T

Dies ist das P r i n z i p d e r v i r t u e l l e n A r b e i t in der nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers in seiner allgemeinsten Formulierung.

3.7.2 Die Analogie zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen als Polarität im Komplexraum

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit gelingt es Lindemann, den krönenden Schlußstein seiner ganzen Betrachtungen zur nichteuklidischen Fassung der kinematischen und statischen Grundbegriffe zu setzen. Wie schon früher von Klein für den euklidischen Fall gezeigt wurde (Abs. V 2.6), läßt sich mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit eine physikalische und geometrische Interpretation der mathematischen Koordination oder Analogie, die zwischen Kräften und unendlich kleinen Bewegungen waltet, gewinnen. Auf diese Tatsache hatte Klein (1871b) mit besonderem Nachdruck hingewiesen. Man sieht diese nun in verallgemeinerter Form wieder in der nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers hervortreten. Bedeutet doch das Verschwinden der Ausdrücke (R,T') und (T,R') nichts anderes, als daß die entsprechenden linearen Komplexe i n I n v o l u t i o n liegen. Es gilt also der fundamentale

S a t z Für ein gegebenes Kraftsystem gibt es fünffach unendlich viele (∞^5) infinitesimale Bewegungen, bezüglich denen es keine Arbeit leistet und umgekehrt. -

Einem Kraftsystem sind diejenigen vierfach unendlich vielen (∞^4) linearen Komplexe als Translationskomplexe der Bewegung zugeordnet, welche mit dem Rotationskomplex des gegebenen Kraftsystems in Involution liegen; und als Rotationskomplexe der Bewegung diejenigen vierfach unendlich vielen (∞^4) linearen Komplexe, welche mit dem Translationskomplex des Kraftsystems in Involution liegen. (1874, 141)

Die Gleichung $(R,T') = 0$ bzw. $(T,R') = 0$, d.h. die Involutionsbeziehung, induziert eine Polaritätsbeziehung im Raum der linearen Komplexe, der die aus speziellen linearen Komplexen bestehende Fläche zweiten Grades $(R,R) = (T,T) = 0$ im Komplexraum zugrunde liegt. Durch diese Verhältnisse ist die Analogie zwischen unendlich kleinen Bewegungen und Kraftsystemen als eine polare Relation im Raum der linearen Komplexe gekennzeichnet. Es stehen sich aber jetzt nicht nur die Rotation oder Rotationssysteme und die Translationskräfte bzw. Translationskraftsysteme polar gegenüber, sondern auch die Translationen oder Translationssysteme und die Rotationskräfte bzw. Rotationskraftsysteme (vgl. Tab.1, Abs. 3.5.5).

Ausgedrückt in Koordinatenbeziehungen im Komplexraum lautet obiger

S a t z Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten eines Kraftsystems wird eine unendlich kleine Bewegung dargestellt.
Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten einer unendlich kleinen Bewegung wird ein Kraftsystem dargestellt.
Dabei stehen sich jedesmal Rotations- und Translationskoordinaten (d.h. auf Rotations- bzw. Translationskomplexe bezügliche Koordinaten) gegenüber. (1874, 141)

Bei euklidischer, d.h. spezieller Maßbestimmung existieren, wenn man von Kräftepaaren und Translationen absieht, nur noch die Translationskoordinaten der Kräfte und die Rotationskoordinaten der infinitesimalen Bewegung.

Was hier T r a n s l a t i o n s - o d e r R o t a t i o n s k o o r d i n a t e n genannt wird, hängt mit der jeweils verschiedenen Darstellung zusammen, in der man ein Kraftsystem bzw. ein Bewegungssystem auffassen kann: als Translations- oder als Rotationskomplex.

Aufgrund der durch das Prinzip der virtuellen Arbeit, d.h. geometrisch durch die Involutionsbeziehung im Komplexraum, vermittelten Polarität, die in den beiden obigen Sätzen ausformuliert wurde, ist es wieder notwendig (wie in entsprechender Weise im euklidischen Fall - vgl. Abs. V 2.3 und 2.6), z. B. die Koordinaten des Translationskomplexes als Hyperebenenkoordinaten im Komplexraum zu interpretieren. Die Involutionsbeziehung zwischen einem Rotationskomplex (Translationskomplex) und einem Translationskomplex (Rotationskomplex) bedeutet dann, daß der Rotationskomplex mit der durch den Translationskomplex repräsentierten Hyperebene inzident ist. Auf diese Weise erhält man auch in den Koordinaten-Beziehungen eine vollkommene, durch die Polarität gegebene Symmetrie. In dieser ist dann wieder der tiefere Grund der mehrfach genannten Analogie zu suchen: zueinander polare Gebilde gehorchen den gleichen formalen Gesetzmäßigkeiten.

Neben die Dualität im gewöhnlichen dreidimensionalen projektiven Raum, die durch die Darstellung von Liniengebilden in Strahlen- oder Achsenkoordinaten zum Ausdruck kommt, stellt sich nunmehr die Polarität im fünfdimensionalen projektiven Raum der linearen Komplexe, dargestellt durch die Rotationskoordinaten (=Komplexkoordinaten) und die Translationskoordinaten (=Hyperebenenkoordinaten). Wie man aus der Tabelle 1 (Abs. 3.5.5) sieht, sind diese beiden Polaritäten innig miteinander verwoben und verschränkt. Und dies ist ein wesentlicher Aspekt der ganzen Sache:

In der nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers ordnen sich die Grundbegriffe der Kinematik und Statik gemäß der Dualität im gewöhnlichen dreidimensionalen projektiven Raum und der durch die Involutionsbeziehung im Komplexraum vermittelten Polarität (Tab. 1). K i n e m a t i k

und Statik erweisen sich dadurch als in einem doppelten Sinne dual oder polar zueinander.

Wie man weiter unten sehen wird (Abs. VII 1.3), lassen sich diese Polaritätsbeziehungen in einem bestimmten Sinne auf die Dynamik des starren Körpers ausdehnen. Auf diese Frage geht Lindemann aber nicht mehr ein. Sie gehörte nicht mehr zu dem von Klein gestellten Problemkreis: die projektiven Verallgemeinerungen der Grundbegriffe der Statik und Kinematik des starren Körpers zu untersuchen.

3.8 Zusammenfassende Würdigung Lindemanns

3.8.1 Über die Bedeutung der nichteuklidischen Fassung mechanischer Grundbegriffe

Die Entdeckung der Einbettung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie in die projektive Geometrie mit Hilfe der projektiven Maßbestimmung durch Cayley und Klein erlaubte es, die euklidische Geometrie unter einem ganz neuen Lichte zu betrachten. Man erkannte, daß der euklidischen Geometrie ein Fundamentalgebilde zugrunde liegt, das einen wesentlich undualistischen, ausgearteten Charakter hat.

> "Um vom projectivischen Standpunkte aus auch die metrischen [d.h. euklidischen] Eigenschaften der räumlichen Figuren aufzufassen, bedient man sich bekanntlich nach Chasles eines imaginären Kegelschnitts [imaginärer Kugelkreis], der als absolut fest und in der unendlich fernen Ebene gelegen gedacht wird. Es ist dadurch der undualistische Charakter unserer Maßbestimmung gekennzeichnet, indem die unendlich fernen Punkte eine Ebene bilden, während die unendlich fernen (und hier imaginären) Ebenen einen Kegelschnitt umhüllen. Man kann nun eine allgemeine Maßbestimmung aufstellen, bei der die Dualität in jeder Weise gewahrt wird, und als deren Ausartung die thatsächlich gegebene dann erscheint, wenn man nach Cayley eine allgemeine Fläche zweiten Grades statt des imaginären Kegelschnittes zu Grunde legt." (Lindemann 1873, 122)

Es gehörte zu den tieferen Überzeugungen Kleins und seines Schülers Lindemann, daß vom Standpunkt der projektiven Geometrie aus die speziellen Verhältnisse der euklidischen Geometrie und Mechanik viel besser verstanden und gewürdigt werden können. Und die nähere Untersuchung der Mechanik in diesem Zusammenhange hat ihnen Recht gegeben.

Neben diesem allgemeinen Gesichtspunkt sollen vier Momente herausgehoben werden, die an Lindemanns Arbeit (1874) in systematischem und historischem Sinne von besonderer Bedeutung sind.

1. Lindemann untersuchte zum ersten Mal systematisch die Beziehungen der nichteuklidischen Geometrie

zur Liniengeometrie. Seine Dissertation konnte als wichtiger Beitrag zur Weiterentwicklung der nichteuklidischen Geometrie im Sinne von Felix Klein gelten; ihr frühes Erscheinen[24] im 7. Band der "Mathematischen Annalen" im Jahre 1874 trug zu ihrer raschen Verbreitung bei und ließ sie zu einer damals im Rahmen des Fachgebietes der projektiven und nichteuklidischen Geometrie vielzitierten Arbeit werden (vgl. dazu Kap. VII).

2. Die Dissertation Lindemanns trug wesentlich zur Bewährung und Bereicherung der Methoden der projektiven und nichteuklidischen Geometrie an einem etablierten Gegenstande der mathematischen Physik, der Mechanik des starren Körpers, bei. Es handelte sich bei Lindemann (1874) um den ersten Versuch, kinematische und statische Grundbegriffe außerhalb des euklidischen Anschauungsraumes in allen Einzelheiten und Konsequenzen durchzudenken. Lindemanns Arbeit war zudem ein wichtiger Beitrag zur Weiterentwicklung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie im Rahmen der projektiven Geometrie überhaupt (vgl. dazu Abs. 3.8.2 und insbesondere Kap. VII). Lindemann gehörte damit in die erste Reihe derjenigen Mathematiker, die sich um die Loslösung der Raumvorstellungen und physikalischen Begriffsbildungen von den Fesseln des euklidischen Anschauungsraumes bemühten (vgl. Abs. 2.3). Wie schon im Abschnitt 3.1 bemerkt wurde, ging es Lindemann in keiner Weise darum, seine Untersuchungen als relevant für die Wirklichkeit zu betrachten. Es gebührt ihm aber das Verdienst, in präziser und durchschaubarer Weise physikalische Begriffe gebildet zu haben, die der Möglichkeit nach wirklich sind.- Da sich durch Experimente auf der Erde nicht feststellen läßt, ob der Raum, der der Physik zugrunde liegt, euklidisch oder nichteuklidisch ist, ist über die Anwendbarkeit dieser Begriffe, insbesondere des erweiterten Kraftbegriffes, noch nicht das letzte Wort gesprochen.

3. Im Anschluß an Klein zog Lindemann konsequent mehr als dreidimensionale Räume in seine Betrachtungen mit ein. Auch hier muß er zu den ersten gezählt werden, die dies im Zusammenhang mit der Mechanik des starren Körpers durchführten. - Untersuchungen zu mechanischen Problemen in n-dimensionalen Räumen begannen etwa zur selben Zeit.[25]

4. Unter dem Einfluß Kleins stehend, gab Lindemann in seiner Dissertation ein Musterbeispiel für die fruchtbare gegenseitige Ergänzung der synthetischen und der algebraisch-analytischen Methode. Lindemann verwendete beide Methoden, je nach dem er mehr die geometrischen oder mehr die metrisch-analytischen Verhältnisse untersuchte.

Auf Lindemanns enges Verhältnis zu Felix Klein wurde schon im Abschnitt 3.1 hingewiesen. Auf der anderen Seite war er Schüler von Alfred Clebsch gewesen und hatte dessen elegante algebraische Methoden genau kennengelernt. Daß Lindemann sowohl ein ausgezeichneter Geometer wie ein hervorragender Algebraiker war, läßt sich leicht durch seine beiden späteren Hauptleistungen belegen: die Herausgabe der "Vorlesungen über Geometrie" (1876/91) von Clebsch (vgl. dazu Abs. 3.8.2), sowie seinen Beweis der Transzendenz von π im Jahre (1882).

Lindemann stand in der Zeit der Abfassung seiner Dissertation (1874) ganz im methodischen Schatten Kleins[26], der schon damals als junger Mann eine starke Ausstrahlung gehabt haben mußte. Diese Tatsache wird unterstützt durch die enge stilistische Verwandtschaft des Lindemannschen Textes mit demjenigen von Klein, die sich bis hinein in die Notation verfolgen läßt.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß Lindemann durch seine Ausbildung sowie seine breiten methodischen Fähigkeiten in hohem Maße dazu ausersehen war, der nichteuklidischen geometrischen Mechanik des starren Körpers entscheidende Entwicklungsimpulse zu geben. Die algebraisch-analytisch wie geometrisch anspruchsvolle Natur der geometrischen Mechanik erforderte durchaus eine umfassende Behandlungsweise, ohne welche eine Förderung im Grundsätzlichen nicht denkbar gewesen wäre (darauf haben wir schon früher hingewiesen, vgl. Abs. IV 4.5).

3.8.2 Lindemanns weiterer Werdegang

Die unter der Aufsicht Kleins angefertigte Dissertation Lindemanns spielte für den weiteren Verlauf seiner mathematischen Karriere eine entscheidende Rolle. Es wurde bereits darauf hingewiesen (Abs. 3.1), daß durch den Tod von A. Clebsch im November 1872 für Klein in Erlangen eine völlig neue Situation entstand: er mußte dessen Schüler übernehmen und für die Bearbeitung seines Nachlaßes sorgen. So wurde Lindemann damit beauftragt, die Vorlesungen von Clesch über Geometrie herauszugeben, eine Aufgabe, der er sich sofort nach der Fertigstellung der Dissertation zuwandte.

Schon (1876) konnte der umfangreiche erste Band der "Vorlesung über Geometrie von Alfred Clebsch. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann" erscheinen. Klein schrieb darin in der Vorrede:

> "Man wird Herrn Dr. Lindemann hohen Dank wissen, daß er diese umfangreiche und schwierige Aufgabe mit ebensoviel Hingebung als Verständnis in Angriff genommen hat. Es ist das Werk dadurch, zumal in den späteren Partien, namentlich auch s e i n e i g e n geworden, verschiedene Abschnitte mußten von ihm, auf Grund der Originalarbeiten, überhaupt erst entworfen werden." (Lindemann 1876, III)

A.Voss (1845-1930), ein bekannter Geometer der Jahrhundertwende, sagte 1923 in der Feier zum 70.Geburtstag von Lindemann dazu folgendes:

> "Ich staune, so oft ich in dasselbe hineinsehe, noch jedesmal über die Tiefe und Weite des Blickes, mit dem Sie alles zu einem harmonischen Ganzen zu verschmelzen wußten... Seit fast 50 Jahren ist Ihr Werk noch von der gleichen Bedeutung für jeden Geometer geblieben, dem keine Nation eines von ähnlicher umfassender Bedeutung an die Seite stellen kann." ((Lindemann] 1923, 25))

Der "Clebsch-Lindemann" wurde Ende des 19.Jh. zu einem Standard-Lehrbuch der Geometrie. Insbesondere der zweite Teil, der (1891) erschien, enthielt eine umfassende Einführung in die höhere projektive, sowie die nichteuklidische Geometrie. Es war eine der ersten systematischen Darstellungen der nichteuklidischen Geometrie im Sinne des Erlanger Programms (1872b) von Felix Klein. So bemerkte dieser (1890, 353) dazu:

> "Indem ich die neuere Literatur des Gegenstandes verglich, bemerkte ich, daß die fundamentalen Auffassungen, von denen ich damals ausging, immer nur erst teilweises Verständnis gefunden haben... Mittlerweile erfahre ich, daß eine zusammenhängende Darstellung der Theorie, von einem Standpunkte aus, der von dem meinigen jedenfalls nicht sehr verschieden ist, demnächst von Herrn Lindemann ... publiziert werden wird."

Auch in diesem zweiten Band des "Clebsch-Lindemann" stammt sehr vieles von Lindemann selbst. Vor allem zu erwähnen sind die ausführlichen Untersuchungen zu den endlichen und infinitesimalen linearen Transformationen, den Kollineationen und Korrelationen, einer Fläche zweiten Grades, sowie eines linearen Komplexes in sich. Hier sind manche Ergebnisse der Dissertation (1874) in einem weiteren Rahmen ausgeführt und neu entwickelt.

1877 wurde Lindemann an die Universität Freiburg i.Br. berufen. Dort gelang ihm (1882) der berühmt gewordene Beweis der Transzendenz von π . Heute ist Lindemanns Name fast nur noch in diesem Zusammenhange bekannt, was sogar bereits Anfang dieses Jahrhunderts der Fall gewesen zu sein scheint. Bemerkte Lindemann doch in seinem Dankschreiben für die Feier des 70.Geburtstages 1923:

> "Ganz besonders hat es mich gefreut, daß sie nicht nur meine Arbeit über erwähnten, sondern so warme Worte für die Geometrie gefunden haben, und für die Clebschsche Schule, d.h. für Gebiete, die heute nur zu sehr von den mathematischen Forschern vernachlässigt werden." ((Lindemann] 1923, 30))

Dieser Vernachlässigung des geometrischen Lebenswerkes von Lindemann, wie der Geometrie überhaupt, etwas entgegenzusetzen, war ein zentrales Motiv der vorliegenden historisch-systematischen Untersuchung. L i n d e m a n n a l s G e o m e t e r die ihm zukommende Würdigung zu erteilen, erscheint umso gerechtfertigter, als auch ein bekannter Algebraiker der jüngeren Zeit, O. Perron (1880-1975), deutlich auf dessen umfassende geometrische Fähigkeiten hingewiesen hatte. Sein diesbezüglicher Erlebnisbericht schließe die Betrachtungen über Lindemann:

> "Wir Schüler schätzen es als hohes Glück, daß wir in diesen Tagen leben und von einem solchen Meister lernen durften... Staunen mußten wir oft über Ihre wunderbare Vielseitigkeit, über die Fülle des Gebotenen und über die plötzlich enthüllten Zusammenhänge von scheinbar ganz heterogenen Dingen. Da konnte in einer rein analytischen Vorlesung auf einmal auch von Linienkomplexen und von der nichteuklidischen Geometrie die Rede sein, und gerade, wenn solche Dinge drankamen, sprudelte es wie ein Wasserfall heraus ..., so daß

mir ein Kommilitone einmal sagte: 'Der Lindemann denkt ja in einer Minute mehr Geometrie, als ich im ganzen Semester begreifen kann.'"(([Lindemann] 1923, 27))

Kapitel VII

Zur Wirkungsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie und der geometrischen Mechanik

Originalarbeiten zur nichteuklidischen Mechanik des starren Körpers sind zuverlässige Indikatoren zur Wirkungsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie.[1] Denn die Betrachtung der Mechanik des starren Körpers unter nichteuklidischen Gesichtspunkten setzt natürlicherweise die Begriffe und die Methoden der nichteuklidischen Geometrie voraus. Wie sich zeigen wird, waren es oft sogar dieselben Mathematiker, die die in Deutschland durch Riemann, Helmholtz und Klein neu in die moderne Forschung eingebrachte nichteuklidische Geometrie aufgegriffen, für deren Verbreitung gesorgt, sowie sich mit der geometrischen Mechanik auseinandergesetzt haben.

Wie die folgenden Ausführungen deutlich machen werden, bedingen sich diese beiden Interessengebiete sogar weitgehend. Dem liegt unter anderem das Bedürfnis nach einer Bewährung der Methoden der nichteuklidischen Geometrie an einem klassischen Gegenstand der Mathematik, eben der Mechanik, zugrunde, sowie die Hoffnung auf ein klareres Verständnis der euklidischen Grundbegriffe der Mechanik vom erhöhten Standpunkt der projektiven Geometrie aus.

1 Zur Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in England

1.1 Zum Charakter der Mathematik in England um die Mitte des 19.Jh.

Die Entstehung einer aktiven britischen mathematischen Schule am Anfang des 19.Jh. ist vor allem an J.F.W. Herschel (1792-1871), Ch. Babbage (1792-1871) und G. Peacock (1791-1858) geknüpft, die sich die "continental ideas" aneigneten und in England verbreiteten. Die nachfolgende Reform, aus der insbesondere die für England typische abstrakte Algebra und der Operations-Kalkül hervorging, geht auf Peacock, D.F. Gregory (1813-1844), A. DeMorgan (1806-1871), G.Boole (1815-1864) und W.R. Hamilton (1805-1865) zurück.[2] Auf dem dadurch geschaffenen Hintergrund sind die Arbeiten von A.Cayley (1821-1895) und Sylvester (1814-1897) zur Algebra und Invariantentheorie zu verstehen. Mit der Blüte dieser Schule verlor sich auch die Isolation der englischen Mathematiker vom Kontinent. Einerseits drang nun die projektive Geometrie, ihrer praktischen Verwendbarkeit wegen, von Frankreich und Deutschland nach England, andererseits reisten vermehrt europäische Mathematiker, wie etwa Plücker[3] und später Klein (vgl. Abs. 1.2.1), nach England, um von den dortigen Fortschritten in der Algebra zu lernen.

Cayley schuf in seinem Memoir (1859) den allgemeinen Rahmen, in welchen

fast alle der folgenden Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie in England mehr oder weniger eingebettet wurden. Dadurch erhielt die projektive Geometrie, vermittels der Autorität Cayleys, von vorneherein eine besondere Stellung in den Forschungen englischer Mathematiker zur nichteuklidischen Geometrie. Man findet in England Ende des 19.Jh. kaum Arbeiten zu axiomatischen oder differentialgeometrischen Aspekten der nichteuklidischen Geometrie.

Wie sich herausstellen wird, untersuchten die Engländer vor allen die algebraische Struktur der nichteuklidischen Geometrie und schufen zu diesem Zwecke oft eigene Kalküle. Wie Richards ((1980)) hervorhebt, ging es der englischen algebraischen Schule aber keineswegs um die Formulierung einer abstrakten, von jeglichem Inhalt losgelösten Algebra, sondern vielmehr um die klare und formal einwandfreie Analyse der Wirklichkeit. Auf diesem Hintergrund wird verständlich, wie das neue Objekt der nichteuklidischen Geometrie für die englischen Mathematiker eine Herausforderung ersten Ranges bedeutete.[4] W.K. Clifford (1845-1879) war einer der ersten, der sich ihr in voller Intensität stellt. Außer Richards ((1979)) hat sich m.E. niemand ausführlicher mit dieser Tatsache auseinandergesetzt. Dort liegt allerdings der Schwerpunkt der Analyse mehr auf der philosophischen Ebene, während Clifford als Mathematiker kaum gewürdigt wird. Dies soll hier zum Teil nachgeholt werden, insbesondere was seine Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie und Mechanik angeht, die speziell in England für die weitere Entwicklung wegweisend gewesen sind.

In Cambridge, dem mathematischen Zentrum im England des 19.Jh., nahm traditionell die anwendungsorientierte, auch heuristische und intuitive Methoden verwendende Mathematik eine wichtige Rolle ein. Physik, Geometrie und Analysis ("Calculus") wurden nicht als getrennte, sondern sich gegenseitig bedingende und befruchtende Gebiete behandelt.[5] Diese Atmosphäre war entscheidend für die Vermählung von nichteuklidischer Geometrie und Mechanik des starren Körpers.

1.2 William Kingdon Clifford und die Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in England

1.2.1 Clifford als Wegbereiter der nichteuklidischen Geometrie in England

Kurz nach dem Erscheinen des bedeutenden Habilitationsvortrages von Riemann (1867), begann sich W.K. Clifford (1845-1879)[6] intensiv mit den dadurch angeschnittenen philosophischen und mathematischen Themen zu beschäftigen. Die Diskussion der philosophischen Implikationen der nichteuklidischen Geometrie nahm in Cliffords Schriften und Vorträgen einen

breiten Raum ein. Seine vielbeachteten Vorträge und Schriften[7] wurden in England für eine größere wissenschaftliche Öffentlichkeit zum Wegbereiter der neuen Ideen zur Struktur des Raumes. Clifford spielte in diesem Sinne für England eine ähnliche entscheidende Rolle wie Helmholtz für Deutschland.[8]

Clifford gehörte zu den ersten Mathematikern, welche die Bedeutung von Riemanns Habilitationsvortrag "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" (1867) klar erkannten. Er fertigte eine Übersetzung (1873c) an, die in der Zeitschrift "Nature" erschien. An diese Ideen anschließend, formulierte er (1870), (1885, 214-226) eigene Gedanken zur Struktur des physikalischen Raumes, die, über Riemann hinausgehend, in einige Nähe zur Einsteinschen Auffassung zum Verhältnis von Physik und Geometrie kamen.[9]

Clifford kämpfte für die damals noch keineswegs selbstverständliche Einsicht, daß der Raum keine vorgeprägte Form unserer Anschauung sein könne (1872),(1873a). Durch die Denkmöglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie konnte die Frage nach der Struktur des Raumes keine rein philosophische mehr sein, sondern wurde nach Clifford nun vor allen zu einer experimentellen. Das Kapitel "Space" in "The Common Sense of the Exact Sciences" (1885, 47ff.) begann folgerichtig mit dem Satz: "Geometry is a physical science." Die durch diese neue Denkweise eingeleitete Revolution im naturwissenschaftlichen Bewußtsein verglich Clifford (1873a, 356f.) selbst mit der kopernikanischen Wende.

Stand Clifford bei der Verbreitung und Verteidigung der Gedanken eines experimentell zu verifizierenden nichteuklidischen Raumes vor einer größeren Öffentlichkeit an vorderster Front, so gelangen ihm außerdem einflußreiche mathematische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie als solcher.[10]

Newmann schrieb ⟪1953, 78⟫ zusammenfassend über ihn:

> "He was not only one of the great mathematicians of his century but an original philosopher and a leader of British intellectual life in the Victorian age. Much of Cliffords thinking was ahead of his time. His mathematical work was prophetic, and its merit is still untouched after three quarters of a century of immense progress in mathematics."

Bevor in den nächsten beiden Abschnitten die für das Gebiet der geometrischen Mechanik bedeutungsvollsten mathematischen Arbeiten von Clifford dem Inhalt nach diskutiert werden, soll hier noch auf den allgemein-methodischen Charakter seiner mathematischen Schriften, sowie auf seine Eigenart als Mathematiker hingewiesen werden. Zugrundegelegt wird dabei der ausgezeichnete Essay, den Smith ⟪1882⟫ den "Mathematical Papers" von Clifford vorangestellt hatte.

Die Wertschätzung, die der 1879 früh verstorbene Clifford als Mathematiker genoß, kam wohl am besten dadurch zum Ausdruck, daß bereits kurz nach seinem Tode 1879 seine "Mathematical Papers" ⟪1882⟫ erschienen sind. Dies war zur damaligen Zeit noch keineswegs selbstverständlich, wie die ausführliche Rechtfertigung Smiths am Anfang seines Essays ⟪1882, XXXIIIf.⟫ zeigt.

Durch Clifford kam für kurze Zeit in England die Geometrie zu einer neuen Blüte, die vor allem auf seine Unterrichtstätigkeit zurückzuführen war.

> "Clifford was above all and before all a geometer." ⟪Smith 1882, XXXVII⟫

> "As a mathematician ... Clifford may be regarded as marking an epoch in the history of this science in England. He was among the first by his writings to raise a protest against the analytic bias of the Cambridge school." ⟪Stephen 1887, 540⟫

> "As a mathematical teacher Clifford did much (and his influence is still working) to revolutionise the teaching of elementary mathematics; he introduced into England the graphical and geometrical methods of Möbius, Culmann, and other Germans." ⟪Stephen 1887, 540⟫

Obwohl Clifford eine starke Neigung zur symbolischen Notation hatte, gibt es von ihm kaum Untersuchungen von rein algebraischem oder analytischem Charakter. Fast immer stand bei ihm ein geometrisches Problem im Mittelpunkt, das er allerdings mit brillianter Beherrschung des analytischen Apparates einer Betrachtung unterzog. Daneben beherrschte er ebenfalls souverän die Methoden der synthetischen Geometrie ⟪Smith 1882, XXXVII⟫. Clifford benutzte in der Frühzeit gern beide Methoden nebeneinander:

> "As to the mode of proof, I have freely made use of known results both in Pure Geometry and in Cartesian Coordinates ..." (1865/66, 81)

Später bevorzugte er zur Darstellung seiner Gedanken die Hilfsmittel der analytischen Methode, wenn seine Ausführungen auch immer von seiner geometrischen Intuition und nicht von den Gesetzmäßigkeiten des Formalismus geleitet wurden.

Von besonderer Bedeutung für sein eigenes mathematisches Werk, so wie für das seiner Nachfolger, war Cliffords klare Bevorzugung der elliptischen Geometrie von Riemann vor der hyperbolischen von Bolyai, Lobačevskij und Gauss. Diese Geometrie ist diejenige eines Raumes von konstanter positiver Krümmung und lag sowohl seiner Parallelentheorie (Abs. 1.2.2) wie auch seinem Biquaternionen-Kalkül (Abs. 1.2.3) zugrunde. Warum widmete Clifford fast alle seine Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie ausschließlich dem elliptischen Fall?

> "Upon this supposition of a positive curvature, the whole of geometry is far more complete and interesting; the principle of duality, instead of half breaking down over metric relations, applies to all propositions without exception." (1873a, 387)

Das aufgrund dieser hohen W e r t s c h ä t z u n g d e s P r i n z i p s d e r D u a l i t ä t Cliffords Gedanken zur nichteuklidischen Geometrie und Mechanik äußerst fruchtbar und anregend auf die Entwicklung dieser Gegenstände geworden sind, braucht wohl kaum mehr besonders hervorgehoben werden. Jeder englische Autor, der sich nach Clifford mit nichteuklidischer Geometrie beschäftigte (vgl. Abs. 1.3), wies mit Achtung und Dankbarkeit auf Clifford als klassischen Autor hin. Clifford wurde in England zu d e r Autorität in nichteuklidischer Geometrie schlechthin (neben Cayley natürlich); seine Ausstrahlung wurde durch seine genialen, teilweise nur

skizzenhaften Jugendarbeiten, sowie den frühen Tod in hohem Maße verstärkt und verklärt.

Auf zwei besondere Wesenszüge Cliffords sollte hier aufmerksam gemacht werden:

1. Für Clifford war die geometrische Intuition das treibende Element seiner mathematischen Forschungen. Die souveräne Handhabung der symbolischen Notation machte ihn wie geschaffen zur Synthese der geometrischen und analytisch-algebraischen Methode.

2. Die Wertschätzung des Prinzips der Dualität ließ Clifford zum entscheidenden Anreger für die Erforschung der Mechanik des starren Körpers im elliptischen Raum in England werden.

Clifford und Klein waren sich in ihren geometrischen Intentionen sehr verwandt. Klein traf Clifford zum ersten Mal 1873 bei einer Tagung der "British Association for the Advancement of Science" (BAAS) in Bradford. Clifford trug dort über seine Studien zum elliptischen Raum vor. Klein berichtete darüber folgendes:

> "Ich erkannte natürlich sofort, daß es sich ... bei Clifford um eine wesentliche Weiterführung meiner Ideen über elliptische Maßbestimmung handele. Eingehende persönliche Besprechungen stellten bald die Beziehung völlig klar und haben auf meine späteren Arbeiten einen nachhaltigen Einfluß geübt." ⟪Klein 1921, 241⟫

Klein bemerkte später zu dieser Begegnung:

> "Ich gedenke seiner mit besonderer Freude, als eines Mannes der mich sofort völlig verstanden hat und auch bald über mich hinausging." ⟪1926, 154⟫

Was Clifford damals vorbrachte, war die Entdeckung einer Fläche von konstanter Krümmung Null im elliptischen Raum. Er formulierte seine Ideen aber nicht schriftlich, was Klein etwas später zur Arbeit (1890) veranlaßte, um dort näher auf Cliffords diesbezügliche Forschungen einzugehen, von denen er nur mündlich von ihm erfahren hatte. Daraus entstand dann das von Killing (1885b) so genannte Clifford-Kleinsche Raumproblem.[11]

Wie sehr Klein von Anfang an von den englischen Mathematikern geschätzt wurde, geht aus folgender Gruss-Adresse von H.J.S. Smith (1873, 5), dem Präsidenten der Sektion für Mathematik und Physik der BAAS, bei deren Tagung in Bradford, hervor. Nach einem kurzen Referat zur euklidischen Parallelentheorie und deren Schwierigkeiten fährt er fort:

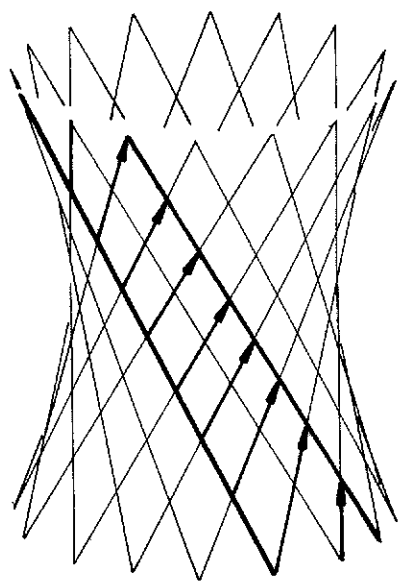
> "Two of those whose labours have thrown much light on this difficult theory are at present at this Meeting - Prof. Cayley, and a distinguished German mathematician, Dr. Felix Klein..."

1.2.2 Die Cliffordschen Schiebungen des elliptischen Raumes

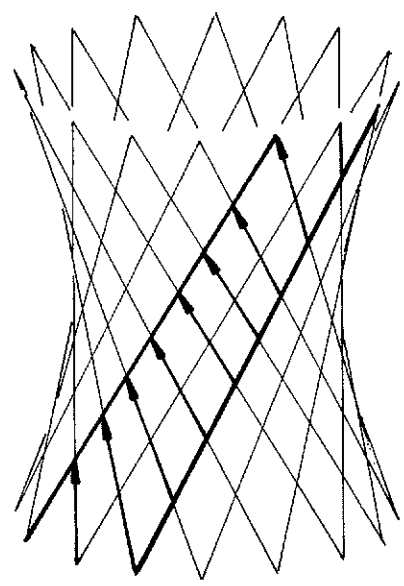
In der grundlegenden Abhandlung (1873b, 192f.) beschrieb Clifford eine besondere Art von Parallelität, die er bei Geraden des elliptischen Raumes entdeckt hatte. Diese Parallelität hängt eng mit einer gewissen Zerlegung der Bewegungen des elliptischen Raumes zusammen, die nun beschrieben werden soll.[12]

Wie im Abschnitt VI 3.2 dargestellt wurde, besitzt jede Bewegung eines nichteuklidischen Raumes zwei reelle Fixgeraden, die sogenannten Hauptachsen der Bewegung. Außerdem gibt es eine invariante Flächenschar, analog den Zylinderflächen bei einer allgemeinen euklidischen Bewegung im Raume. Im elliptischen Fall besteht nun diese Flächenschar aus lauter einschaligen Hyperboloiden und einem hyperbolischen Paraboloid als Übergangsfläche. Man kann sich eine Vorstellung dieser Flächenschar bilden, wenn man sich eine aus der einen Hauptachse hervorquellende Schar von Hyperboloiden denkt, die sich über den Grenzfall des hyperbolischen Paraboloides an die zweite Hauptachse anschmiegen.

Jedes einschalige Hyperboloid trägt zwei Scharen von erzeugenden Geraden. Eine solche Fläche kann nun immer so in sich selbst transformiert werden, daß die eine Schar derselben in sich übergeht, während die andere längs dieser verschoben wird (Fig.1). Man nennt dann eine solche Transformation



Figur 1



Figur 2

eine S c h i e b u n g 1. A r t und die entsprechende Transformation bezüglich der anderen Schar eine S c h i e b u n g 2. A r t (Fig.2). Es kann nun jede Bewegung einer solchen Fläche in sich in eine Schiebung 1. und 2. Art zerlegt werden.[12]

Diese Schiebungen lassen sich auf die gesamte Flächenschar ausdehnen. Greift man die eine Schar eines bestimmten Hyperboloides heraus, so ist diesem vermöge des kontinuierlichen Zusammenhanges der Flächen untereinander eindeutig in jeder Fläche genau eine Schar von Erzeugenden zugeordnet. Eine Schiebung längs e i n e r Schar ist dann dasselbe wie eine Schiebung längs a l l e r dieser Scharen.

Wie man zeigen kann, läßt eine Schiebung ebenfalls eine Schar der (hochimaginären) Erzeugenden der nullteiligen (d.h. imaginären) Fundamentalfläche des elliptischen Raumes invariant (so werden Schiebungen im streng systematischen Sinne überhaupt definiert - vgl. Klein (1928, 111f.)). Daher gibt es zu jeder Schiebung zwei hochimaginäre Fixpunktgeraden, die von jeder bei der Schiebung invariant bleibenden Geraden getroffen werden müssen. Diese Geraden bilden folglich je eine elliptische lineare Kongruenz[13] von Geraden, die bei der entsprechenden Art der Schiebung identisch in sich übergeht. Durch jeden Punkt des Raumes geht dabei genau eine Gerade aus je einer der beiden linearen Kongruenzen.

Sämtliche Schiebungen e i n e r solchen Geradenkongruenz in sich bilden nun eine zur Gruppe der euklidischen Drehungen einer Kugel isomorphe Gruppe, die der Gruppe der Parallelverschiebungen des euklidischen Raumes in einer festen Richtung sehr ähnlich ist. Dieser Zusammenhang steht hinter der Definition der Parallelität von Clifford in (1873b). Man nennt deshalb die Geraden einer solchen linearen Kongruenz "Cliffordsche Parallelen 1. oder 2.Art" und die zugehörigen Schiebungen "Cliffordsche Schiebungen 1. oder 2.Art". Man hat also im elliptischen Raum zwei Arten von Parallelen zu unterscheiden, je nachdem ob sie zu einer linearen Kongruenz gehören, die durch eine Schiebung 1.Art oder 2.Art invariant gelassen wird.

Zusammenfassend läßt sich also sagen: Jede elliptische Bewegung kann in eine Schiebung 1. und 2.Art zerlegt werden, d.h. die Gruppe der elliptischen Bewegungen ist gleich dem direkten Produkt aus zwei Kugel-Drehgruppen des euklidischen Raumes.

Clifford führte seinen Parallelitätsbegriff nicht in der Art und Weise ein, wie das eben dargestellt wurde. Er ging von einer rein synthetischen Definition der Parallelität aus und dann dazu über, die entsprechenden Parallelverschiebungen ("vectors" wie er sie nannte) zu definieren und mit Hilfe von algebraischen Operationen zu beschreiben. Hier trat zum ersten Mal sein B i q u a t e r n i o n e n - K a l k ü l auf. Clifford gab aber weder eine Koordinaten- bzw. Parameterdarstellung der entsprechenden Transformationen, noch wurde der Zusammenhang der Biquaternionen mit den elliptischen Bewegungen genau geklärt (vgl. dazu Abs. 1.2.3). Zudem war

auch die synthetische Erklärung der Parallelität kaum über den Keimzustand hinausgekommen.

Die skizzenhafte Unvollständigkeit der andererseits mit einem genialen Hauch gesegneten Arbeiten Cliffords bedurften der interpretatorischen Auslegung und Ausarbeitung durch andere Geometer. In England gebührt hier das Verdienst vor allem Sir Robert Stawell Ball (1840-1913).

Balls Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie begannen mit der noch ganz im Stile von Cayley und Klein geschriebenen Abhandlung (1879), die in elementarer Behandlungsweise diesen Gegenstand einem breiteren mathematischen Publikum zugänglich machen sollte. Zur besonderen Beachtung stellte er die Titel der Arbeiten Cayley (1859), Klein (1871d), Lindemann (1874) an die Spitze seiner Studie, in der er im wesentlichen synthetisch argumentierte. Auf den letzten Seiten findet man bereits eine kurze Einführung in die Theorie der Cliffordschen Parallelen.- Über sein Bekanntwerden mit der nichteuklidischen Geometrie schrieb er:

> "During the meeting of the British Associatian at Bradford in 1873, I had the privilege of being present for some hours of a conversation between Prof. Klein and Prof. Clifford, in which for the first time I heard of the non-Euclidean Geometry. Cliffords paper[(1873b)]... was discussed inter alia, and the intense interest which I felt in the subject itself, as well as the genius with which I heard it expounded, have impressed the details of that conversation indelibly on my memory." (1879, 537 (Anm.))

In einer größeren Arbeit (1882) unternahm es Ball, die Theorie der Cliffordschen Schiebungen von Grund auf systematisch zu entwickeln. Er berief sich für seine Art der Darstellung wiederum auf Cayley, Klein, Lindemann und natürlich Clifford selbst. Beginnend mit einer synthetischen Diskussion der Cliffordschen Schiebungen, gab er erstmals eine Koordinatendarstellung, die Klein (1890) mit den Quaternionen in Zusammenhang bringen sollte (vgl. Abs. 3.1). Die sich anschließende Behandlung der Statik und Kinematik enthielt nichts wesentlich neues über Lindemann (1874) hinaus, nur daß er sich eben primär der Cliffordschen Schiebungen zur Darstellung der elliptischen Bewegungen bediente.

Zum nichteuklidischen Kraftbegriff erfuhr man wenig konkretes, trotz der allgemeinen Versicherung:

> "In ordinary space we are quite familiar with the perfect identity which subsists between the composition of small rotations and the composition of forces. We shall now learn that what we so well know in ordinary space is but the survival, in an attenuated from, of a much more complete theory in elliptic space." (1882, 176)

Jedenfalls schien Ball von der im elliptischen Raum herrschenden Symmetrie im gleichen Maße wie Clifford fasziniert gewesen zu sein. Dies bezeugt zudem die Arbeit (1884), wo er einige spezielle Sätze seiner Schraubentheorie auf den elliptischen Raum ausdehnte und feststellte, wie die entsprechenden euklidischen Gesetze nur Sonderfälle von jenen "more elegant and symmetrical theorem[s] in elliptic space" (1884, 256) sind.

> "In the study of the so-called 'Non-Euclidean Geometry' I have often felt a difficulty which has, I know, been shared by others. In that Theory it seems as if we try to replace our ordinary notion of distance between two points by the logarithm of a certain anharmonic ratio. But this ratio itself involves the notion of distance measured in the ordinary way. How, then, can we supersede our old notion of distance by the non-Euclidean notion, inasmuch as the very definition of the latter involves the former?" (1889a, 123)

So lauten die ersten Zeilen von Balls die bisherigen Resultate zusammenfassenden Arbeit (1889a). Zur Überwindung der genannten Schwierigkeit - die den englischen Mathematikern besondere Mühe machte[14] - erfand er einen eigenen Kalkül zur systematischen Darstellung der nichteuklidischen Geometrie, dessen Grundbegriffe nicht auf der Voraussetzung der euklidischen Geometrie beruhten. Dabei schloß sich Ball nach eigenem Zeugnis teilweise an H. Grassmann (1809-1877) an, ging dann aber durchaus eigene Wege. Im weiteren verwies er insbesondere auf H. Cox, A. Buchheim (1859-1888) und vor allem R.S. Heaths (1858-1931) "beautiful theory" (1884). Im Anschluß an Lindemann (1874) gab er eine Darstellung der analytischen Theorie der nichteuklidischen Bewegungen im allgemeinen, d.h. solchen Kollineationen, die eine Fläche zweiten Grades invariant lassen, und leitete schließlich die allgemeinen Formeln nach Heath (1884) ab. Zuletzt wandte er diese Theorie auf die Cliffordschen Schiebungen an und kam dadurch wieder auf die schon (1882) gefundenen Parameterdarstellungen.[15]

Erst (1894) unternahm der Altmeister Cayley einen Anlauf zur Darstellung der elliptischen Geometrie, welche die bisherigen elementaren Ergebnisse zusammenfasste.

Außer etwa der konsequenten Heranziehung der Zerlegung einer allgemeinen elliptischen Bewegung in Cliffordsche Schiebungen, findet sich m.E. in allen eben besprochenen Arbeiten geometrisch nichts wesentliches über Lindemann (1874) Hinausgehendes.[16] Charakteristisch ist insbesondere die Aufstellung von jeweils untereinander verschiedenen Kalkülen, die das vertiefte Interesse der englischen Mathematiker an symbolischen Operationen veranschaulichen: eine Nachwirkung der Aera von Peacock, DeMorgan, Boole und Hamilton.- Die befruchtende Wirkung der neuartigen Ideen Cliffords ist überall deutlich zu erkennen; sie prägte offenbar einen erheblichen Bereich der geometrischen Forschung in England.

Eine Sonderstellung nimmt die rein gemäß synthetischer Methode vorgehende Arbeit (1895) von W. Burnside (1852-1927) ein. In sehr eleganter Weise analysierte Burnside mit Hilfe einiger elementarer Sätze der metrisch-projektiven Geometrie die Struktur der Bewegungsgruppen des hyperbolischen und elliptischen Raumes. Er untersuchte sowohl die endlichen wie die infinitesimalen Bewegungen, und stellte wohl zum ersten Mal mit Hilfe der synthetischen Methode die kontinuierlichen wie diskreten Untergruppen der Bewegungsgruppen auf. Im elliptischen Fall stützte er sich dabei auf eine wichtige Arbeit (1889) von E. Goursat (1858-1936), der die Untergruppen der orthogonalen Gruppe, d.h. der Drehgruppe des euklidischen Raumes, untersucht hatte.

Die Abhandlung von Burnside schien merkwürdigerweise wenig Beachtung gefunden zu haben[17], obwohl sie gegenüber allen vorher besprochenen Darstellungen einen großen Fortschritt brachte, indem sie die Cliffordschen Schiebungen zum ersten Mal konsequent in einen allgemeinen gruppentheoretischen Rahmen einbettete. Vielleicht war es ein Fehler Burnsides, die synthetische Methode zu verwenden.

1.2.3 Die Cliffordschen Biquaternionen

In einer Serie von Arbeiten, die mit (1873b) ihren Anfang nahm, rang Clifford um den Begriff der Biquaternionen und deren Rechenregeln, sowie deren genaue geometrische Deutung. Es brauchte allerdings die Anstrengungen einiger weiterer Mathematiker, bis der Kern seiner Gedanken einigermaßen herausgeschält werden konnte.[18] In moderner Notation läßt sich der Begriff einer Biquaternion etwa wie folgt einführen:

Sind q, q' Quaternionen der Form

$$q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$
$$q' = q_0' + q_1'e_1 + q_2'e_2 + q_3'e_3$$

wobei die q_i, q_i' reelle oder komplexe Zahlen sind, so wird eine Biquaternion Q definiert als

$$Q = q + \varepsilon q' ,$$

d.h. als eine hyperkomplexe Zahl mit den acht Einheiten

$$1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ \varepsilon,\ \varepsilon e_1,\ \varepsilon e_2,\ \varepsilon e_3 .$$

Für Produkte der Einheiten $1, \varepsilon$ mit den e_i gelte das kommutative Gesetz und für die e_i untereinander die bekannten Gesetze der Multiplikation der Quaternioneneinheiten:

	e_1	e_2	e_3
e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	-1

Zwei Biquaternionen $P = p + \varepsilon p'$ und $Q = q + \varepsilon q'$ bezeichnet man als gleich, $P = Q$, genau dann wenn $p = q$ und $p' = q'$.

Man verdankt nun Clifford die Unterscheidung dreier Systeme von Biquaternionen, je nach dem Verhalten der Einheit ε, d.h. je nach dem ob $\varepsilon^2 = +1$, $\varepsilon^2 = -1$ oder $\varepsilon^2 = 0$ ist.

Ist $\varepsilon^2 = +1$, so heißt die Biquaternion e l l i p t i s c h ;
ist $\varepsilon^2 = 0$, so heißt die Biquaternion p a r a b o l i s c h ;
ist $\varepsilon^2 = -1$, so heißt die Biquaternion h y p e r b o l i s c h .

Clifford schloß in (1873b) seine Überlegungen an Hamilton und vor allem Ball an. Er zeigte, wie dessen Begriffe der Schraubentheorie[19] sich mit

Biquaternionen mit $\varepsilon^2 = 0$ beschreiben lassen (1873b, 186). Nach einer kurzen Diskussion der elliptischen Geometrie, währenddessen er seinen neuen Parallelenbegriff einführte (Abs. 1.2.2), dehnte er die Ballsche Schraubentheorie auf den elliptischen Raum aus und kam dabei zu Biquaternionen mit $\varepsilon^2 = +1$ (1873b, 195). Die unvollendete, erst posthum erschienene Abhandlung (1882b) hatte einen eher grundlagentheoretischen Charakter und geht in den Ausführungen nicht wesentlich über (1873b) hinaus. (1882c) fasste Clifford noch einmal in knapper Form den Zusammenhang seiner symbolischen Schreibweise mit Hilfe der Biquaternionen mit der Geometrie des elliptischen Raumes zusammen.

Im vorliegenden Zusammenhange kann man sich eine genauere Analyse der Cliffordschen Arbeiten ersparen, da sie zur eigentlichen nichteuklidischen Kinematik nichts beigetragen haben, was über Lindemann (1874) hinausginge. Es ist festzuhalten, daß sich Clifford unabhängig von Lindemann, aber mit der Kenntnis von Cayley (1859) und Klein (1871d), selbständig eine tiefere Einsicht in die Gesetzmäßigkeiten der Bewegungen des elliptischen Raumes verschafft hatte; erst dadurch konnte es ihm natürlich gelingen, den Biquaternionenkalkül überhaupt abzuleiten. Der einzige charakteristische Unterschied zwischen Lindemann (1874) und Cliffords Arbeiten zu den Bewegungen des elliptischen Raumes lag in der wiederholten Betrachtung und Anwendung der Zerlegung einer solchen Bewegung in die Parallelverschiebung 1. und 2.Art. Auf diese Zerlegung ging Lindemann (1874) nirgends explizit ein, und auch (1891) nur am Rande (vgl. dazu Anmerkung 16).

Die erste Abhandlung, die eine ausführliche Diskussion der Cliffordschen Biquaternionen innerhalb eines größeren Rahmens enthielt, scheint von H.Cox zu stammen:[20]

> "The object of this paper is, following Grassmann, to establish a pure algebraical calculus, the laws of which will coincide with those of actual geometry ... I have endeavoured to combine with the ideas of Grassmann Professor Cayley's theory of distance and the application of it made by Dr.Klein." (1882b, 69)

Die Anwendung des Kalküls auf den nichteuklidischen Raum (1882b, 104-112) schloß sich unverkennbar an Clifford an. Cox diskutierte in diesem Zusammenhang zum ersten Mal den hyperbolischen Raum, d.h. er betrachtete zum ersten Mal explizit Biquaternionen mit $\varepsilon^2 = -1$. Clifford hatte nur die Fälle mit $\varepsilon^2 = +1$ und $\varepsilon^2 = 0$ explizit verwendet.

A. Buchheims (1859-1888) grundlegende Serie von Arbeiten zur Theorie der Cliffordschen Biquaternionen begann mit (1884a). Er schrieb dort:

> "My special object is to show that the A u s d e h n u n g s- l e h r e supplies all the necessary materials for a calculus of screws in elliptic space. Clifford was apparently led to construct his theory of biquaternions by the want of such a calculus; but Grassmann's method seems to afford a simpler and more natural means of expression than biquaternions." (1884a, 89f.)

Buchheim behandelte mit seinem Kalkül alle wichtigen Probleme der Kinematik des elliptischen Raumes.

Im algebraischen Teil der Untersuchung (1884b) stellte sich Buchheim die Aufgabe, die Theorie der Cliffordschen Biquaternionen in gewisser Vollständigkeit und Übersichtlichkeit abzuhandeln und hoffte so die Vor-

läufigkeit der Cliffordschen Arbeiten (1873b), (1882b) zu überwinden - was ihm allerdings nicht ganz gelang (vgl. Abs. 3.1). In der Anwendung seiner Theorie auf die Geometrie gab Buchheim zum ersten Mal detaillierte Beziehungen spezieller Formen von Biquaternionen zu geometrischen Elementen:

Ist q eine Quaternion, so bezeichnete er mit

$$Sq = q_0$$

den Skalarteil und mit

$$Vq = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$

den Vektorteil. Damit wird der Skalarteil einer Biquaternion Q gleich

$$SQ = Sq + \varepsilon Sq'$$

und der Vektorteil

$$VQ = Vq + \varepsilon Vq' ,$$

sodaß schließlich

$$Q = SQ + VQ$$

wird. Ein Punkt $x = (x_0,x_1,x_2,x_3) \triangleq x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ wird nun nach Buchheim (1884b, 308) im Biquaternionenkalkül zweckmässig dargestellt durch

$$Sx + \varepsilon Vx = x_0 + \varepsilon(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$$

und eine Ebene $u = (u_0,u_1,u_2,u_3) \triangleq u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ durch

$$Vu + \varepsilon Su = (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3) + \varepsilon u_0$$

und eine Gerade, oder ein linearer Komplex, $(p_1,p_2,p_3,\bar{p}_1,\bar{p}_2,\bar{p}_3)$ durch

$$p + \varepsilon\bar{p} = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + \varepsilon(\bar{p}_1e_1 + \bar{p}_2e_2 + \bar{p}_3e_3) .$$

Nach Buchheim (1884b, 308f.) ist die Gleichung der Fundamentalfläche der nichteuklidischen Maßbestimmung gegeben durch

$$x_0^2 + \varepsilon^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad \text{in Punktkoordinaten,}$$
$$\varepsilon^2u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \quad \text{in Ebenenkoordinaten,}$$
$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \varepsilon^2 (\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2) = 0$$

in Linienkoordinaten. Die Polarsysteme dieser Fläche haben dann die Form

$$Vu' + \varepsilon Su' = \varepsilon(Sx + \varepsilon Vx)$$
$$Sx' + \varepsilon Vx' = \varepsilon(Vu + \varepsilon Su)$$
$$p' + \varepsilon\bar{p}' = \varepsilon(p + \varepsilon\bar{p}).$$

Daraus sieht man, daß ε die Funktion eines P o l a r o p e r a t o r s hat.

(1885) behandelte Buchheim mit Hilfe des Biquaternionenkalküls die Kinematik infinitesimaler und (1886a) endlicher Bewegungen in nichteuklidischen Räumen. (1886b) dehnte er seine Überlegungen auf n Dimensionen aus. Aber erst Study (1891), (1913) gelangte zu einer klaren Einsicht in das Wesen und die geometrische Bedeutung der Biquaternionen, sowie in die von Clifford, Ball und Buchheim gesuchte Darstellung der Bewegungen des euklidischen und der nichteuklidischen Räume, die der Darstellung der Drehungen des euklidischen Raumes um einen festen Punkt mittels den Hamil-

tonschen Quaternionen analog ist [21] (vgl. Abs. 3.1).

A. MacAulay (1863-19 ?) widmete der Ausarbeitung der Theorie der euklidischen Biquaternionen, die er "octonions" nannte, ein ganzes Buch (1898). Neben Grassmann war er vor allem beeinflußt durch die Schraubentheorie von Robert Ball.

Im monumentalen Werk (1898) setzte sich A.N. Whitehead (1861-1947) das Ziel, verschiedene symbolische und algebraische Systeme vergleichend zu analysieren, sowie ihre Anwendungen zu untersuchen. Die größte Schuldigkeit für die Abfassung dieses Werkes empfand er gegenüber den beiden "Ausdehnungslehren" von H. Grassmann (1801-1877). Aber

> "I should like ... to mention the names of Arthur Buchheim and of Homersham Cox as the mathematicians whose writings have chiefly aided me in the development of the Calculus of Extension. ... In the development of Non-Euclidean Geometry the ideas of Cayley, Klein, and Clifford have been chiefly followed, and in the development of the theory of Systems of Forces I am indebted to Sir R.S. Ball, and to Lindemann." (1898, Xf.)

Dieses erste große Werk von Alfred North Whitehead steht ganz in der Tradition der typisch englischen algebraisch-symbolischen Schule. Die durchdiskutierten Hauptanwendungsgebiete der untersuchten symbolischen Systeme sind die symbolische Logik, die projektive Geometrie, sowie ausgewählte Kapitel der geometrischen Mechanik des starren Körpers. M.E. tritt für die letztere aber kein neuer Gesichtspunkt hinzu. Die Behandlung der Cliffordschen Biquaternionen hat sich Whitehead für den nie erschienenen zweiten Band aufgespart.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Neigung der englischen Mathematiker zu symbolischen Kalkülen sich auf glückliche Weise mit dem starken Interesse an der geometrischen Mechanik des starren Körpers verband; so entstanden wichtige Beiträge zu einem neuen Gebiet der Algebra, der Theorie der hyperkomplexen Zahlen.

1.3 Dynamik des starren Körpers im elliptischen Raum: Robert Samuel Heath

1.3.1 Zur Entstehung und Vorgeschichte der Arbeit von Heath

Über den Autor Robert Samuel Heath (1858-1931) der heute fast völlig unbekannten Arbeit "On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space" (1884) ist kaum etwas in Erfahrung zu bringen. Zur Zeit der Abfassung von (1884) war er jedenfalls Fellow am Trinity College in Cambridge.[22] Im Gegensatz zu fast allen anderen englischen Autoren, die über nichteuklidische Geometrie schrieben, wie etwa Ball, Cox und Buchheim, schließt sich Heath n i c h t an die Cliffordschen Begriffsbildungen an.

Neben Cayley (1859), (1869) scheint Heath am stärksten von Lindemann beeinflußt worden zu sein; der kinematische Teil (1884, 305-310) jedenfalls beruht im wesentlichen auf Lindemanns Dissertation (1874).

An Vorarbeiten zur Dynamik des starren Körpers im elliptischen Raum sind die beiden Aufsätze (1876) und (1882a) von Clifford zu erwähnen. Nur auf den zweiten bezog sich Heath (1884, 314) explizit.

Clifford führte in (1882a, 378) das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer Ebene, "second moment of a plane", ein. Legt man dem Koordinatensystem ein Tetraeder zugrunde, so hat eine Ebene U die Gleichung

$$U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 + U_4x_4 = 0 .$$

Sind (y_1, y_2, y_3, y_4) die Koordinaten eines Punktes y, so definierte er das Trägheitsmoment von y mit der Masse dm bezüglich der Ebene U als

$$\int (U_1y_1 + U_2y_2 + U_3y_3 + U_4y_4)^2 dm = k^2 .$$

Dabei nahm er wie üblich an, daß die Koordinaten normiert sind, d.h. $\sum y_i^2 = 1$ und $\sum U_i^2 = 1$ und setzte die Gesamtmasse gleich eins; k nannte er dann den Trägheitsradius bezüglich der Ebene U.

> "Those planes, whose second moments vanishes, envelop a surface of the second order $k^2 = 0$ (the null-surface), which determines all the dynamical relations of the body. The six axes of this surface (being the edges of the self-conjugate tetrahedron common to it and the absolute) are called the principal axes of the body. We may for all dynamical purposes substitute for the body a system of four particles having appopriate masses placed at the vertices of any Tetrahedron self-conjugate to the null-surface." (1882a, 379)

Clifford leitete einen Ausdruck für den Impuls her, stellte die Bewegungsgleichungen auf und transformierte schließlich das Ganze auf ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem. Dadurch erhielt er die Eulerschen Gleichungen für den elliptischen Raum und einen Ausdruck für die kinetische Energie. Da Heath ganz analog vorging, seine Überlegungen aber etwas ausführlicher darlegte, soll darauf erst im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

(1876) griff Clifford das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen Fixpunkt von einem verallgemeinerten Gesichtspunkt wieder auf:

> "The problem of the rotation under no forces of a rigid body about a fixed point in ordinary three-dimensional space is the same as the problem of free motion under no forces; for the motion about the centre of inertia takes place as if it were a fixed point. But it is also the same thing as the problem of the free motion of a rigid system ... in elliptic space of two dimensions. So also the problem of the free motion of a solid in elliptic space of three dimensions is the same as that of the free motion, or motion about a fixed point in parabolic or homaloidal space of four dimensions. And, in general, the problem of free motion in elliptic space of n dimensions is identical with that of free motion or motion about a fixed point, in parabolic space of n+1 dimensions." (1876, 236)

Die hohe Allgemeinheit dieser Abhandlung brachte es mit sich, daß sie für die Geometrie des dreidimensionalen elliptischen Raumes kaum etwas

beitrug. Sie blieb auf die Weiterentwicklung der geometrischen Mechanik des starren Körpers ohne Einfluß; Heath (1884) erwähnte sie nicht einmal.

Von Heath sind m.W. keine weiteren Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie oder Mechanik bekannt. Es handelte sich also bei (1884) um ein singuläres, wenn auch sehr einflußreiches Werk. Die in Form einer Einleitung den eigentlich mechanischen Betrachtungen vorangestellte Einführung in die elliptische Geometrie des Raumes gehörte zu den ersten und vielbeachteten zusammenfassenden Darstellungen der nichteuklidischen Geometrie (vgl. Abs. 1.2).

1.3.2 Mechanik des starren Körpers im elliptischen Raum

1.3.2.1 Kinematik im elliptischen Raum

Ein starrer Körper wird bei Heath wie üblich definiert:

> "By a rigid body we mean a collection of particles so bound together that the distance between any pair of them remains the same, however the system be moved in space." (1884, 295)

Im nichteuklidischen Fall tritt dabei etwas auf, was Heath für wert befand, besonders zu erwähnen: Ist P ein Punkt und p dessen Polarebene bezüglich der imaginären Fundamentalfläche des elliptischen Raumes, so ist die Distanz von P zu allen Punkten Q der Polarebene konstant. Denn P,Q, zusammen mit den Schnittpunkten der Geraden PQ mit der Fundamentalfläche, bilden ein harmonisches Punktequadrupel, haben also ein konstantes Doppelverhältnis und folglich konstanten Abstand:

> "A point ... [has] always ... [the same distance] ... from any point of its polar plane. Hence a point and its polar plane always move together like a rigid body." (1884, 295)

Zu einem konkreten starren Körper, betrachtet als Punktmenge, kann in diesem Sinne immer die entsprechende Menge der Polarebenen dieser Punkte dazugedacht werden, um der Betrachtung im Rahmen der elliptischen Geometrie eine gewisse Vollständigkeit zu geben.

Wie Lindemann nannte Heath eine elliptische Bewegung, die die Punkte oder Ebenen einer Geraden einzeln fest läßt, eine Rotation bzw. Translation, und stellte fest, daß letztere genauso wie erstere eine wohlbestimmte Achse hat. Eine Drehung um eine gegebene Gerade ist äquivalent einer Translation um die dazu absolut (d.h. bezüglich der Fundamentalfläche) polare Gerade (1884, 296).

Zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung benutzte Heath normierte elliptische Koordinaten, d.h. er konstruierte die Koordinaten so, daß für die Koordinaten (x_1,x_2,x_3,x_4) eines Punktes die Beziehung

$\sum x_i^2 = 1$ gilt (1884, 289). Die Matrizen der linearen Transformation werden dabei alle orthogonal.

Ist also

$$\bar{x} = Px \tag{1}$$

eine Koordinatentransformation, so muß wegen $\sum x_i^2 = \sum \bar{x}_i^2 = 1$ P orthogonal sein, d.h. es gilt $P^{-1} = P^T$ und $\det(P) = 1$. Da man die Geradenkoordinaten in gleicher Weise normieren kann wie die Punktkoordinaten (1884, 291), wird die entsprechende Transformation ebenfalls orthogonal. Durch die Berechnung der Fixelemente der Transformation zeigte er, daß bei jeder elliptischen Bewegung genau zwei Geraden invariant bleiben, wobei die Bewegung dann als zusammengesetzt aus zwei Drehungen bzw. Translationen um diese Achsen oder als Schraubung längs einer dieser Achsen aufgefasst werden kann (1884, 300f.).

Hängt P von der Zeit ab, so wird aus $x = P^T\bar{x}$

$$\dot{x} = \dot{P}^T\bar{x} + P^T\dot{\bar{x}} \quad .$$

Bezieht man die Bewegung auf ein körperfestes Koordinatensystem, so ist $\dot{\bar{x}} = 0$, also

$$\dot{x} = \dot{P}^T\bar{x} = \dot{P}^T Px = \Omega x. \tag{2}$$

Offenbar ist Ω schiefsymmetrisch, denn aus der Orthogonalitätsbeziehung $P^TP = E$ folgt $\dot{P}^TP + P^T\dot{P} = 0$ oder $\dot{P}^TP + (\dot{P}^TP)^T = 0$, d.h. $\Omega + \Omega^T = 0$.

Was ist die geometrische Bedeutung von Ω ? Da Ω schiefsymmetrisch ist, hat diese Matrix nur sechs unabhängige Parameter $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$; also etwa die Form (1884, 302)

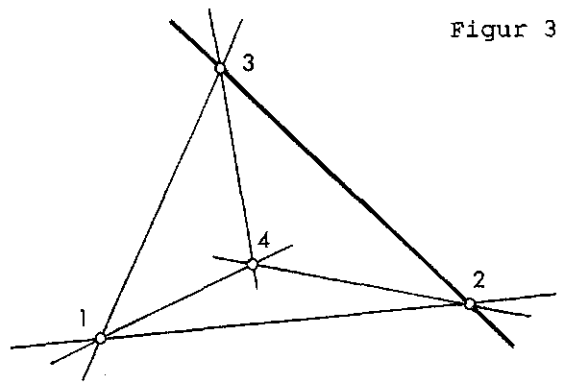
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_1 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & -\omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Verschwinden alle ω_i außer ω_1 , so wird Ω_1 definiert durch

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

d.h. $\dot{x} = \Omega_1 x$ ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \quad\quad - \omega_1 x_4 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= \omega_1 x_1 \end{aligned} \tag{4}$$



Figur 3

Die Koordinaten eines Punktes wurden so konstruiert, daß sie gleich den Kosinus der Abstände zu den Eckpunkten des Koordinatentetraeders sind (1884,29). Die Abstände zu den Eckpunkten 2 und 3 (Fig.3) ändern sich gemäß (4) nicht, also muß es sich bei der vorliegenden Bewegung um eine Drehung um die Kante 23 des körperfesten Koordinatentetraeders handeln. Für den Punkt 4 = (0,0,0,1) ist $\dot{x}_1 = \omega_1$, d.h. er bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die Achse 23 , und wegen des Minuszeichens auf den Punkt 4 zu. Analog läßt sich zeigen, daß $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ gleich den Winkelgeschwindigkeiten um die Kanten 31, 12, 14, 24, 34 sind (1884,302).

Unter der Annahme eines Superpositionsprinzip für solche Bewegungen läßt sich also sagen: Die Bewegung eines Punktes x mit $\dot{x} = \Omega x$ läßt sich erzeugen durch geeignete Drehungen um die sechs Kanten eines Tetraeders (1884, 303):

$$\dot{x} = \Omega x = (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_5 + \Omega_6)\, x.$$

Ganz entsprechend hätte man natürlich die Bewegung von x auch als Zusammensetzung von sechs Translationen um die Kanten desselben Tetraeders auffassen können.

Heath zeigte nun, daß sich die $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ bei linearen Transformationen genau so verhalten wie die Geradenkoordinaten. Weiter leitete er folgende Beziehungen ab (1884, 304f.):

Sind die Koordinaten irgendeiner Geraden gegeben durch $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, so gilt für deren Änderung bei einer Drehung mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ um die Kanten des Koordinatentetraeders

$$\dot{a} = Wa \tag{5}$$

mit

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_3 & \omega_2 & 0 & -\omega_6 & \omega_5 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & \omega_6 & 0 & -\omega_4 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & -\omega_5 & \omega_4 & 0 \end{pmatrix} = W$$

Sind die $p = (p_1, p_2, \ldots, p_6)$ irgendwelche Größen, die sich wie die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ transformieren, so gilt für deren Änderung bei einer Drehung mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$:

$$\dot{p}\,\Big|_{\substack{\text{absolut}\\ \text{(raumfest)}}} = \dot{p}\,\Big|_{\substack{\text{relativ}\\ \text{(körperfest)}}} + Wp \;. \tag{6}$$

Im folgenden leitete Heath im Anschluß an Lindemann die beiden bei einer elliptischen Bewegung invarianten linearen Komplexe ab, den Rotations- und den Translationskomplex, sowie einige sich daraus ergebende metrische Relationen (1884, 305f.).

1.3.2.2 Dynamik im elliptischen Raum

Heath erklärte den Kraftbegriff im elliptischen Raum ganz ähnlich wie Lindemann (vgl. Abs. VI 3.5) und kam wie dieser gemäß Klein (1871b) zur mechanischen Deutung der simultanen Invariante zweier linearer Komplexe, d.h. eines Kraftkomplexes und eines Bewegungs- oder Geschwindigkeitskeitskomplexes, als Arbeit des Kraftsystems bezüglich des Bewegungssystems (1884, 311). Auf die daraus folgenden Implikationen zum Verhältnis der mechanischen Begriffe und der Geometrie des Raumes der linearen Komplexe ging er nicht ein.

Ausgehend von der Berechnung der Geschwindigkeit eines einzelnen Punktes (x_1,x_2,x_3,x_4) des starren Körpers, welcher einer Bewegung mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ um die Kanten des Koordinatentetraeders unterworfen ist, berechnete er den Gesamtimpuls des starren Körpers in Abhängigkeit von der Massenverteilung zu (1884, 313)

$$p = M\omega \quad , \tag{7}$$

wobei $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6)$ und

$$M = \begin{pmatrix} A & P_3 & P_2 & 0 & -P_6 & P_5 \\ P_3 & B & P_1 & P_6 & 0 & -P_4 \\ P_2 & P_1 & C & -P_5 & P_4 & 0 \\ 0 & P_6 & -P_5 & F & -P_3 & -P_2 \\ -P_6 & 0 & -P_4 & -P_3 & G & -P_1 \\ P_5 & -P_4 & 0 & -P_2 & -P_1 & H \end{pmatrix} = M^T \quad ,$$

und

$$\begin{aligned} A &= \int (x_1^2 + x_4^2)\, dm & \qquad P_1 &= \int x_2x_3 dm \\ B &= \int (x_2^2 + x_4^2)\, dm & \qquad P_2 &= \int x_3x_1 dm \\ C &= \int (x_3^2 + x_4^2)\, dm & \qquad P_3 &= \int x_1x_2 dm \\ F &= \int (x_2^2 + x_3^2)\, dm & \qquad P_4 &= \int x_1x_4 dm \\ G &= \int (x_3^2 + x_1^2)\, dm & \qquad P_5 &= \int x_2x_4 dm \\ H &= \int (x_1^2 + x_2^2)\, dm & \qquad P_6 &= \int x_3x_4 dm \quad . \end{aligned}$$

Die Impulskomponenten $p_1, p_2, \ldots, p_6$ sind die Drehmomente bezüglich den Kanten 23, 31, 12, 14, 24, 34 oder die Translationsmomente bezüglich den Kanten 14, 24, 34, 23, 31, 12 des Bezugstetraeders.

Die kinetische Energie T berechnet sich dann zu (1884, 313)

$$\begin{aligned}\omega^T M\omega = 2T = {} & A\,\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\,\omega_3^2 + F\,\omega_4^2 + G\,\omega_5^2 + H\,\omega_6^2 \\ & + 2P_1(\omega_2\omega_3 - \omega_5\omega_6) + 2P_2(\omega_3\omega_1 - \omega_6\omega_4) \\ & + 2P_3(\omega_1\omega_2 - \omega_4\omega_5) + 2P_4(\omega_3\omega_5 - \omega_2\omega_6) \\ & + 2P_5(\omega_1\omega_6 - \omega_3\omega_4) + 2P_6(\omega_2\omega_4 - \omega_1\omega_3) \quad .\end{aligned} \tag{8}$$

Man beachte, daß die sechs Größen A, B, C, F, G, H nicht unabhängig sind: Wegen der immer vorausgesetzten Normierung gilt $\sum x_i^2 = 1$ und damit

$$\begin{aligned}A + F &= \int(x_1^2 + x_4^2)\,dm + \int(x_2^4 + x_3^2)\,dm \\ &= \int(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\,dm = \int dm = \mu \quad ,\end{aligned}$$

wobei μ gleich der Gesamtmasse des Körpers ist. Analog findet man, daß $B + G = C + H = \mu$, also

$$A + F = B + G = C + H = \mu \quad .$$

Nach dem Vorgehen von Clifford (1882a) (Abs. 1.3.1) führte Heath die Trägheitsmomente eines starren Körpers bezüglich einer Ebene ein, und kommt dadurch zur Definition der Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsebenen eines starren Körpers (1884, 314).

Ist $k^2 = \int(U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 + U_4x_4)^2 dm$ das Trägheitsmoment des Punktes y bezüglich einer Ebene U , so heißt die Fläche zweiten Grades mit $k^2 = 0$, d.h.

$$\int(U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 + U_4x_4)^2 dm = 0$$

nach Clifford die Nullfläche des Körpers. Ihre Gleichung läßt sich durch eine geeignete Koordinatentransformation auf Hauptachsenform

$$U_1^2 \int x_1^2 dm + U_2^2 \int x_2^2 dm + U_3^2 \int x_3^2 dm + U_4^2 \int x_4^2 dm = 0$$

bringen, wobei die Kanten und Ebenen des entsprechenden Polartetraeders der Fläche eben die genannten Hauptträgheitsachsen und -ebenen sind. Bezüglich dieses sogenannten Hauptträgheitstetraeders verschwinden alle gemischten Ausdrücke der Form $\int x_i x_k dm$ mit $i \neq k$. Bezieht man den Masse-Trägheitstensor M auf das Hauptträgheitstetraeder, so verschwinden folglich alle gemischten Momente P_i und die Beziehung zwischen dem Impuls p und der Geschwindigkeit ω wird (1884, 315)

$$p = M\omega \quad ,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & & & & & \\ & B & & & & \\ & & C & & & \\ & & & F & & \\ & & & & G & \\ & & & & & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

B e w e g u n g s g l e i c h u n g e n e i n e s s t a r r e n K ö r p e r s i m e l l i p t i s c h e n R a u m: Die einer Bewegung mit dem Impuls $p(t)$ koordinierte Kraft ist definiert durch die Beziehung $f = \dot{p}$. Daraus folgt für ein raumfestes Koordinatensystem mit $p = M\omega$ die Gleichung $f = M\dot{\omega}$. Bezogen auf ein mitbewegtes, d.h. körperfestes, Tetraeder gilt wegen (6) aber

$$\dot{p}|_{absolut} = \dot{p}|_{relativ} + Wp ,$$

mit

$$f = \dot{p}|_{absolut}$$

wird also

$$f = \dot{p} + Wp$$

oder

$$f = M\dot{\omega} + (WM)\omega \quad . \tag{10}$$

Die Impulskomponenten können dabei in der Form

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}$$

geschrieben werden, wobei T wieder die kinetische Energie ist.

Nimmt man das Hauptträgheitstetraeder als Grundlage des körperfesten Koordinatensystems, so wird M diagonal, d.h.

$$f = M\dot{\omega} + (WM)\omega$$

$$= \begin{pmatrix} A\dot{\omega}_1 \\ B\dot{\omega}_2 \\ C\dot{\omega}_3 \\ F\dot{\omega}_4 \\ G\dot{\omega}_5 \\ H\dot{\omega}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_3 & \omega_2 & 0 & -\omega_6 & \omega_5 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 & \omega_6 & 0 & \omega_4 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 & \omega_5 & \omega_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \\ F\omega_4 \\ G\omega_5 \\ H\omega_6 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Rechnet man dies aus, so ergibt sich (1884, 316)

$$\begin{aligned} f_1 &= A\dot{\omega}_1 - (B-H)\omega_2\omega_6 - (G-C)\omega_5\omega_3 \\ f_2 &= B\dot{\omega}_2 - (H-A)\omega_6\omega_1 - (C-F)\omega_3\omega_4 \\ f_3 &= C\dot{\omega}_3 - (A-G)\omega_1\omega_5 - (F-B)\omega_4\omega_2 \\ f_4 &= F\dot{\omega}_4 - (B-C)\omega_2\omega_3 - (G-H)\omega_5\omega_6 \\ f_5 &= G\dot{\omega}_5 - (C-A)\omega_3\omega_1 - (H-F)\omega_6\omega_4 \\ f_6 &= H\dot{\omega}_6 - (A-B)\omega_1\omega_2 - (F-G)\omega_4\omega_5 \end{aligned} \tag{12}$$

Dies sind die E u l e r s c h e n B e w e g u n g s g l e i c h u n g e n im elliptischen Raum.

Im Falle der k r ä f t e f r e i e n B e w e g u n g ist $f = 0$ und damit auch

$$\dot{p}|_{absolut} = 0 ,$$

d.h. $p = (p_1, p_2, \ldots, p_6)$ ist konstant. Folglich sind die beiden polar konjugierten linearen Komplexe

$$p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + p_4a_4 + p_5a_5 + p_6a_6 = 0$$

und

$$p_4a_1 + p_5a_2 + p_6a_3 + p_1a_4 + p_2a_5 + p_3a_6 = 0$$

Fixelemente der Bewegung. Der erste Komplex besteht genau aus denjenigen Geraden, längs welchen kein Verschiebungsmoment wirkt und der zweite genau aus denjenigen Geraden, um welche kein Drehmoment wirkt (1884, 316).

Multipliziert man im kräftefreien Fall die sechs Gleichungen hintereinander mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, addiert, und integriert das Resultat über die Zeit, so erhält man als erstes Integral der Bewegung (1884, 316)

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + F\omega_4^2 + G\omega_5^2 + H\omega_6^2 = 2T \quad , \qquad (13)$$

d.h. die E n e r g i e e r h a l t u n g s g l e i c h u n g (vgl.Abs.V 5.3).

Im letzten Teil des Aufsatzes (1884) gibt Heath formale Lösungen der Bewegungsgleichungen mit Hilfe von Theta-Funktionen in zwei Variablen an. Er kommt aber zu keiner vollständigen Lösung: er erhält nur vier freie Parameter für die Erfüllung der Anfangsbedingungen, für die im allgemeinen Falle sechs freie Parameter notwendig sind (1884, 322). Hieran knüpfen sich die Betrachtungen von Domenico de Francesco (vgl.Abs. 2.2.2).

1.3.3 Diskussion der Ergebnisse von Heath

Neben Cliffords kurzen Notizen (1876),(1882a) war die Abhandlung (1884) von Heath die erste Arbeit zur D y n a m i k eines starren Körpers im elliptischen Raum. Sie blieb zugleich auch eine der letzten, die sich eingehend und ausschließlich mit diesem Thema beschäftigten. Warum war es gerade ein Mathematiker in England, der diesen Faden aufgriff und bis zu einem gewissen Ende führte? Hierfür sind vor allem zwei Gründe maßgeblich: Erstens war es für die englischen Mathematiker gewissermaßen Ehrensache, sich mit der nichteuklidischen Geometrie im Rahmen der von Cayley schon (1859) gefundenen Maßbestimmung zu beschäftigen; zudem wirkte das Erbe des früh verstorbenen genialen William Kingdon Clifford (1845-1879), des eigentlichen Pioniers der nichteuklidischen Geometrie in England, auf dessen Nachfolger anfeuernd und begeisternd. Seine Schriften wurden jedenfalls mit einer gewissen Ehrfurcht zitiert. Zweitens schuf Robert Stawell Ball mit seiner Schraubentheorie ein neues Forschungsgebiet zwischen Mechanik und Geometrie, das sich geradezu anbot, in den Rahmen der nichteuklidischen Geometrie hineingestellt zu werden. Die Faszination der Ballschen Schraubentheorie lag in deren scheinbarer Praxisnähe zu kinematischen und dynamischen Problemen von mechanischen Systemen mehrerer Freiheits-

grade, sowie mit den damit eng zusammenhängenden und anregenden Fragen rein geometrischer Natur (Zylindroid, Systeme von linearen Komplexen, Übertragungsprinzipien usw.).

Die Arbeit (1884) von Heath zeichnet sich durch formale Eleganz aus, die mit möglichst geringem Aufwand und auf direktestem Wege zum Resultat gelangen will. Die zuletzt dastehende Formel war eigentlich das Entscheidende - auf die Diskussion der geometrischen Verhältnisse verwendete Heath nicht allzu viele Worte. Insbesondere schien ihm die Einordnung seiner Überlegungen in den Komplexraum fern gelegen zu haben. Es soll dies in einer etwas skizzenhaften Weise hier nachgeholt werden, um zu zeigen, wie die Heathsche Arbeit dem Inhalt nach eine fast nahtlose Weiterführung von Lindemann (1874) darstellt.

Lindemann (1874) hatte die Kinematik, sowie den statischen Kraftbegriff erschöpfend behandelt. Die Analogie zwischen unendlich kleinen Bewegungen und Kräften erfuhr durch ihn im Anschluß an Klein eine vollständige Klärung im Sinne einer mathematischen Koordination, welcher die durch die involutorische Lage induzierte Polarität im Komplexraum zugrundeliegt (Abs. VI 3.7). Zwei lineare Komplexe mit den Koordinaten $(a_1,a_2,\ldots,a_6)$ und $(b_1,b_2,\ldots,b_6)$ nannte er in Involution, wenn

$$(a,b) = a_1b_4 + a_2b_5 + a_3b_6 + a_4b_1 + a_5b_2 + a_6b_3 = 0$$

ist. Geometrisch bedeutet dies die konjugierte Lage dieser beiden Komplexe bezüglich einer gewissen Fläche zweiten Grades im Komplexraum. Diese Fläche besteht genau aus denjenigen Komplexen, die zu sich selbst konjugiert sind, d.h. ihre Gleichung hat die Form

$$(x,x) = 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0 \quad .$$

Dies ist aber die Bedingungsgleichung dafür, daß die Komplexkoordinaten $(x_1,x_2,\ldots,x_6)$ eine Gerade, d.h. einen speziellen linearen Komplex darstellen. Die in Rede stehende Fläche zweiten Grades ist also identisch mit der Menge der Geraden des dreidimensionalen projektiven Raumes, oder besser, der Menge der speziellen Komplexe des fünfdimensionalen Komplexraumes. Sie soll hier Linienquadrik genannt werden. Dann kann man sagen: Kraftkomplexe und Bewegungskomplexe (d.h. eigentlich Geschwindigkeits- oder Beschleunigungskomplexe) sind sich bezüglich der Linienquadrik polar zugeordnet.

Man beachte: diese Zuordnung ist keine dynamische, sondern eine rein mathematische, die allerdings im Rahmen des Arbeitsbegriffes eine gewisse physikalische Bedeutung erhält (vgl. Abs. VI 3.7).

Heaths Verdienst bestand nun in der Weiterführung der Lindemannschen Vorarbeiten in die Dynamik hinein. Es wurde ja schon einmal darauf hingewiesen (vgl. Abs. V 2.6), daß bei einem realen Bewegungsvorgang eines starren Körpers jedem Bewegungszustand eine gewisse Kraftkonfiguration entsprechen muß. Da sowohl ersterem wie letzteren geometrisch ein linearer Komplex zugrunde liegt, muß der starre Körper auf irgendeine Weise eine dynamische Zuordnung zwischen diesen beiden linearen Komplexen induzieren.

Im e u k l i d i s c h e n Fall (vgl. Abs. V 5) hängt das dynamische Verhalten eines starren Körpers ja wesentlich von der Gestalt des Trägheitsellipsoides ab. Ist dieses in der Form einer symmetrischen Matrix I, dem Trägheitstensor, gegeben, so ist damit das Verhältnis des Drehvektors d zum Drehimpuls $\bar{p}$ bekannt:

$$\bar{p} = Id.$$

Zusammen mit der allgemeinen Beziehung von Vektoren v im ruhenden (absoluten) und bewegten (relativen) System

$$\dot{v}|_{absolut} = \dot{v}|_{relativ} + d \times v$$

erhält man daraus sofort die Eulerschen Bewegungsgleichungen (Abs. V 5.2):

$$\bar{f} = \dot{\bar{p}} = I\dot{d} + d\times(Id) \quad .$$

Im n i c h t e u k l i d i s c h e n Fall ist die Sache völlig analog, mit dem einzigen wesentlichen Unterschied, daß sich die translatorischen und rotatorischen Anteile der Bewegung n i c h t trennen lassen. Denn eine Translation ist ja identisch mit einer Rotation um die absolute Polare und Entsprechendes gilt für die Translationskräfte und Rotationskräfte. Folglich lassen sich auch Verschiebungsmomente und Rotationsmomente (=Drehmomente) nicht aufspalten; eine Konsequenz davon ist, daß die Masse nirgends als Faktor auftritt wie im euklidischen Fall. I n d e r n i c h t - e u k l i d i s c h e n M e c h a n i k w i r d a l l e s , w a s m i t d e r M a s s e z u s a m m e n h ä n g t, z u m M o m e n t. Anstelle der Masse in der Newtonschen Gleichung und dem Trägheitstensor I der Eulerschen Gleichungen tritt hier ein einziger Tensor M .

Die entsprechenden Schritte mechanischer Natur in der Ableitung der euklidischen Form der Eulerschen Gleichungen bestehen erstens in der Ableitung der Drehimpuls/Drehvektor-Beziehung $\bar{p} = Id$ und zweitens in der Definition des Drehmomentes durch $\bar{f} = \dot{\bar{p}}$. In der nichteuklidischen Mechanik lautet die Beziehung zwischen dem Impuls $p = (p_1, p_2, \ldots, p_6)$ der durch $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6)$ gegebenen Bewegung

$$p = M\omega \ ,$$

und die Definition der Kraft

$$f = \dot{p} \ .$$

Zusammen mit der kinematischen Relation (6) für ein $p = (p_1, p_2, \ldots, p_6)$, das sich wie ω transformiert

$$\dot{p}|_{absolut} = \dot{p}|_{relativ} + Wp$$

erhält man unmittelbar die Eulerschen Gleichungen im elliptischen Raum:

$$f = M\dot{\omega} + (WM)\omega$$

Im ruhenden System gilt einfach

$$f = M\dot{\omega} \ .$$

Dies ist die gesuchte dynamische Beziehung zwischen einem Kraftsystem f und einem beschleunigten Drehsystem $\dot{\omega}$. Was bedeutet sie geometrisch? M ist eine symmetrische Matrix, $M = M^T$, die Gleichung

$$x^T M x = \sum_{i,j=1}^{6} M_{ij} x_i x_j = 0$$

stellt also eine Fläche zweiten Grades im Komplexraum dar. Die dazugehörige Polarengleichung, die dem Komplex x die Polarhyperebene Ξ zuordnet, hat die Form

$$\rho \Xi = Mx \quad .$$

Ein Vergleich mit den Bewegungsgleichungen im ruhenden System zeigt: Die mathematische Beziehung zwischen dem Kraftsystem f und dem Beschleunigungssystem $\dot{\omega}$ eines realen starren Körpers im nichteuklidischen Raum mit dem Masse-Trägheitstensor M ist eine P o l a r i t ä t i m K o m p l e x r a u m , vermittelt durch die zu M gehörige Quadrik des Komplexraumes.

Man sieht daraus, daß man auch durch die Dynamik, ähnlich wie durch die Kinematik und Statik (Abs. VI 3.7), in natürlicher Weise dazu geführt wird, entweder die Koordinaten eines Kraftsystems oder die Koordinaten eines Bewegungssystems als Hyperebenenkoordinaten im Komplexraum zu interpretieren.

Die in Tabelle 1 (Kap. VI) dargestellten kinematischen und statischen Grundbegriffe zeigen sich nun auch durch die Dynamik als einander in polarem Sinne zugeordnet.

Jede symmetrische Matrix kann diagonalisiert werden, d.h. jede quadratische Form kann durch eine reelle lineare Transformation auf Hauptachsenform gebracht werden. Die Matrix M hat nach (9) eine Diagonalform der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & & & & & \\ & B & & & & \\ & & C & & & \\ & & & F & & \\ & & & & G & \\ & & & & & H \end{pmatrix}$$

wobei

$$A + F = B + G = C + H = \text{Gesamtmasse} \quad .$$

Betrachtet man das Bewegungssystem $(\lambda,0,0,0,0,0)$, so wird diesem durch M das Kraftsystem $(\lambda A,0,0,0,0,0)$ zugeordnet. Einer momentanen Schraubung um den linearen Komplex $(1,0,0,0,0,0)$ entspricht also ein Kraftsystem, dem derselbe lineare Komplex zugrunde liegt und umgekehrt. Man kann solche Komplexe H a u p t t r ä g h e i t s k o m p l e x e (in Anlehnung an die euklidischen Hauptträgheitsachsen) nennen. Es gibt offenbar sechs solche Komplexe. Sie haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & \qquad x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 & \qquad x_5 &= 0 \\ x_3 &= 0 & \qquad x_6 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dieser sechs linearen Komplexe, eben den Hauptträgheitskomplexen, verwendet man einen Satz aus der Theorie der quadratischen Formen: zwei quadratische Formen, von denen die eine

positiv definit ist, können immer simultan durch eine reelle lineare Transformation auf Hauptachsenform gebracht werden; die positiv definite Form geht dabei in eine Summe reiner Quadrate über.[23]

Wendet man diesen Satz auf die quadratischen Formen

$$(x,x) = 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0 \quad ,$$

$$x^TMx = \sum_{i,j=1}^{6} M_{ij}x_ix_j = 0$$

an, so geht letztere, da sie positiv definit ist, in

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

über; erstere hat, wie im Abschnitt V 2.5 gezeigt wurde, eine wohlbestimmte Signatur mit drei positiven und drei negativen Vorzeichen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß sie bei obiger Transformation in

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$$

übergeht (sonst nimmt man eine Vertauschung der Variablen vor).

Offenbar haben die Komplexe $x_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,6$, immer noch die Funktion von Hauptträgheitskomplexen. Wie im Abschnitt V 2.5 gezeigt wurde, sind sie paarweise in Involution.

Es gilt also:

D i e s e c h s H a u p t t r ä g h e i t s k o m p l e x e
b i l d e n e i n S y s t e m v o n K l e i n s c h e n
F u n d a m e n t a l k o m p l e x e .

Damit ist der Zusammenhang der Mechanik des starren Körpers im elliptischen Raum mit dem Raum der linearen Komplexe und dessen Hyperebenenraum hergestellt. Auf weitere Einzelheiten einzugehen ist hier nicht der Ort. Vielleicht konnte durch diese skizzenhaften Ausführungen im Anschluß an Heath (1884) dem Leser ein wenig die Schönheit und Geschlossenheit der geometrischen Mechanik des starren Körpers im elliptischen Raum näher gebracht werden. Diese tiefer liegenden Zusammenhänge bildeten jedenfalls einen entscheidenden Ansporn zur Inangriffnahme und Durchführung der vorliegenden Arbeit.

2. Zur Rezeption der nichteuklidischen Geometrie in Italien

2.1 Verarbeitung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Italien

2.1.1 Giuseppe Battaglini und Eugenio Beltrami

> "Das Risorgimento, die nationale Wiedergeburt Italiens, bedeutete auch die Wiedergeburt der italienischen Mathematik. Mehrere Begründer der modernen Mathematik in Italien nahmen an den Kämpfen teil ... die zu seiner Einigung führten; später hatten sie neben ihren Lehrstühlen politische Stellungen inne. Ein starker Einfluß ging von Riemann aus, und durch Klein, Clebsch und Cayley erwarben sie ihre Kenntnisse der Geometrie und Invariantentheorie."[24] ⟪Struik 1980, 196⟫

1860 wurden zwei neue Lehrstühle in höherer Geometrie geschaffen: der eine in Bologna für Luigi Cremona (1830-1903) und der andere in Neapel für Giuseppe Battaglini (1826-1894). Beide Orte entwickelten sich zu bedeutenden Zentren der Mathematik, insbesondere der Geometrie. Die Schule von Cremona orientierte sich im speziellen an der Tradition der projektiven Geometrie, d.h. an Monge, Poncelet, Möbius, Steiner, von Staudt bis hin zu Plücker. Schüler von Cremona waren etwa R. de Paolis (1854-1892) und G. Veronese (1854-1917).- Aus der stark von Cayley, Sylvester und Gordan ispirierten Schule von Battaglini gingen etwa die Mathematiker E. d'Ovidio (1843-1933), L. Berzolari (1863-1949) und E. Pascal (1865-1940) hervor.[25]

Die Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie in Italien war vor allem mit den Namen G. Battaglini und E. Beltrami (1835-1900) verknüpft. Battaglini führte "mit ebenso viel Überzeugung wie Eifer ... die neuen geometrischen Spekulationen ein ... und das von ihm gegründete und geleitete 'Giornale di Matematiche' war von 1867 an das gleichsam amtliche Organ für die nichteuklidische Geometrie." ⟪Bonola/Liebmann 1908, 133⟫ Er brachte im Jahre 1867, im fünften Band des "Giornale" eine italienische Übersetzung der Pangeometrie von N. Lobačevskij, sowie einen eigenen Beitrag (1867) zu diesem Thema.

Die berühmte Arbeit (1868a) von Beltrami, einem Schüler F. Brioschis (1824-1897) und Bewunderer Riemanns, die im sechsten Band des "Giornale" erschien, markierte den Beginn der intensiven Erforschung eines neuen Zweiges der Geometrie: der differentialgeometrischen Charakterisierung der nichteuklidischen Geometrien. Berief sich Beltrami in (1868a) noch ausschließlich auf Gauss und Lobačevskij, so bemerkt man in (1868b) eine dramatische Wandlung: Beltrami benützte hier bereits die allgemeinen Methoden von Riemann und arbeitete durchgehend im n-dimensionalen Raum. In der Zwischenzeit muß Beltrami also mit Riemann (1867) in Berührung gekommen sein. Dies bewies den eigenständigen Ansatz dieses bedeutenden italienischen Differentialgeometers, dessen Forschungsrichtung nur durch die Beiträge Riemanns intensiviert und befruchtet, nicht aber ausgelöst wurden.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß die ersten entscheidenden Arbeiten zur Differentialgeometrie nichteuklidischer Räume in Italien geschrieben wurden, pflegten doch gerade auch die Italiener eifrige Kontakte zu deutschen Mathematikern, insbesondere zu Riemann. Zudem hatten D. Codazzi (1824-1875), G.Mainardi (1800-1879), F. Brioschi (1824-1897), E. Betti (1823-1892) usw. noch v o r der Rezeption von Riemanns Habilitationsvortrag durch ihre differentialgeometrischen und analytischen Arbeiten einen guten Grund für die weitere Entwicklung gelegt.[26]

Die geometrische und algebraische Verarbeitung der nichteuklidischen Geometrie in Italien[27] verdankt man vor allen dem Werk von Enrico d'Ovidio; darauf soll im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden.

Auch in Italien verband sich das Studium n-dimensionaler (vor allem projektiver) Räume mit der Rezeption der nichteuklidischen Geometrie. Neben den differentialgeometrischen Arbeiten Beltramis (1868a,b)[28] sind hier insbesondere d'Ovidio (1877a) und Veronese (1882) zu nennen. Letzterer schrieb mit (1882) die erste systematische Arbeit zur synthetischen Theorie des n-dimensionalen projektiven Raumes. Sie war von großem Einfluß auf die weitere Entwicklung der projektiven Geometrie höherdimensionaler Räume, die in der folgenden Zeit durch C. Segre (1863-1924) zu einem Höhepunkt geführt wurde.[29]

In diesem Zusammenhang muß noch die für die vorliegende Untersuchung wichtige Arbeit von R. de Paolis (1885) erwähnt werden. De Paolis gibt dort eine auf der synthetischen Theorie der linearen Komplexe beruhende Einführung von projektiven Koordinaten im Komplexraum - ganz im Stile der von v.Staudt und Klein erschlossenen Wege im gewöhnlichen dreidimensionalen projektiven Raum.

2.1.2 Nichteuklidische Liniengeometrie : Enrico d'Ovidio

Enrico d'Ovidio (1843-1933) widmete neben rein invariantentheoretischen Studien einen großen Teil seiner Zeit der algebraischen projektiven Geometrie, insbesondere der Theorie der (nichteuklidischen) projektiven Metrik.[30] Zunächst beschränkte er seine Untersuchungen auf den dreidimensionalen projektiven Raum, studierte die Liniengeometrie und ging schließlich zur Betrachtung n-dimensionaler Räume über.

In der Arbeit (1870) stellte d'Ovidio mit Hilfe des Determinantenkalküls die Grundlagen zur analytischen Geometrie im dreidimensionalen projektiven Raum in homogenen Koordinaten zusammen. Im Anschluß an Zeuthen (1869) und Battaglini (1866a) diskutierte er (1872) euklidisch-metrische Linienkoordinaten und untersuchte schließlich (1873) nichteuklidisch-metrische Beziehungen in homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten. In der grundlegenden Arbeit zur nichteuklidischen Geometrie (1874, 82) definierte er etwa das Moment zweier Geraden als Produkt des Sinus ihres Abstandes, und

das Komoment als Produkt des Kosinus ihres Abstandes.[31] (1875a,b) und (1876a,b) dehnte er seine Untersuchungen auf die nichteuklidisch-metrischen Eigenschaften der linearen Komplexe (d.h. er gab Formeln für Moment, Distanz, und Winkel) und Kongruenzen aus, (1876c) auf Bündel und Gebüsche, d.h. auf zwei- und dreiparametrige Scharen von Komplexen. (1881a) fasste er die gewonnenen g e o m e t r i s c h e n Ergebnisse für lineare Komplexe zusammen, und (1881b) untersuchte er spezielle nichteuklidisch-metrische Eigenschaften des linearen Komplexes (Parameter usw.).

Schon (1877a,b) untersuchte d'Ovidio die projektive Metrik im n-dimensionalen Raum und bestätigte dadurch die Behauptung (Abs. VI 2.2 und 2.3), daß die Erforschung der nichteuklidischen Geometrie untrennbar verbunden war mit der Erforschung von Räumen beliebiger Dimensionen.[32]

Enrico d'Ovidio scheint ganz unabhängig von Lindemann (1874) zu seinen Ergebnissen über die nichteuklidische Liniengeometrie gekommen zu sein, obwohl er sich nach deren Erscheinen immer wieder auf sie berief.[33] D'Ovidio gebührt dadurch das Verdienst, die italienischen Geometer auf die grundlegende Dissertation Lindemanns aufmerksam gemacht zu haben. Man beachte aber, daß seine eigenen Untersuchungen schon früher begannen und teilweise gleichzeitig mit Lindemann (1874) publiziert wurden.

2.2 Dynamik des starren Körpers in einem Raum konstanter Krümmung: Domenico de Francesco

2.2.1 Kinematik

Die erste Arbeit in italienischer Sprache zur nichteuklidischen Kinematik ist Beltrami (1876), wo die Untersuchung mit Hilfe von Differentialinvarianten gleich für n Dimensionen durchgeführt wurde. Diese Arbeit hatte programmatischen Charakter; ihre Aussagen sind dementsprechend allgemeiner Natur und trugen zur konkreten Kinematik des elliptischen oder hyperbolischen Raumes von drei Dimensionen wenig bei.

2.2.2 Integration der Bewegungsgleichungen

De Francesco (1900a) knüpfte seine Betrachtungen an die verallgemeinerten Eulerschen Bewegungsgleichungen, wie sie Heath (1884, 316) aufgestellt hatte (Abs. 1.3.2.2).[34] Er bemerkte, daß Heath für den kräftefreien Fall erstens nicht alle Integrale der Bewegung gefunden hatte und zweitens seine allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

mit Hilfe von Theta-Funktionen in zwei Variablen nicht vollständig war: es gab bei ihm nur vier freie Konstanten anstatt sechs (1900a, 35). Nachdem de Francesco die Lösungen von Heath vervollständigt hatte, machte er am Schluß von (1900a, 38) die Bemerkung, daß sich die Form der Eulerschen Gleichungen im elliptischen Raum ohne weiteres auf den hyperbolischen Raum übertragen läßt.

Die Integration der Eulerschen Gleichungen für den kräftefreien starren Körper lieferte aber nur Funktionen für das Verhalten der Geschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ in Abhängigkeit von der Zeit. Damit war das Problem der Bewegung des starren Körpers aber nur zur Hälfte gelöst (1900b, 387). Waren die sechs W i n k e l g e s c h w i n d i g k e i t e n $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ bekannt, so verblieb die Aufgabe, die sechs Parameter, die die L a g e des Körpers zu jedem Zeitpunkt bestimmen, zu berechnen - eine Aufgabe, die Heath weder formulierte, noch in Angriff nahm. Im zweiten Teil der genannten Arbeit berechnete nun de Francesco (1900b) die für die Lösung dieses Problems nötigen sechs Integrale, wieder unter Miteinbeziehung des hyperbolischen Falles.

(1900c) behandelte de Francesco das Integrationsproblem in verallgemeinerter Form, d.h. er spaltete es nicht mehr auf in die Bestimmung der Geschwindigkeits- oder Ortsparameter. In der umfangreichen Arbeit (1900d) untersuchte er gewisse statische Probleme im hyperbolischen Raum und führte dazu eine neue mechanische Größe, das Komoment einer Kraft, ein (1900d, 11). Er konnte zeigen, daß sich mit Hilfe dieses neuen Begriffs Kräftesysteme im nichteuklidischen Raum geometrisch analog wie bei Poinsot behandeln lassen, d.h. daß sich alle Kräfte auf einen Punkt beziehen lassen. (1900e) dehnte er zudem seine Studie auf die Dynamik des jetzt nicht mehr notwendig kräftefreien starren Körpers aus. Die Kinematik behandelte er mit den in (1900d) entwickelten geometrischen Methoden, und leitete schließlich die verallgemeinerten Eulerschen Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips ab (1900e, 19-21). Er kam dabei zum selben Resultat wie Heath (1884, 316). Im weiteren untersuchte er gewisse Spezialfälle der Bewegung eines starren Körpers, sowie Polhodien und Herpolhodien im nichteuklidischen Raum.

Die Abhandlung (1901) schließlich ist speziellen Untersuchungen zur Integration der allgemeinen Bewegungsgleichungen mit Hilfe verschiedener analytischer Prinzipien im hyperbolischen Raum gewidmet. Der Beitrag in den "Mathematischen Annalen" (1902) war ein zusammenfassender Bericht zu den oben genannten Arbeiten.

Domenico de Francesco rundete im Ganzen gesehen die nichteuklidische Mechanik des starren Körpers nach der analytischen Seite (Integrationsprobleme usw.) hin ab und markiert dadurch einen gewissen Abschluß dieser Forschungsrichtung.

3. Zur Weiterentwicklung der geometrischen Mechanik in Deutschland

3.1 Präzisierung der geometrischen Grundlagen und des algebraischen Apparates durch Eduard Study

Die neuartigen Ideen von Clifford fanden in Deutschland nur zögernd Aufnahme. Klein, der sich über die Bedeutung Cliffords durchaus im klaren war, nahm dies unter anderem zum Anlaß, dessen Gedanken in einer ausführlichen Abhandlung (1890) darzustellen.

Klein griff (1890, 354-363) die Theorie der Cliffordschen Schiebungen auf und brachte deren Parameterdarstellung in einem projektiven Koordinatensystem zum ersten Mal in Verbindung mit dem Quaternionenkalkül. In diesem Rahmen leitete er etwa den Satz über die Zerlegbarkeit einer allgemeinen elliptischen Bewegung in eine Schiebung 1. und 2. Art her. In nur wenig veränderter Schreibweise läßt sich sein Ergebnis wie folgt darstellen:

Ist $q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ eine Quaternion und sind (x_0,x_1,x_2,x_3) die Koordinaten eines Punktes, so ist etwa eine Schiebung 1.Art der Fläche

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

gegeben durch

$$(x_0' + x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3) = q \cdot (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$$

und eine Schiebung 2. Art durch

$$(x_0' + x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3) = (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\cdot p \quad ,$$

wenn $p = p_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ irgendeine Quaternion ist.
Die allgemeine reelle lineare Transformation der genannten Fläche in sich hat dann die Form (1890, 360)

$$(x_0' + x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3) = q \cdot (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\cdot p$$

oder in Kurzform

$$x' = q \cdot x \cdot p \quad .$$

Die hier durch Quaternionen p und q repräsentierte Parameterdarstellung der Cliffordschen Schiebungen hatte schon etwas früher Ball (1882), (1889a) gefunden.[35] Damit war nun die Isomorphie der Bewegungen des elliptischen Raumes mit dem direkten Produkt aus zwei euklidischen Kugeldrehgruppen algebraisch etabliert. Das geometrische Gegenstück dazu wurde etwa gleichzeitig und unabhängig voneinander von J.Petersen (= Hjelmslev, 1873-1950) in (1900), von G. Fubini (1879-1943) in (1900) und E. Study (1862-1930) in (1902) gefunden. Der entsprechende Satz lautet:[36]

> "Man kann die gerichteten Geraden G des elliptischen Raumes derart auf die Punkte ℓ , r zweier Euklidischer Einheitskugeln K_ℓ und K_r abbilden, daß den 'Bewegungen' des elliptischen Raumes die voneinander unabhängigen Euklidischen Drehungen der beiden Bildkugeln entsprechen."

Eine im wesentlichen endgültige Darstellung der synthetischen Theorie der Cliffordschen Schiebungen und Parallelen gab W. Vogt (1883-1916) in

seiner schönen Habilitationsschrift (1909).

Den Parameterdarstellungen der euklidischen Bewegungen widmete Study (1891) eine grundlegende Abhandlung, die auch für die algebraische Darstellung nichteuklidischer Bewegungen von großer Bedeutung war. Zunächst untersuchte er synthetisch die endlichen und infinitesimalen Bewegungen des euklidischen Raumes und deren Gruppenstruktur. Besonderen Wert legte er auf die genaue Erfassung der Spezialfälle, die er in Arbeiten anderer Autoren zu diesem Thema vermißte. Der zweite Teil von (1891) ist einer sorgfältigen Ableitung von verschiedenen Parameterdarstellungen der Bewegungen und Umlegungen gewidmet, wobei er sich teilweise auch des Quaternionenkalküls bedient.

In knapper und endgültiger Fassung findet man bei Study (1913, 42) die Darstellung der euklidischen $(\varepsilon^2 = 0)$ und nichteuklidischen $(\varepsilon^2 = \pm 1)$ Bewegungen mit Hilfe einer Biquaternion $a + \varepsilon b$:

$$Sx' + \varepsilon Vx' = (a + \varepsilon b)^{-1}(Sx + \varepsilon Vx)\ (a - \varepsilon b)\ ,$$
$$Vu' + \varepsilon Su' = (a + \varepsilon b)^{-1}(Vu + \varepsilon Su)\ (a - \varepsilon b)\ ,$$
$$p' + \varepsilon \bar{p}' = (a + \varepsilon b)^{-1}(p + \varepsilon \bar{p})\ (a + \varepsilon b)\ ,$$

wobei Study hier die im Abschnitt 1.2.3 vorgestellte Notation von Buchheim (1884b) benutzte. Study hat dort auch die dazugehörigen Gleichungen der Fundamentalfläche sowie der Polarsysteme angegeben.

In Study vereinigte sich eine starke geometrische Intuition mit einer absoluten Beherrschung der eleganten algebraisch-formalen Darstellung.[37] Als Student hörte er Vorlesungen des Geometers Theodor Reye (1837-1919) in Straßburg, wurde aber vor allem beeinflußt von A.Clebsch (1833-1872) und P. Gordan (1837-1912) und war während kurzer Zeit auch Schüler von Klein.[38] Seine Arbeiten zur euklidischen Liniengeometrie und Kinematik haben die Entwicklung dieser Gegenstände maßgeblich beeinflußt. Obwohl er in seinem Hauptwerk, die "Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie" (1903)[39], ausschließlich die verwickelten Verhältnisse im euklidischen Raum untersuchte, lag für ihn das leitende Prinzip in der nichteuklidischen Geometrie:

> "Die Übertragung aus der Nicht-Euklidischen Geometrie bekannter Schlüsse auf die gewöhnliche Liniengeometrie und Kinematik hat für die mitgetheilten Untersuchungen eine ganz besondere Bedeutung, so daß dem Buche auch recht wohl der Nebentitel 'Anwendungen der nichteuklidischen Geometrie' hätte gegeben werden können ..." (1903, VIII)

Einige Ausarbeitungen seiner fruchtbaren Ideen zur nichteuklidischen und Liniengeometrie hatte Study parallel zu (1903) veröffentlicht, und zwar in den Arbeiten (1902), (1906) und (1907) . Auf den Inhalt dieser sehr reichhaltigen Darstellungen, die eine ganze Reihe interessanter Übertragungsprinzipien enthalten, kann hier nicht eingegangen werden; es sollen aber die methodischen Prinzipien, die Study bei der Abfassung dieser Arbeiten geleitet haben, hervorgehoben werden.

Gleich anfangs von (1902, 315) wies Study darauf hin,

> "daß unter Umständen zu einem tiefer eindringenden Verständnis selbst sehr elementarer Abschnitte der Euklidischen Geometrie die Kenntnis der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht wohl entbehrt werden kann."

Um "die systematische und heuristische Bedeutung der Nicht-Euklidischen Geometrie" zu bekräftigen, machte er vor allem auf das Prinzip der Dualität aufmerksam: Gewisse Analogien in der euklidischen Geometrie erhalten erst durch gewisse Eigenschaften des nichteuklidischen Raumes ihre Erklärung. Vollzieht man den Grenzübergang von der nichteuklidischen zur euklidischen Geometrie, so verlieren entweder gewisse Begriffe der nichteuklidischen Geometrie ihren Sinn oder es treten - je nach der Art des Grenzübergangs - verschiedene Begriffe der euklidischen Geometrie hervor (1902, 316). In (1902) ging es im wesentlichen um die rein synthetische Ableitung gewisser Übertragungsprinzipien, die die elliptische und hyperbolische Bewegungsgruppe des Raumes in überschaubarer Weise im (teilweise ins Komplexe erweiterten) euklidischen Raume darstellbar machten. (1906) brachte dazu einige Erweiterungen und Ergänzungen. In (1907, Teil II) wurde der dazugehörige analytische Apparat entwickelt.

Study zeigte sich, ganz ähnlich wie Clifford und Heath, besonders fasziniert von dem elliptischen Raum:

> "Die Kinematik in diesem sphärischen [=elliptischen] Raume muß uns schon darum interessieren, weil wir nicht wissen, ob wir nicht vielleicht selbst in einem solchen leben. Außerdem aber enthält sie, gleich der ganzen sphärischen Geometrie, eine hohe theoretische Bedeutung durch eine in ihr innewohnende Symmetrie, die der Kinematik im Euklidischen Raum fremd ist. Der Euklidische Raum ist aber ein Grenzfall, eine Ausartung des sphärischen Raumes, wie die Ebene ein Grenzfall der Kugel ist. Daher kann die sphärische Geometrie auch für den Euklidischen Raum zu mancher Einsicht führen, die uns sonst nicht so leicht zugänglich sein würde. So verhält es sich auch in der Kinematik." (1913, 54)

Mit diesen Überlegungen erwies sich Study in mehrfacher Hinsicht als der Fortführer der Intentionen Kleins. Auf seine souveräne Beherrschung sowohl der synthetischen wie der analytisch-algebraischen Methode wurde schon hingewiesen. Die Fruchtbarkeit der gegenseitigen Ergänzung der beiden Methoden offenbarte sich deutlich in den bedeutenden Ergebnissen seiner Forschungen. Hinzu kam seine eben belegte hohe Wertschätzung der projektiven nichteuklidischen Geometrie, die die speziellen Verhältnisse der euklidischen Geometrie mit deren immanenten Asymmetrien umfasst und erst eigentlich durchschaubar macht - ein Gesichtspunkt, der Klein von Anfang an sehr wichtig war.[40] Drittens hatte sich Klein immer wieder mit dem Verhältnis der nichteuklidischen Geometrie zur Wirklichkeit auseinandergesetzt.[41] Ähnliche Überlegungen finden sich, wie oben gezeigt wurde, ebenfalls bei Study.

Study bemühte sich vor allem um eine klare begriffliche Durchdringung der Geometrie mit den Methoden der Gruppentheorie sowie mit Hilfe der Invariantentheorie im Sinne von Clebsch und Gordan. Wie Hawkins (1984) herausgearbeitet hat, war Study in dieser Hinsicht viel stärker beeinflußt von den Gedanken S. Lies (1842-1899) als von Kleins Thesen im "Erlanger Programm" (1872b). Sein tief dringender Blick führte in unabhängig von Klein zu ganz ähnlichen Einsichten und so gehören seine geometrischen Forschungen trotz allem zu den originellsten und konsequentesten Beiträgen zur Geometrie im Geiste des "Erlanger Programms".

3.2 Untersuchungen zur nichteuklidischen Dynamik des starren Körpers : Wilhelm Killing

In Wilhelm Killing (1847-1923) verband sich ein starkes geometrisches Interesse und Intuitionsvermögen mit der Fähigkeit zur gründlichen und exakten Analyse eines mathematischen Problems. Letzteres hatte er bei K. Weierstrass (1815-1897) gelernt, an den er zeitlebens ein warmes Andenken bewahrte.[42] Diese doppelte Fähigkeit machte Killing wie geschaffen für Untersuchungen zu den Grundlagen der Geometrie, sowie über die Struktur von Lie-Algebren.[43]

Was hier besonders interessiert, ist die Tatsache, daß Killing von Weierstrass veranlaßt wurde, die nichteuklidische Mechanik zu studieren (1885a,1).[44] Seine diesbezüglichen Untersuchungen (1883), (1885a) fielen noch in die Zeit vor seinen entscheidenden Beiträgen zur Strukturtheorie der Lie-Algebren - ja sie waren eigentlich sein Ausgangspunkt, wie Hawkins ((1980)) im Detail nachgewiesen hat. Insbesondere war Killing mit der Dissertations Lindemanns (1874) gut vertraut [45] und schien den traditionellen Begriff der unendlichen kleinen Bewegung im Bewußtsein gehabt zu haben, als er seine allgemeinen Raumformen aufzustellen versuchte ((Hawkins 1980, 305)).

Was Killings Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie auszeichnete, war ihre extreme Allgemeinheit und Abstraktheit. Hier näherte sich Killing eher den Intentionen Riemanns als denen Kleins. Überhaupt waren Klein und Killing in ihrer mathematischen Denkweise sehr verschieden.[46] So stand Killing mit seinen die strukturellen Aspekte in den Vordergrund rückenden Arbeiten am Anfang einer Entwicklung, die mit zum Untergang der mit mehr genetisch-intuitiven und anschaulichen Methoden arbeitenden geometrischen Schule von Klein führte (vgl. Abs. VIII 2). Klein warf immer ein Auge auf die eventuelle physikalische Verwertbarkeit und ging so nie wesentlich über das Studium der elliptischen, hyperbolischen und euklidischen, d.h. der projektiven Raumformen, hinaus, während Killing von vorneherein einen sehr viel allgemeineren und abstrakteren Standpunkt vertrat.

Killing konnte sich in seinen analytischen Untersuchungen zur nichteuklidischen Mechanik auf ein paar wenige Vorarbeiten stützen: auf Beltrami (1876) und insbesondere die Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips auf nichteuklidische Räume durch R. Lipschitz (1832-1903) in (1872). Analoge Untersuchungen für die Potentialfunktion im dreidimensionalen Raum finden sich erstmals bei E. Schering (1833-1897) in (1870) und für n Dimensionen in (1873).[47]

In der am Lyceum Hosianum zu Braunsberg publizierten Schrift (1883) kam Killing erstmals ausführlich auf die Mechanik im nichteuklidischen Raum zu sprechen. Er blieb zunächst ganz im dreidimensionalen Raum und nahm, wie nicht anders zu erwarten, seinen Ausgangspunkt in seiner analytischen

Theorie der Raumformen. Er deutete aber mehr an als er ausführte. Was die unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers betraf, verwies er auf Lindemann (1874). Er gab ohne Rechnungen einige Andeutungen zur Theorie der Trägheitsmomente, und kam schließlich auf die Bewegungsgleichungen zu sprechen:

> "Die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt wird durch dieselben Gleichungen bestimmt wie in der euklidischen Geometrie. Aber während in derselben die Bewegung eines freien Körpers, welcher keinen äußeren Kräften oder nur der Schwerkraft unterworfen ist, sich auf die Drehung um einen Punkt zurückführen läßt, verlangen diese Probleme in den anderen Raumformen eine eigene Untersuchung. Auch das Problem der Drehung eines schweren Körpers bietet besondere Schwierigkeiten." (1883, 11)

Konkreteres erfährt man nicht. Killing schien die entsprechenden Rechnungen durchgeführt und sie nur aus Platzgründen weggelassen zu haben. An Resultaten teilte er etwa noch mit, daß sich im kräftefreien Fall die Bewegungsgleichungen des starren Körpers vollständig integrieren lassen.

(1885a) nahm Killing einen viel allgemeineren Gesichtspunkt ein. Ohne Clifford (1876c) gekannt zu haben (1885a,48), ging er von denselben Überlegungen aus:

> "Man bestimme in einer (n+1)-fach ausgedehnten Euklidischen Raumform die Bewegungsgleichungen für Punkte, welche bei Beginn der Bewegung einem n-fach ausgedehnten Kugelgebilde angehören und gezwungen sind, während der Bewegung auf demselben zu verbleiben; die so erhaltenen Gleichungen gelten für eine Nicht-Euklidische Raumform von n Dimensionen; für einen endlichen [=elliptischen] Raum müssen der Radius und alle Coordinaten reell sein, für die Lobatschewskysche Raumform müssen der Radius und eine Coordinate rein imaginär, die übrigen Coordinaten reell sein." (1885a, 1)

Zur Charakterisierung der Differenz zur Lindemannschen Arbeit (1874) bemerkte er:

> "... Herr Lindemann will sich einerseits nicht auf reelle Bewegungen beschränken, andererseits will er hier die sonst gesetzte Bedingung, daß die Raumform in einem unendlich kleinen Gebiet mit der Euklidischen übereinstimmt, nicht festgehalten wissen. Er geht in der Verallgemeinerung einen Schritt weiter als ich und betrachtet alle projectivischen Raumformen mit drei Dimensionen und sechsfacher Beweglichkeit." (1885a, 3)

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen von Systemen von Massenpunkten unter der Wirkung beliebiger Kräfte im n-dimensionalen nichteuklidischen Raum gewann Killing mit Hilfe der Hamiltonschen Methode und deren Vervollkommnung durch Jacobi. Die sich daran, durch Spezialisierung der Bedingungen zwischen den Koordinaten der Massenpunkte, anschließenden mannigfachen geometrischen Folgerungen für die Bewegung eines starren Körpers formulierte Killing nur für den Fall von n Dimensionen. Er deutete nur im Vorübergehen an, daß für $n = 3$ die Liniengeometrie eine wichtige Rolle spiele und unterdrückte weitere Bemerkungen (1885a, 37). Man sieht daran, wie Killing mehr am allgemeinen Fall von n Dimensionen als an der Ausarbeitung der Details in drei Dimensionen interessiert war. Dies war für seinen trotz der geometrischen Grundhaltung abstrakten Standpunkt charakteristisch.[48]

Im Vordergrund der Betrachtung stand jedenfalls auch bei Killing der elliptische Raum von Riemann, zu welchem auch er eine besondere Neigung gefasst hatte (1885a, 3). Den Schluß der Abhandlung bildete eine Theorie der Trägheitsmomente, sowie Betrachtungen über endliche Bewegungen eines starren Körpers.

Man darf wohl sagen, daß sich Killing nur im Vorübergehen mit der nichteuklidischen Mechanik auseinandergesetzt hatte, sozusagen als Sprungbrett zu seinen Forschungen über die Strukturtheorie der Lie-Algebren. Neue Impulse oder Aspekte konnte er jenem Gebiet allerdings kaum geben, was durch seine ganz anders ausgerichtete Forschungsintention erklärlich ist. Killing ging es letztlich nicht um eine Vereinigung von Anschauung und Kalkül, sondern um die Transzendierung der Anschauung mit Hilfe eines geeignet präparierten Formalismus. Hierin lag seine Stärke und Durchschlagskraft, die ihn zu einem der ersten Mathematiker der modernen abstrakten Ausrichtung werden ließ.

Kapitel VIII

Zusammenfassung und Ausblick

1. Zusammenfassung

Die um die Wende vom 18. zum 19.Jh. zur klaren Vorherrschaft erstarkte analytische Methode in der Mathematik (J.L.Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1829)) wurde empfindlich relativiert durch die neu entdeckten nützlichen graphischen Verfahren in den Ingenieurwissenschaften (etwa der Statik unddes Festungsbaus), die aus den militärischen Bedürfnissen der französischen Revolution, sowie den Forderungen der Industrialisierung hervorwuchsen. G.Monge (1746-1818) lehrte und vereinigte beide Methoden auf vorbildliche Weise und wurde so zum Schöpfer der analytischen Geometrie sowie der darstellenden Geometrie. Durch seinen Schüler L. Poinsot (1777-1859) erhielt bereits die geometrische Statik ihre mehr oder weniger abschließende Gestalt (Kap. II).

Sich am Vorbild von Poinsot und Monge orientierend, schuf A.F. Möbius (1790-1868) die Grundlagen der euklidischen geometrischen Mechanik des starren Körpers, indem er den Zusammenhang der Statik und der infinitesimalen Kinematik mit gewissen Begriffsbildungen der Liniengeometrie aufdeckte (Kap. III). Die mechanischen Interessen von Möbius trugen wesentlich zur Befruchtung seiner geometrischen Forschungen bei. Es sei an seinen "Barycentrischen Calcul" sowie seine Entdeckung des Nullsystems erinnert.

Die Erhebung der Geraden zum Raumelement und die entsprechende Ausarbeitung einer Liniengeometrie schuf fast aus dem Nichts heraus J.Plücker (1801-1868), der synthetische Geometer in analytisch-algebraischen Gewande (Kap. IV). Sein starkes Interesse an der Mechanik des starren Körpers übertrug sich auf seinen Schüler F.Klein (1849-1925), der den genauen Zusammenhang von Liniengeometrie und Mechanik erstmals vollkommen befriedigend klärte. Wie schon bei Möbius und Plücker vereinigten sich nun in besonderem Maße in Klein die Handhabung sowohl der synthetischen wie der analytischen Methode, was eine der wesentlichen Voraussetzungen zur Entstehung der geometrischen Mechanik, die sehr umfassende Fähigkeiten verlangte, war (Kap. V).

Kleins Beschäftigung mit Plückers Liniengeometrie fällt in die Zeit des Beginns seiner akademischen Studien. Etwas später entwarf er seine Gedanken zur nichteuklidischen Geometrie sowie zum gruppentheoretischen Aspekt der klassischen Geometrien (Erlanger Programm). Da die projektive Liniengeometrie am Beginn seiner mathematischen Forschungen stand, war es nur verständlich, daß er sie auch mit der nichteuklidischen Geometrie in Verbindung bringen wollte. Gleichzeitig wollte er dem Bedürfnis nach einer Durchleuchtung der Grundbegriffe der geometrischen Mechanik vom erhöhten Standpunkt der projektiven nichteuklidischen Geometrie Rechnung geben und regte seinen Schüler F. Lindemann (1852-1939) zu dessen fundamentaler Dissertation über die nichteuklidische Statik und infinitesimale Kinematik an (Kap. VI).

Diese Dissertation war der Keim zu Lindemanns Ruhm als Geometer, indem er wenig später von Klein den Auftrag erhielt, die "Vorlesungen über Geometrie" von A. Clebsch herauszugeben, die in großen Teilen von Lindemann selbst erst geschrieben werden mussten. Das daraus entstandene Werk erwies sich im nachhinein als d a s Lehrbuch der Geometrie des späten 19.Jh.. Lindemanns Souveränität auch im algebraisch-analytischen Bereich manifestierte sich wenig später anhand seines Beweises der Transzendenz von π im Jahre 1882.

Die nun in England weitergehende Entwicklung nahm entsprechend den dort herrschenden Verhältnissen einen anderen Charakter an. Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie begann mit W.K. Clifford (1845-1879), der diese bereits eigenständig mit der Mechanik des starren Körpers, sowie mit dem von ihm im Zusammenhang der elliptischen Geometrie entdeckten hyperkomplexen Zahlen (Biquaternionen) in Verbindung brachte. Die geometrische Mechanik hatte hier fruchtbare Auswirkungen auf die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie sowie der Algebra, insbesondere auf die Theorie der hyperkomplexen Zahlen. Es sei hier nur an die Forschungen A. Buchheims (1859-1888) und die sich daran anschließenden Arbeiten von E. Study (1862-1930) erinnert. Mit R.S. Heath (1861-1940) kam die nichteuklidische Mechanik des starren Körpers zu einem gewissen Abschluß, indem nun auch die Dynamik in die Betrachtungen mit eingeschlossen wurde (Kap. VII 1).

Währenddessen regte sich in Italien die differentialgeometrische Schule im Anschluß an E.Beltrami (1835-1900), und brachte als letzten Ausläufer die Arbeiten von D. de Francesco (1869-19 ?), der insbesondere Integrationsprobleme der Bewegungsgleichungen des starren Körpers in einem nichteuklidischen Raum behandelte, hervor (Kap. VII 2).

Der markante Rückgang der Beschäftigung mit der projektiven Geometrie Ende des 19.Jh. zusammen mit dem sich andeutenden Strukturwandel der Mathematik einerseits, sowie die kaum technische Verwendung findenden Methoden der geometrischen Mechanik andererseits führten zu einem fast totalen Aussterben der geometrischen Mechanik des starren Körpers (Abs.2).

2 Ursachen für den Rückgang der Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik

Stand die geometrische Mechanik, d.h. die Untersuchung der Mechanik des starren Körpers mit den Methoden der projektiven Geometrie und Liniengeometrie schon immer etwas am Rande, verschwand sie gegen Ende des 19.Jh. mehr und mehr aus denjenigen Forschungsgebieten, die einen größeren Kreis von Physikern und Mathematikern interessierten. Um das Jahr 1910 tauchte dieses einst blühende Gebiet zunächst vollkommen unter; etwas später, nach 1920, erschienen nur noch vereinzelte Arbeiten, bis dann erst in allerjüngster Zeit ein erneutes Interesse zu beobachten ist (vgl. Abs. 3.4).

Was waren die Gründe, die zum Untergang des Forschungsgebietes "Geometrische Mechanik" führten? Allgemein lag die Ursache in der sich schon Ende des 19.Jh. abzeichnenden grundlegenden und dramatischen Wende in der Behandlung und Auffassung der Mathematik, insbesondere der Geometrie. Betrachtet man diese Entwicklung etwas genauer, so ergeben sich für das "Verschwinden" der geometrischen Mechanik folgende vier wesentliche Ursachen:

1. Die Methoden der geometrischen Mechanik sind zu einem großen Teil M e t h o d e n d e r p r o j e k t i v e n G e o m e t r i e. Es kann daher nicht Wunder nehmen, wenn der Rückgang der Pflege der projektiven Geometrie mit dem Rückgang der geometrischen Mechanik mehr oder weniger parallel läuft. J.L. Coolidge (1873-1954) setzte in ((1934)) den Höhepunkt der projektiven Geometrie bei von Staudt (1847) an und sah die folgende Entwicklung nur noch als Verarbeitung und Anwendung der einmal gefundenen Prinzipien, die uns aber eine Riesenfülle schönster Gegenstände der Geometrie schenkten; gegen Ende des Jh. habe sich die Ernte dem Ende zugeneigt. (Dies war übrigens nur ein vorübergehender Zustand, der sich mit dem Aufkommen der projektiven Differentialgeometrie am Anfang des 20.Jh. drastisch änderte.) Als letztes großes Werk der projektiven Geometrie bezeichnete Coolidge ((1934, 227)) das heute noch als Standardwerk geltende Buch (1910/18) von O. Veblen (1880-1960) und J.W. Young (1879-1932). War die projektive Geometrie noch in den siebziger und achtziger Jahren Mittelpunkt der geometrischen Forschung, so verschob sich seitdem langsam der Schwerpunkt auf die Differentialgeometrie im Rahmen Riemannscher Mannigfaltigkeiten, sowie auf damit zusammenhängende topologische Fragen. Die synthetische Methode, deren Wert Felix Klein wiederholt hervorgehoben hatte, wurde trotz seines weitreichenden Einflußes gegen Ende des 19.Jh. völlig verdrängt. Diese Entwicklung ordnete sich ein in die das Gesicht der Mathematik völlig verändernde Tendenz zur Arithmetisierung und Axiomatisierung, die der Anschauung nur noch heuristischen und keinen selbständigen Wert mehr zuwies. Während Klein noch nach einer Vereinigung von Anschauung und Kalkül strebte, überrollte ihn die weitere Entwicklung, indem der Hauptstrom der Zeittendenz auf eine Ü b e r w i n d u n g d e r A n s c h a u u n g d u r c h d e n K a l k ü l gerichtet war.

War für B. Russel (1872-1970) in seinem "Essay ..." ((1897, 118 u. 200f.)) der projektive Raum noch das a priori Gefäß aller möglichen physikalischen Theorien, so galt das bereits für Riemann (1867) nicht mehr. Die zunächst als Pionierleistung zu betrachtende Schöpfung der nichteuklidischen Mechanik, d.h. vom differentialgeometrischen Standpunkt aus eine Mechanik in Räumen konstanter Krümmung, konnte nach der Rezeption der Auffassungen Riemanns den Abstraktionsansprüchen nicht mehr genügen. Man befasste sich nun mit Fragen der Differentialgeometrie von Räumen v a r i a b l e r Krümmung, für welche eine mechanische Anwendung erst in der Einsteinschen Gravitationstheorie zur Erscheinung kam. - Damit hatte die sich als Verallgemeinerung des euklidischen Punktraumes verstehende Riemannsche Geometrie endgültig durchgesetzt, bevor die projektive Geometrie und das in ihr wurzelnde Dualitätsprinzip eingehend auf ihren Realitätswert hin untersucht worden waren.

2. Die genannte A r i t h m e t i s i e r u n g nahm ihren Ausgangspunkt in den Grundlagenproblemen der Analysis. Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie zerstörte nach und nach das Vertrauen in die bis anhin kühn und virtuos gehandhabte geometrische Anschauung. Daraus ergab sich für viele Geometer die unmittelbare Konsequenz, daß auch die Geometrie vollständig arithmetisiert werden müsse, um überhaupt noch als streng wissenschaftliches Forschungsgebiet akzeptiert werden zu können. Hinzu kamen a x i o m a t i s c h e U n t e r s u c h u n g e n der Grundlagen der Geometrie durch M. Pasch (1843-1930) und D. Hilbert (1862-1943). Während noch Pasch nach einer Verankerung seiner Axiome in der Welt der Anschauung suchte, brach Hilbert vollkommen mit dieser Tradition und "zerriß die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie" ((Freudenthal 1960, 14)).

War die Geometrie einmal von der Realität und der Anschauung gelöst, erschien es nicht mehr als sinnvoll, sich auf die drei Dimensionen des Anschauungsraumes zu beschränken. Man trieb nun meist Geometrie in Räumen von beliebig vielen Dimensionen. Dies brachte wohl immense Fortschritte für die analytische Mechanik, indem nun die Struktur des Konfigurations- und Phasenraumes geometrisch untersucht werden konnte, war aber für die geometrische Mechanik im hier gemeinten Sinne mehr oder weniger bedeutungslos. - Coolidge ((1940, 87)) wies mit Nachdruck darauf hin, wie gerade die Grundlagenfragen der Geometrie, ausgelöst durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie, wesentlich zur abstrakten Auffassung der Mathematik im 20.Jh. beitrug. So war gerade dasjenige Gebiet, das die geometrische Forschung zunächst in ungeahnter Weise erweitert hatte, letztlich wesentlich am Untergang der Geometrie des Anschauungsraumes beteiligt.

H. Behnke ((1961, 130)) bezeichnete die Zeit der Hauptwirksamkeit von Felix Klein und dessen Auffassungen über die Mathematik, d.h. die Zeit von 1875 bis 1914, als das " V o r - H i l b e r t s c h e Z e i t a l t e r ". Denn erst nach dem ersten Weltkrieg kamen die Ideen von Hilbert, insbesondere zur Axiomatik, voll zum Tragen und begannen das Bild der Mathematik wesentlich zu prägen. Wie Behnke schrieb,

hatte Klein Hilberts Intentionen nicht mehr verstanden. Sie waren auch seinen eigenen Intentionen ziemlich diametral entgegengesetzt.[1] Felix Klein betrachtete nur solche Geometrien als sinnvoll, die zumindest der Möglichkeit nach in der uns umgebenden Welt Bedeutung haben könnten. Mit Hilbert begann dagegen das Studium beliebiger geometrischer Strukturen an sich, unabhängig von deren Zusammenhang mit der Wirklichkeit. Hier hatte eine geometrische Mechanik des starren Körpers im dreidimensionalen Raume keine mathematische Relevanz mehr.

3. Nachdem bisher die mehr innermathematischen Gründe des Rückgangs der Beschäftigung mit der geometrischen Mechanik untersucht wurden, stellt sich nun die Frage, ob nicht von der Technik, d.h. von der t e c h n i s c h e n M e c h a n i k her entscheidende Impulse zu ihrer Erforschung und Ausgestaltung kamen. Diese Frage muß klar mit Nein beantwortet werden. Die hier beschriebene geometrische Mechanik konnte nie eigentlich tiefer Fuß in der Experimentalphysik oder gar der technischen Mechanik fassen;[2] dies lag in ihrer Entbehrlichkeit bei den am häufigsten auftretenden physikalischen Problemen des starren Körpers, d.h. Problemen der Kreiseltheorie, begründet. Dort ist es nämlich bei den meisten konkreten und interessanten Spezialfällen möglich, den translatorischen von dem rotatorischen Anteil der Bewegung zu separieren, und so jede dieser Bewegungen für sich zu behandeln, anstatt im Sinne der Schraubentheorie eine Synthese der beiden Bewegungskomponenten vorzunehmen ⟪Stäckel 1905, 580⟫. Es gibt davon natürlich Ausnahmen, die aber wegen ihres etwas speziellen Charakters die Gesamtentwicklung nicht beeinflußen konnten, etwa "bei höheren Problemen, wo die Differentialgleichungen der Bewegung ein irreduzibles simultanes System in sechs Veränderlichen bilden. Das gilt zum Beispiel, wenn ein freier starrer Körper sich in einem widerstrebenden Mittel bewegt. Auf Gleichungen dieser Art führt auch das Problem der Bewegung eines starren Körpers in einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit." ⟪Stäckel 1905, 580⟫ Auch im Standardwerk von Klein und A. Sommerfeld (1868-1951) "Die Theorie des Kreisels" (1910) spielte die Schraubentheorie nur am Rande eine Rolle. Sie hatte nur für die Klärung gewisser theoretischer Probleme, wie der infinitesimalen Beweglichkeit, eine Bedeutung. In der Praxis wurde sie wegen ihrer Schwerfälligkeit eher gemieden. So ist neben Ball (1900) nur ein weiteres Lehrbuch zur geometrischen Mechanik (1908) von H. Timerding (1873-1945) erschienen. Bezüglich des geometrischen Hintergrundes trug es aber einen eher elementaren Charakter, mit dem Ziel, auch den Studenten der ersten Semester einen Einstieg in dieses schwierige Gebiet zu ermöglichen. So verzichtete Timerding bewußt auf die von Klein entwickelten projektiven Methoden der Liniengeometrie. Ebenso wenig wurden die Ergebnisse von Study (1903) verarbeitet. Hauptgesichtspunkt des Autors war, die "Begriffsbildungen der Mechanik auf rein geometrischem Wege herzuleiten." (1908, XI)

Der Versuch einer zusammenfassenden Synthese der Beiträge von Klein, Lindemann, Heath und Study ist bisher nie geleistet worden. Die notwendigen Begriffe waren da, es fehlte nur die lehrbuchmäßige Darstellung.

4. Die Auffassung der Materie als Aggregat von Atomen erreichte im 19.Jh. im Rahmen diverser mechanistischer Theorien ihren ersten Höhepunkt. Umso mehr muß es erstaunen, sich überhaupt eine Mechanik entwickeln zu sehen, eben die geometrische Mechanik, die den starren Körper an den Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen stellt, und nicht wie gewöhnlich den Massenpunkt. Das war tatsächlich weniger von praktischer als von grundlagentheoretischer Bedeutung. Obwohl mit einigen mathematischen Schwierigkeiten belastet, hat es durchaus seine Berechtigung, den starren Körper als primäres Element der Mechanik, und den Massenpunkt als abgeleitetes (ausgeartetes) Gebilde zu betrachten. Während des Triumphzuges des Atomismus konnte diese Auffassung allerdings keinen Fuß fassen und versank in der Vergangenheit - und mit ihr die geometrische Mechanik.

3. Ausblick ins 20.Jh.

Anhand a u s g e w ä h l t e r Literatur des 20.Jh. soll die Weiterverfolgung der Probleme und Theorien im Zusammenhang mit der geometrischen Mechanik des starren Körpers angedeutet werden, wobei freilich nicht alle Literatur erfasst werden konnte. Unberücksichtigt blieb insbesondere die nur schwer zugängliche Literatur Osteuropas (Rußland, Rumänien, Bulgarien usw.), wo im 20.Jh. intensiv auf dem Gebiet der geometrischen Mechanik sowie der nichteuklidischen Liniengeometrie geforscht wurde und wird. Hier bleibt eine Lücke, die von der zukünftigen historischen Forschung geschlossen werden muß. Die osteuropäische Literatur zur nichteuklidischen Geometrie und Liniengeometrie dürfte ziemlich vollständig bei Giering (1982) erfasst sein.

3.1 Geometrische Mechanik im euklidischen Raum

Gewisse Erweiterungen geometrischer und mechanischer Art seiner Schraubentheorie (1900) brachte Ball in den Arbeiten von (1901),(1903), (1904). Zindler (1902) enthält manche aufschlußreichen Einzelheiten.

Interessante geometrische Ergänzungen zur Schraubentheorie finden sich in Grünwald (1903a,b). (1905) verfolgte er eine schon von Klein (1902, 517ff.) gestellte Aufgabe "für jeden Freiheitsgrad eines starren Körpers Modelle einfacher Mechanismen anzugeben." (1905, 229)

Die gründlichen und bedeutenden Arbeiten (1924a,b) von Richard von Mises (1883-1953) markierten den Beginn der modernen Auseinandersetzung mit diesem Thema, obwohl dies erst einige Jahrzehnte später zum Ausdruck kommen sollte (vgl.Abs. 3.4). Die Aufsätze von v.Mises wurden bereits in Band 5 des Handbuchs der Physik von Geiger/ Scheel (1927; 228, 247f., 378, 440ff.) verarbeitet und diskutiert.

Fast als Relikt aus der schönen Zeit der Blüte der projektiven Geometrie erscheint einem die Arbeit von G. Haenzel (1927). Mit den synthetischen Methoden und Resultaten (1907/10) von Th. Reye (1839-1919) untersuchte Haenzel den Zusammenhang der verschiedenen Freiheitsgrade eines starren Körpers mit den entsprechenden Gebilden im Linienraum und im Raum der linearen Komplexe.

Als übersichtliche Einführung in Studys Gedankengebäude kann das Büchlein (1935) von E.A. Weiss (1900-1942) dienen. Es geht auch auf einige nichteuklidische Aspekte ein.- Hier ist auch K. Strubecker (1938) zu erwähnen. Verschiedene Übertragungsprinzipien zwischen nichteuklidischer Geometrie und euklidischer Kinematik diskutierte W.Benteli (1929).

Zum Schluß sei auf die reichhaltige Schrift von W. Blaschke (1885-1962) "Kinematik und Quaternionen" (1960) hingewiesen.

3.2 Geometrische Mechanik im nichteuklidischen Raum

Das erste Lehrbuch der nichteuklidischen Geometrie, das einen Teil der nichteuklidischen Mechanik widmet, stammt von H.Liebmann (1874-1939): (1905). Auf den starren Körper ging er allerdings nicht ein. Er behandelte in diesem Zusammenhang nur die elementare Statik, Bewegungen eines Massenpunktes, Newtonsches Potential und Planetenbewegungen.- Gewisse Fragen der elementaren nichteuklidischen Statik behandelte auch R. Sauer (1937). Dort finden sich weitere Literaturangaben zu diesem Thema. Hier ist auch wieder E.A. Weiss (1935) zu nennen.

Unter Verwendung der Grassmannschen Punktrechnung leitete A. Lotze (1936) in etwas spezieller Notation die Grundgleichungen der Mechanik im elliptischen Raum ab. Er gab kaum weitere Literaturhinweise.

Sehr reichhaltig - und sehr knapp - ist W.Blaschke (1942), der die elliptische Mechanik des starren Körpers behandelte; dabei standen die geometrisch-anschaulichen Aspekte nicht so sehr im Vordergrund. (1944) ist eine Zusammenfassung von (1942). Umfangreich und gründlich, vor allem hinsichtlich der analytischen Aspekte, ist R. Garnier (1951). Mit Hilfe der Variationsrechnung und des Ricci-Kalküls leitete E.Hölder (1956) die Bewegungsgleichung des starren Körpers in einen nichteuklidischen Raume ab; er stützte sich dabei hauptsächlich auf seine eigene Arbeit (1939).

Einen knappen Bericht über russische Forschungen gab Grigorian ((1960)).

Die Literatur über einzelne Fragen zur nichteuklidischen Kinematik und Bewegungslehre ist sehr reichhaltig. Es sei hier auf die umfangreichen Literaturverzeichnisse in C.A.Truesdell/R.A.Toupin (1960, 787f.) und vor allem bei O.Giering (1982) verwiesen.

Auf eine möglicherweise tiefere Bedeutung der nichteuklidischen Fassung des Kraft- und Energiebegriffs über das rein Mechanische hinaus wies zum ersten Mal ausführlich G.Adams (1956/59) hin. Einige daran anschließende und weitergehende Ausführungen stammen von P.Gschwind (1977), der (1979) auch den Zusammenhang zu neueren Entwicklungen in der Quantentheorie herstellte.

3.3 Axiomatik der Mechanik

Die ersten Versuche einer axiomatischen Fassung der Statik gehen auf A.F.Möbius (1837) zurück. Die erste auch modernen Kriterien standhaltene Arbeit zur Axiomatik der Mechanik (d.h. der Mechanik des starren Körpers und der Kontinua) stammte von G.Hamel (1877-1954): (1909). Hier wurden zum ersten Mal die notwendigen und hinreichenden Axiome explizit und mathematisch sauber ausformuliert. Für die Statik allein findet man dies schon etwas früher bei R.Marcolongo/H.Timerding (1911) (die italienische Ausgabe erschien 1905). Im Handbuch der Physik, Band 5, behandelte Hamel (1927) verschiedene mögliche Axiomensysteme.

Erst in neuerer Zeit mißt man solchen grundlagentheoretischen und axiomatischen Betrachtungen im Rahmen der Mechanik wieder vermehrt Bedeutung zu. Reichhaltige Literaturangaben zur Entwicklung der Axiomatik der Mechanik findet man in C.A. Truesdell/R.A. Toupin (1960, 788-790). In den sechziger Jahren begann eine grundsätzliche Neuorientierung auf diesem Gebiet, die sich an neuere Entwicklungen der Kontinuumsmechanik anschloß und vor allem mit den Namen W.Noll (1974) und C.Truesdell verknüpft ist. Eine erste zusammenfassende Darstellung der Konzepte und Grundgedanken dieser Theorie findet sich in Truesdell (1977). Man vergleiche auch Truesdell ((1968, Ch. VIII)) und Truesdell (1966).

3.4 Schraubenrechnung und die Theorie der Mechanismen

Eine bedeutende Reaktivierung der Schraubentheorie brachte die Übersetzung des russischen Werkes von F.M.Dimentberg ins Amerikanische: "Screw Calculus an its Applications in Mechanics" (1968). In diesem Zusammenhang begann man sich wieder an die grundlegende Arbeit von R. v.Mises (1924a,b) zu erinnern.

Die Literatur in euklidischer Kinematik und Mechanismentheorie ist mittlerweile nahezu unübersehbar - vgl. die Bibliographie von J.de Groot ((1970)) und C.A.Truesdell/R.A.Toupin (1960, 784-788). Die wichtigsten auf die Schraubentheorie bezüglichen Arbeiten sind bei K.H.Hunt (1978) aufgeführt. Dies ist im übrigen ein geometrisch-anschaulich und mathematisch klar geschriebenes Lehrbuch der geometrischen Mechanismentheorie; wir finden darin etwa auch eine ausführliche Diskussion der Methoden von Plücker und Ball. Mehr mathematisch orientiert, aber doch auch konkrete Einzelfälle diskutierend, ist das Standardwerk von O.Bottema/

B.Roth (1979).

Erst in jüngerer Zeit ist ein erneutes Interesse an der geometrischen Mechanik des starren Körpers feststellbar und zwar jetzt insbesondere im Zusammenhang mit Problemen um die Theorie und den Entwurf mehrgliedriger Gelenksysteme, die beim Bau von ferngesteuerten Werkzeugmaschinen (Industrieroboter) eine wesentliche Rolle spielen. Hier erweisen sich die allgemeinen Methoden der geometrischen Mechanik wiederum als bedeutsam und fruchtbar. Diese Entwicklung führt uns in die unmittelbare Gegenwart und Zukunft. Hier seien stellvertretend die Arbeiten von H. Lipkin/ J. Duffy (1982) und (1984) genannt.

Anmerkungen

Anmerkungen zum Kapitel I

1 Vgl. Truesdell ⟪1960⟫, ⟪1968⟫.

2 Vgl. zu diesen graphischen Verfahren etwa Proell (1874) und den Bericht von Shaw ⟪1892⟫.

3 Vgl. aber Henneberg ⟪1894⟫, ⟪1903⟫.

4 In der vorliegenden Arbeit werden nur die allerersten Anfänge der euklidischen Kinematik besprochen, insofern sie einen Zusammenhang mit der Liniengeometrie aufweisen. Für Einzelheiten, sowie auf spätere Entwicklungen sei auf Schoenflies (1886) verwiesen, Schoenflies/Grübler ⟪1902⟫, Timerding ⟪1902⟫ und die Bibliographie von Groot ⟪1970⟫. Siehe auch Abs. VIII 3.1 und 3.4.

5 Mit der Schraubentheorie Robert Balls (1900) beschäftigt sich diese Arbeit ebenfalls nur insofern, als sie eine Verbindung mit der Liniengeometrie aufweist (vgl. Abs. V 4). Ihrem Schöpfer Ball lag weniger an einheitlichen Prinzipien als an mannigfaltigen Methoden, deren Darstellung den Rahmen der vorliegenden Untersuchung sprengen, und eigentlich eine ausschließlich ihr gewidmete Analyse verlangen würden, die bisher noch nicht geleistet wurde.

6 Vgl. etwa Voss ⟪1901⟫, Duhem ⟪1905⟫, Dugas ⟪1950⟫, Szabó ⟪1979⟫. Zur Geschichte der Differentialprinzipien der Mechanik im nichteuklidischen Raum gibt es m.E. außer Stäckel ⟪1903⟫ keine Literatur (die ersten Anfänge werden kurz in den Abschnitten VII 2.2 und 3.2 erwähnt). Dasselbe gilt für die Mechanik der Kontinua in nichteuklidischer Fassung. Zur Originalliteratur vgl. die Bibliographie in Truesdell/Toupin (1960, 784ff.).

7 Vgl. etwa Bonola/Liebmann ⟪1908⟫, Loria ⟪1888⟫, Kötter ⟪1901⟫, Boyer ⟪1956⟫.

8 Vgl. etwa Mainzer ⟪1980⟫, Kline ⟪1972⟫. Die Enzyklopädie-Artikel Schoenflies ⟪1909⟫, Zindler ⟪1921⟫ haben mehr bibliographisch-systematischen Charakter und gehen auf Anwendungen nicht ein. Coolidge ⟪1940⟫ gibt wohl noch die ausführlichsten Erwähnungen der Liniengeometrie,die über die allerersten Anfänge hinausgehen. Auf Anwendungen geht er allerdings auch nicht ein. Ball (1900) etwa wird nur beiläufig erwähnt ⟪1940, 266f.⟫. Gray ⟪1979b, 162⟫ weist wohl auf die Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf den nichteuklidischen Raum durch Lipschitz (1872) hin, erwähnt aber die geometrische Mechanik überhaupt nicht.

9 So wird die geometrische Mechanik m. E. mit keinem Wort erwähnt bei Voss ⟪1901⟫, Duhem ⟪1905⟫, Mach ⟪1933⟫, Dugas ⟪1950⟫, Szabó ⟪1979⟫. Ausnahmen bilden die Enzyklopädie-Artikel Timerding ⟪1902⟫, Stäckel ⟪1905⟫, wo allerdings der Zusammenhang zur nichteuklidischen Geometrie und zum fünfdimensionalen Raum der linearen Komplexe nicht hergestellt wird. Zudem handelt es sich bei den meisten Aufsätzen in der "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" nicht um rein historische Analysen, sondern um systematische Darstellungen in historischer Perspektive.

10 Diese Entwicklung hatte auch ihre Auswirkungen auf die Algebra (hyperkomplexe Zahlen), worauf im Kapitel VII kurz eingegangen werden soll; sie harrt ebenso noch einer genauen historischen Analyse. Man vgl. dazu aber Rothe ⟪1916⟫.

Anmerkungen zum Kapitel II

1 Die Entstehungsbedingungen der Ecole Polytechnique werden etwa in Manegold ⟪1966⟫ und Wussing ⟪1958⟫ untersucht.

2 Siehe die Tabellen 4 und 5 in Grattan-Guiness ⟪1981, 114f.⟫.

3 Vgl. dazu Grattan-Guiness ⟪1981, 97-100⟫. Wir stützen uns in diesem Abschnitt im wesentlichen auf diesen prägnanten und informativen Übersichtsartikel. Siehe auch Grattan-Guiness ⟪1982⟫.

4 Ein wenig Licht in diese komplexe Situation wirft Grattan-Guiness ((1981)).

5 Für weitere Ausführungen und genaue bibliographische Angaben zur komplizierten Editionsgeschichte der Mongeschen Werke verwiesen auf das Standardwerk von Taton ((1951)).

6 Eine gute Übersicht gibt Boyer ((1954)), dem sich die folgende Darstellung anschließt.

7 Vgl. Cantor ((1908, 453-456)) und Boyer ((1954, 456-458)). Belege aus der Originalliteratur folgen weiter unten.-Was im 19.Jh. (und bis heute) "analytische Geometrie", also ein m a t h e m a t h i s c h e s G e b i e t , genannt wurde, war beherrscht von zwei Grundprinzipien: einerseits die Darstellung von geometrischen Gebilden und Systemen solcher Gebilde durch Koordinaten bzw. Gleichungen zwischen Koordinaten und andererseits die Lösung geometrischer Aufgaben durch algebraische Operationen mit diesen Gleichungen. Das Gebiet der synthetischen Geometrie war gekennzeichnet durch die die Anschauung verwendende Ableitung von Sätzen über das Verhalten geometrischer Begriffe und Figuren untereinander. Durch die Verwendung von Zahlen und Symbolen, sowie deren Verknüpfungsregeln, vermeinten die analytischen Geometer von Anfang an eine größere Sicherheit in ihren Schlüßen zu haben, während die synthetischen Geometer die ihren Anschauungen zugrundeliegenden Axiome erst gegen Ende des 19.Jh. genauer zu untersuchen begannen. Dann erwies sich allerdings die Strenge auch dieser Methode vollumfänglich.

8 Es ist interessant, hier anzumerken, daß Lagrange mit einer Arbeit "Solutions analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires" von 1773 in der Geschichte der analytischen Geometrie eine gewisse Rolle gespielt hat ((vgl. dazu Boyer 1956, 200-204)). Was diese Arbeit auszeichnet, ist ihre völlige Allgemeinheit und Eleganz in der Methode. Es findet sich keine einzige Figur darin. Er bedauert, nur e i n Beispiel der Anwendung der analytischen Methode auf die elementare Geometrie geben zu können. Lagrange war kein Geometer - er schrieb nie ein Lehrbuch über diesen Gegenstand. Boyer bemerkte dazu: "He turned instead to physics and in the 'Mêchanique analitique' of 1788 he did for mechanics what he might have done for geometry - developed the subject from first principles without reference, as he specifically boasted, to a single diagram."

9 Vgl. zum obigen Coolidge ((1940, 112-114)). Eine ausführliche Würdigung von Monges Beiträgen zur synthetischen Geometrie findet man bei Chasles (1875, § 1-20) sowie Chasles ((1870)) und mehr ins Einzelne gehend in Kötter ((1901)). Bei Taton ((1951)) vgl. Chaps. II und V.

10 Boyer ((1956, 210f.)). Es sind hier die metrischen Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen gemeint.

11 Für das Folgende haben wir wesentlich von der vorbildlichen Darstellung von Boyer ((1956)) profitiert. Vgl. auch Fano ((1907)).

12 Vgl. Boyer ((1956, Chap. IX)).

13 Vgl. zu Poncelet Boyer ((1956, Chap, IX)) und Taton, R. "Poncelet" im DSB.

14 "Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie", Annales de math. 8 (1817/18, 141-155).- Diese Arbeit war leider unzugänglich. Vgl. dazu Boyer ((1956, 231)).

15 Das Prinzip der Kontinuität besagte in der damaligen Auffassung ((vgl. Fano 1907, 233f.)), daß eine Eigenschaft einer geometrischen Figur, die einmal vorhanden ist, bei kontinuierlicher Änderung der Figur nicht verschwinden kann. Man fühlte sich folglich berechtigt, aus dem Falle, in welchem gewisse zum Beweise erforderliche Elemente wirklich auftreten, auch auf den Fall zu schließen, in welchem diese Elemente imaginär sind.

16 Zu diesem Streit vgl. etw Kötter ((1901, 160-168)) und Boyer ((1956, 238-240)).

17 Insbesondere Truesdell ((1960)) und ((1968)). Vgl. auch Fraser ((1983)).

18 Eine detaillierte, die sachlichen Entwicklungen von Lagrange bis 1857 beschreibende Übersicht gibt Cayley ((1857)). Siehe auch Dugas ((1950)).

19 Vgl. Grattan-Guiness ((1981, Sect. 2)). Für Cauchy vgl. Truesdell ((1968, 184-238)) und für Lagrange auch Truesdell ((1960, 409ff.)).

20 Vgl. dazu Taton, R. "Poncelet" im DSB. Dort findet sich auch eine sehr ausführliche Bibliographie der Original- und Sekundärliteratur. Die Bedeutung von Poncelet als Techniker wird auch gewürdigt in Grattan-Guiness ((1984)).- Die allgemeine Bedeutung der Mathematik für die Entwicklung der Technik im 19.Jh. wird ausführlich in Rühlmann ((1885)) behandelt. Vgl. dazu auch Klemm ((1966)), der ebenso besonders auf Monge und Poncelet hinweist.

21 Für Einzelheiten vgl. Schoenflies/Grübler ((1902, 226)) und für die Entwicklung seit der Zeit von Euler und Lagrange auch Cayley ((1862, 552ff.))

22 Vgl. Timerding ((1902, 161-163)). Dies findet sich nicht alles schon in der ersten Auflage, sondern kam erst später hinzu. Siehe dazu Taton ((1951, 312-314)).

23 Bailhache ((1975, 211)) gibt die Erscheinungsdaten aller Auflagen und nennt die entsprechenden Anhänge.

24 Für Poinsot als Vorläufer von Möbius vgl. auch de Vries ((1934)), Hist. Stud. XI (Over Möbius' mechanisch-geometrische studiën).

25 Für die genauen bibliographischen Angaben verweisen wir auf Bailhache ((1975, 211-214)).

26 Cauchy hat schon vor Poinsot eine Art Trägheitsellipsoid betrachtet. Vgl. die historische Übersicht bei Cayley ((1862, 559ff.)).

27 Vgl. dazu Taton, R."Poinsot" im DSB.

28 Vgl. dazu etwa Ziegler (1981, 127).

29 Chasles' mannigfache Beiträge zur euklidischen Kinematik, die er oft ohne Beweis publizierte, werden hier nicht weiter verfolgt, Die für die vorliegende Arbeit wichtigen Aspekte werden in den Abschnitten 5, III 4 und 5 diskutiert. Ins Einzelne gehende Darstellungen findet man etwa bei Kötter ((1901, 366-377)), Schoenflies/Grübler ((1902, 190-248)), Zindler ((1921, 998-1000)). Vgl. auch Chasles ((1870)).

30 Vgl. dazu etwa Kötter ((1901, 363-369, 191f.)) und Zindler ((1921, 996f.)).

31 Vgl. für eine Übersicht zum Werk und zur Person von Chasles Klein ((1926, 140f.)) und Koppelmann, E. "Chasles" im DSB.

32 Seine Begeisterung für die neuen Methoden der Geometrie sowie deren historische Wurzeln war grenzenlos.
Verbunden mit einer gewissen Neigung zur Spekulation führte dies zu Resultaten verschiedenster Qualität. Wir erwähnen hier, außer den eben zitierten Äußerungen zur Dualität in der Mechanik, seine kühnen Beweisführungen im Bereich der Imaginärtheorie, sowie seine fruchtbaren historischen Forschungen im "Apercu historique..." (1875) zur Geburt der projektiven Geometrie, die in verschiedenen Abhandlungen weiterverfolgt wurden. Daß Chasles in seiner Entdecker-und Kombinierfreude Opfer einer grandiosen Fälschung wurde, kann nun kaum mehr erstaunen ((vgl. zu dieser Anmerkung Klein 1926, 140-147)).

Anmerkungen zum Kapitel III

1 Obwohl natürlich Euler, wie auch J.L. Lagrange (1736-1813) und J.H. Lambert (1728-1777) teilweise in Berlin gewirkt haben, ist ihr Einfluß auf Deutschland gering geblieben. Zudem wirkten sie als Mitglieder der Akademie nicht lehrend. Die Universität in Berlin wurde erst 1810 gegründet.

2 Lorey ((1916, 24)). Für eine umfassende Beschreibung des Standes der Mathematiker um 1800 siehe Mehrtens ((1981b)).

3 Wie sehr eine solche Entwicklung von den geistigen Führern des Neuhumanismus verurteilt wurde, zeigt sich an Schillers Analyse des Geistes der Aufklärung sowie der französischen Revolution in den ersten acht seiner Briefe "Über die ästhetische Erziehung des Menschen" von 1793/94.

4 Vgl. dazu Manegold ((1966)), Lorey ((1916, 40-55)) und Schubring ((1981)) und für den sozialen Umkreis auch Dauben ((1981a)).

5 de Vries ((1934)), Hist. Stud.X (De oudste homogene coordinaten), S.85.

6 Zum Lebenslauf von Möbius vgl. Baltzer ((1885)) und für mehr persönliche Züge Bruhns ((1878)).

7 Möbius beruft sich hier auf ein Referat der Arbeit von Chasles durch Gergonne: "Démonstration d'un théorème de M. Chasles" (1828) im Bulletin des sciences math., astr.,phys. et chim. 10 (1828), 187. Gergonne gibt keinen Hinweis auf seine Quelle.

8 Eine ausführlichere, mehr ins Einzelne gehende Diskussion gibt de Vries ((1940)), Hist.Stud.XVII (Over krachten en rotaties), S. 63-83.

9 Einen Überblick über diese Arbeiten gibt Reinhardt ((1887)) und Baltzer ((1885)).

10 Für eine Diskussion dieser Arbeiten vgl. de Vries ((1934)), Hist.Stud. XXI (Over kettingbreuken, projectieve punktenreeksen en verrekijkers), S. 221-261.

11 Siehe Crowe ((1967, 48-52)).

12 Vgl. für die Geschichte des Prinzips Voss ((1901, 66-73)), Marcolongo/ Timerding ((1911, 263)) und Duhem ((1905, Chap. VI)).

13 Eine kurze Diskussion dieser "Beweise" gibt Voss ((1901, 66-73)). Vgl. auch Fraser ((1983)).-

14 Bailhache ((1975)) analysiert - fundiert und flüssig geschrieben - die entsprechenden Arbeiten Poinsots, die zusammen mit handschriftlichen Anmerkungen von Lagrange, dort auch reproduziert wurden. Sie werden mit den Beiträgen der oben im Text genannten Persönlichkeiten konfrontiert und kritisch gewürdigt.- Diese Kontroverse zwischen Lagrange und Poinsot um dieses Prinzip ist heikel und vielschichtig. Eine Begründung der Statik auf ein sich dynamischen Überlegungen bedienendes Prinzip schien Poinsot fragwürdig, deshalb wollte er das Prinzip eliminieren. Lagrange andererseits - weit weniger an Prinzipienfragen interessiert wie Poinsot - bemerkte die Fruchtbarkeit des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für die analytische Mechanik, was ihm Beweis genug war.

15 Sie spielt in der Geschichte der Theorie der Parameterdarstellungen orthogonaler Matrizen eine gewisse Rolle; vgl. dazu Hawkins ((1977a, 88)).

16 Vgl. den Hinweis (bezüglich einer Formel für die Rotation eines Körpers um zwei Achsen) auf Rodrigues (1840) in Chasles (1861a, 194).

17 Auf weitere Einzelheiten dieser Abhandlung wird nicht eingegangen. Chasles bespricht seine hierhergehörigen Arbeiten selbst in ((1870, 110ff. und 242ff.)).

18 Vgl. Schoenflies/Grübler ((1902)). Hier werden die wichtigsten Ergebnisse von Mannheim und anderen diskutiert. Siehe dazu auch Fiedler ((1876)) und Chasles ((1870, 292-302)). Eine bis heute unübertroffene zusammenfassende Darstellung gab A.Schoenflies (1853-1928) in seiner "Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung" (1886).

19 Vgl. dazu Ziegler (1981, 124ff.)

20 Eine knappe Diskussion dieser Arbeiten gibt Kötter ((1901, 376f.)).

21 Vgl. dazu die Verweise von Lindemann (1874) auf Chasles (1830),(1834), (1860),(1861a,b).

22 Vgl. Taton ((1952)) und Müller ((1910, 722)).

Anmerkungen zum Kapitel IV

1 Zu A. von Humboldt vgl. Beck ((1959/61)).

2 Vgl. Hofmann ((1959, 240 Anm. 2)), Beck ((1961, 79)).

3 In dieser Schärfe finden wir allerdings diese 'Synthese' bei Humboldt nicht verwirklicht. Er legte noch Wert darauf (im Gegensatz zu Jacobi), daß die mathematischen Wissenschaften ihre Anwendung fänden ((Biermann 1959, 88f.)). Humboldt war ein Mensch des Übergangs, in welchem die zwei genannten, an sich etwas widersprüchlichen Tendenzen, sich zu einer fruchtbaren Einheit verschmolzen. Die Entwicklung der Naturwissenschaften in Deutschland v o r seinem Wirken in Berlin (bis etwa 1820), wie auch die Entwicklung n a c h ihm (von etwa 1840 an) ging andere Wege, als er selbst sie vorlebte.

4 Siehe auch dazu die ausführliche Studie Biermann ((1959)). Über die Stellung Humboldts zur Mathematik und Mathematikgeschichte vgl. Hofmann ((1959)).

5 Siehe Eccarius ((1975)). Darin finden sich auch biographische Einzelheiten zu Crelle.

6 Vgl. dazu Eccarius ((1981)).

7 Vgl. Biermann ((1968)), Beck ((1961, 77ff.)).

8 So schrieb etwa E.du Bois-Reymond (1816-1896) über ihn 1849 an Karl Ludwig (1816-1895): "Jeder strebsame Gelehrte ... ist Humboldts Sohn, wir alle sind seine Familie.... Er ist unser aller und des Geschlechts vor uns guter Engel schon immer gewesen. ...Was er war wird man erst empfinden, wenn seine liebreiche mächtige Hand nicht mehr zu unserem Besten walten wird." ((Zitiert nach Biermann 1959, 107f.)).

9 Vgl. dazu Degen ((1956)), Hofmann ((1959, 254f.)), Beck ((1961, 85ff.)).

10 Eine sehr detailreiche historisch-systematische Darstellung dieser Entwicklung bis etwa 1860 gibt Kötter ((1901)).

11 Siehe insbesondere sein Hauptwerk (1832).

12 Für eine moderne Darstellung vgl. Veblen/Young (1910, 141ff.) und Coxeter (1965, 71 ff.).

13 Siehe auch Boyer ((1956, Chap. IX)).

14 Vgl. dazu de Vries ((1934)), Hist. Stud. XII (Julius Plücker), S.201.

15 Eine gute Übersicht über Leben und Werk von Cayley gibt Forsyth ((1895)). Vgl. auch Meyer ((1892)) und Brill/Noether ((1894)).

16 Für eine gute Biographie vgl. Ernst ((1933)) und Dronke ((1871)).

17 Eine kompetente und umfassende Würdigung Plückers sowohl in historischer wie in sachlicher Hinsicht findet man in Clebsch ((1895)).

18 Das Originalmanuskript der Abhandlung (1826) wurde von Schoenflies entdeckt und ((1904)) publiziert.

19 Eine ausführliche Diskussion der ganzen Auseinandersetzung findet sich in Plücker ((1895, 592-595)), Ernst ((1933, 11-14)); vgl. auch Kötter ((1901, 137f. und 160-167)).

20 Vgl. Clebsch ((1895, XIV)) und de Vries ((1934)), Hist.Stud. XII (Julius Plücker), S. 121f..

21 Ernst ((1933, 85)). Der Gegensatz Plücker-Steiner wird in Eccarius ((1980)) einer detaillierten Analyse unterworfen.-

22 In einem Brief S.H. Aronholds (1819-1884) an O.Hesse (1811-1874) vom 18.12.1849 findet sich die Passage: "... [Steiner] scheint sich schon durch Ihre früheren Arbeiten verletzt zu fühlen, wie überhaupt durch die der Analytiker, und es ist besonders P l ü c k e r , den er gründlich haßt, und welcher wohl seine geringe Zärtlichkeit für die Analysis hervorgerufen hat." ((Zitiert nach Gundelfinger 1902, 64)).- Zu Steiners Eigenart und Wirkung vgl. auch Klein ((1926, 126-131)) und Biermann ((1973, 38-41)).

23 Vgl. das Schreiben von Plücker an die Behörde in Ernst ⟪1933, 44f.⟫.

24 Zitiert nach Dronke ⟪1871, 12⟫.

25 Vgl. dazu Ernst ⟪1933, 41-83⟫ und Riecke ⟪1896⟫.

26 Vgl. Ernst ⟪1933, 37⟫ und Plückers Jahresbericht für 1865 zuhänden des Kultusministers, veröffentlicht in Ernst ⟪1933, 38⟫.

27 Veröffentlicht in Ernst ⟪1933, 81⟫.

28 Veröffentlicht in Ernst ⟪1933, 81f.⟫.

29 Veröffentlicht in Ernst ⟪1933, 38⟫.

30 Plücker geht in dieser ersten Arbeit (1865b) formal noch etwas umständlich vor. Wir geben deshalb seine genaueren Ausführungen hier nicht wieder, sondern nur seine Resultate. Wir kommen darauf zurück bei der Besprechung der "Neuen Geometrie..." (1868/69) im Abschnitt 4.

31 Im folgenden führt Plücker den Begriff des sogenannten "linear complex of forces" ein. Dieser ist definiert durch die Gleichung in Linienkoordinaten, bei der es keine freien multiplikativen Konstanten mehr gibt, also etwa durch die inhomogenen Gleichung $\bar{a}\cdot p + a\cdot\bar{p} - 1 = 0$. - Da diese Art Kräftekomplex für die weitere Entwicklung der geometrischen Mechanik keine Bedeutung hat, werden wir nicht weiter darauf eingehen.

32 Näheres dazu findet sich bei Schoenflies in Plücker ⟪1895, 615⟫ und Schoenflies ⟪1904⟫.

33 Nach Schoenflies ⟪1904, 402⟫ liegt der Grund dieser Unklarheit im undualistischen Charakter der Materie begründet. Daraus folgert er, daß die Plückerschen Ideen keine mechanische Tragweite haben.

34 Vgl. dazu und zum folgenden, insbesondere Abschnitt 4.2 und 4.3, Blaschke ⟪1954⟫.

35 Vgl. Plücker (1868, 90-97) oder etwas übersichtlicher in Clebsch/Lindemann (1891, 59-61), wo auch die Herkunft der Bezeichnung "Zylindroid" für diese Fläche geklärt wird (S.62,Anm.); vgl. dazu auch Ball (1900, 20).

36 Plücker (1865b. 537f.). Siehe dazu Abschnitt 3.1.

37 Vgl. Segre ⟪1919⟫.

38 Das Moment zweier Geraden hat gleichzeitig Cayley (1869) eingeführt, es aber nicht weiter verwendet. Nach eigenem Zeugnis kannte Zeuthen bei der Abfassung seiner Arbeit Cayleys Abhandlung nicht (Zeuthen 1869, 432, Anm.). Formal hat dieses Moment bereits Möbius (1829) betrachtet (vgl. dazu Abs. III 2.1).

39 Die im Abschnitt III 5.2 besprochene Abhandlung Cayleys von (1869) deutet ganz am Schluß auch eine Art metrischer Tetraederkoordinaten einer geraden Linie an (1869, 96f.). Diese Koordinaten sind im wesentlichen die selben wie diejenigen von Zeuthen - nur hat eben Cayley nicht denselben Gesichtspunkt. Ihm ging es nicht explizit um eine von Punkt-oder Ebenenkoordinaten unabhängige Einführung der Linienkoordinaten, sondern einfach um eine weitere mögliche Darstellung derselben.

40 Vgl. Struik ⟪1980, 196f.⟫, Bottazzini ⟪1980⟫ und ⟪1981⟫, sowie Neuenschwander ⟪1978, 1-3⟫.

Anmerkungen zum Kapitel V

1 Zugrundegelegt wird hier vor allem Klein (1926, § 20ff.). Die synthetische Theorie der linearen Komplexe findet man etwa bei Ziegler (1981, Abs. II 2 und 3).

2 Vgl. wieder Klein (1926, § 22). Für die synthetische Theorie verweisen wir auf Ziegler (1981, Abs. II 5).

3 Obige Betrachtung ist aus Klein (1926, 95f.).

4 Dies kam allerdings in der Originalabhandlung (1870b) nicht deutlich zum Ausdruck. Erst in der überarbeiteten Fassung in den Gesammelten Mathematischen Abhandlungen ⟪1921⟫ wird klar, daß Klein es so gemeint haben muß. Gleichzeitig mit ihm hat auch Battaglini das gegenseitige Moment zweier linearer Komplexe eingeführt (vgl. Abs. IV 6).

5 Diese Fassung des Textes stammt aus einer Korrektur, die Klein bei der Neuherausgabe seiner Werke ⟪1921, 81f.⟫ zugefügt hat. In der Originalfassung von (1870b) ist diese Sache noch nicht ganz richtig dargestellt.

6 Vgl. dazu Ziegler (1981, 263-276).

7 Vgl. dazu Klein (1926, § 23).

8 In etwas anderer Weise wurde dieser Satz schon im Abschnitt IV 4.2 bewiesen. Bei Battaglini (1869d) findet sich schon eine ähnliche Ableitung wie diejenige von Klein.

9 Dieser Punkt wird von Klein allerdings an erster Stelle angeführt.

10 Es sei hier nur etwa auf seine Beschäftigung mit der projektiven Begründung des Doppelverhältnisses und der Imaginärtheorie verwiesen. Vgl. dazu Kleins Kommentare in ⟪1921, 51f. und 241f.⟫.

11 Vgl. dazu Klein ⟪1921, 50f. und 411f.⟫, ⟪1923, 14-18⟫ und Voss ⟪1919⟫.

12 Vgl. das Zitat am Anfang von Abschnitt IV 5.

13 Auf die einander ergänzende Einwirkung von Plücker und Clebsch auf Klein weist auch Wirtinger ⟪1919, 287⟫ hin.

14 Antrittsrede in Erlangen (7.December 1872), Blatt 10. (Publiziert in: Felix Klein, Handschriftlicher Nachlass, herausgegeben vom Mathematischen Institut der Friedrich Alexander Universität in Erlangen durch Konrad Jacobs, Erlangen 1977).

15 Diese Intention war übrigens nur Ausdruck von Kleins allgemeiner Haltung "den Zusammenhang entfernt liegender Gebiete aufzudecken und auf diese Weise neue fruchtbare Forschungsmöglichkeiten zu schaffen." ⟪Carathéodory 1919, 299⟫.

16 Vgl. Schuberth ⟪1971, insbesondere 16ff.⟫ und Hawkins ⟪1980, 316-324⟫. Bei letzterem wird Kleins Denkweise derjenigen W.Killings ⟪1847-1923⟫, der in Berlin bei K. Weierstrass (1815-1897) ausgebildet wurde, gegenübergestellt; vgl. für Kleins Methode insbesondere S. 320ff..

17 Die genetische Methode war zu den Zeiten vor Klein die allgemein übliche. Erst im Zuge der von Weierstrass impulsierten Revolution der Strenge in der Mathematik lehnte man sich gegen diese Denkweise auf. Klein hat sie jedoch - entgegen der allgemeinen Zeittendenz - bewußt weiter gepflegt, sich konsequent zu eigen gemacht und sie auch in seinen Bestrebungen zur Reformierung des Unterrichtswesens öffentlich vertreten ⟪vgl. dazu Schuberth 1971⟫.

18 Vgl. dazu Stäckel ⟪1905, 580⟫ und Klein ⟪1902, 528f.⟫.

19 Vgl. Klein ⟪1921, 50⟫ und insbesondere Klein ⟪1923, 14ff.⟫.

20 Vgl. Anm. 14, insbesondere Blatt 8.

21 Vgl. dazu insbesondere Mises ⟪1924, 88f.⟫. Seine Unternehmungen zur Förderung der angewandten Wissenschaften sind hinlänglich bekannt. Vgl. etwa die zeitgenössischen Berichte Sommerfeld ⟪1919⟫, Prandtl ⟪1919⟫ und Mises ⟪1924⟫.

22 Ball hat die historischen Wurzeln und die Entwicklung seiner Theorie anhand einer kritischen, mit Inhaltsangaben versehenen und chronologisch geordneten Bibliographie in seinem Hauptwerk (1900, 510-539) selbst dargestellt, so daß hier auf eine Aufzählung seiner und anderer Schriften zur Schraubentheorie verzichtet werden kann. Ein ausführliches Referat der Entwicklung bis 1876 gibt Fiedler ⟪1876⟫.

23 Vgl. dazu Timerding (1908, Vff.), der auf den beträchtlichen Umfang eines solchen Unternehmens hinweist - insbesondere wegen der neueren Untersuchungen von Study (1903).

24 Eine knappe Skizze findet man bei Timerding ((1902, 146-160)). Eine Übersetzung und Bearbeitung der Ballschen Arbeiten bis 1889 findet man in Ball (1889b).

25 Vgl. etwa Ball (1900, 69ff.).

26 Ball war zudem ein bekannter Vortragsredner und Autor populärwissenschaftlicher Bücher. Vgl. zu seiner Biographie W.V.Ball ((1915)), [Ball] ((1913)), ((1915)) und Moseley ((1979)).

27 Vgl. dazu etwa Goldstein (1980, 190f.).

Anmerkungen zum Kapitel VI

1 Es ist hier nicht der Ort, den dafür verantwortlichen Gründen nachzugehen. Man vgl. zur Frühgeschichte der nichteuklidischen Geometrie etwa Bonola/Liebmann ((1908)), Reichardt ((1976)), Gray ((1979a)).- Auf die bewußtseinsgeschichtliche Bedeutung der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie weist insbesondere Tóth ((1972)), ((1979)) nachdrücklich hin. Vgl. dazu auch Abs. 2.3.

2 Wie Scholz ((1982, 216ff.)) nachweist, kannte Riemann mit großer Sicherheit die Schriften von Lobačevskij und Bolyai bei der Abfassung von (1867) nicht.Ihn interessierte weniger die im Zusammenhang mit der nichteuklidischen Geometrie stehende mathematische Grundlagenforschung, als die Frage, wie sich der Raumbegriff an die physikalische Realität anpassen läßt. Seine diesbezüglichen Ideen, die zugleich einen neuen Ansatz in der Differentialgeometrie begründeten, setzten sich aber nur langsam durch ((vgl. dazu Scholz 1980)).- Die unmittelbaren Auswirkungen von Riemann (1867) auf seine Zeitgenossen untersucht Portnoy ((1982)).

3 Vgl. Klein ((1921, 50)) und Scholz ((1980, 123ff.)). Zu Kleins frühem Werdegang siehe auch Voss ((1919)) und für Kleins Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie Schoenflies ((1919)).

4 Vgl. etwa Klein (1928, 42).

5 Für eine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes sei neben den Originalarbeiten von Klein vor allem auf das Standardwerk Klein (1928) verwiesen.

6 Eine mathematisch sauber ausgearbeitete Durchführung dieser Ideen Kleins gibt etwa Coxeter (1965, 71ff.) und Locher (1940, 215ff.).

7 Vgl. dazu Carathéodory ((1919)), Scholz ((1980, 131ff.)), Wussing ((1969, 132ff.)); wichtige, bisher übersehene Aspekte zur Wirkungsgeschichte des Erlanger Programms findet man bei Hawkins ((1984)).

8 Zur Entwicklung des Mannigfaltigkeitsbegriffes siehe die gründliche Studie von Scholz ((1980)).

9 Es werden zur Frühgeschichte des Begriffs des n-dimensionalen Raumes nur einige Andeutungen gegeben; für Details sei auf Scholz ((1980)) verwiesen.

10 Auf die "Ausdehnungslehre" von H.Grassmann (1809-1877) von 1844 und 1862 soll hier nicht eingegangen werden, da sie für die Entwicklung der Geometrie keine u n m i t t e l b a r e Bedeutung hatte; vgl. dazu Crowe ((1967)) und Lewis ((1977)).

11 Die Geschichte dieses Problems schildert ausführlich Torretti ((1978, 155-188)); vgl. auch Klein ((1898)). Für neuere Untersuchungen vgl. Freudenthal ((1956)), ((1961)).

12 Vgl. dazu Scholz ((1980, 113-123)), Richards ((1977)) und Jammer ((1980)).

13 Darauf weist auch Gray ((1979b, 162)) hin.

14 Die Bedeutung dieser Bewußtseinsrevolution geht weit über die Schranken der Mathematik hinaus. So wurde die nichteuklidische Geometrie und die vierte Dimension von den Künstlern als Befreiung von den traditionellen Denkstrukturen empfunden ((vgl. Henderson 1983)).

15 Vgl. Klein (1871b, 235, Anm.) , (1871d, 302) und (1928, 111f.).

16 Vgl. etwa Staude (1909, 908f.).

17 Dieser Satz stammt für den euklidischen Fall bereits von Chasles (1830).

18 Ziegler (1981, 139f.). Vgl. auch Weiss (1935, 67f.).

19 Bei Lindemann wird diese Rechnung nicht ausgeführt.

20 (1874, 85). Im Rahmen der euklidischen Geometrie betrachtete diesen quadratischen Komplex zuerst Chasles (1830) (vgl. Abs.II 4.3).

21 Die folgende Umformung scheint zuerst Pasch (1872, 144f.) durchgeführt zu haben.

22 Dies läßt sich unmittelbar aus der geometrischen Konstruktion des Zylindroids ableiten: vgl. dazu Ziegler (1981, 193ff.).

23 Zum ersten Mal von Klein aufgestellt (1871d, 298).

24 Eine Voranzeige und Aufzählung einiger Resultate der Arbeit (1874) erschien schon (1873).

25 Vgl. die bei Sommerville (1911, 303f.)angegebene Literatur.

26 Lindemann weist selbst (1876, VI) nachdrücklich darauf hin.

Anmerkungen zum Kapitel VII

1 Diese Wirkungsgeschichte wurde bisher nur punktuell untersucht. Das Standardwerk Bonola/Liebmann ((1908)) behandelt vor allem die Frühgeschichte und endet mit den Arbeiten von Klein, Beltrami, Riemann und Clifford und geht auf die nichteuklidische Mechanik nicht ein. Dasselbe gilt für Reichardt ((1976)). Als eine der wenigen neueren gründlichen Arbeiten zu gewissen Aspekten dieses Themas sei auf Hawkins ((1980)) verwiesen. Auf weitere Literatur wird später hingewiesen werden.

2 Vgl. zu diesem Abschnitt Koppelmann ((1971/72)).

3 Von Plückers besonderer Beziehung zu England, dessen Mathematiker seine analytische Geometrie in ihrer Bedeutung früher erkannten als seine deutschen Kollegen, wurde schon im Abschnitt IV 2 berichtet.

4 Die besonderen Bedingungen und Erscheinungsweisen der Reaktionen der englischen Mathematiker auf diese Herausforderung, die in der philosophischen Tradition der Cambridge-Schule zu suchen sind, untersucht ausführlich Richards ((1979)). Auf diesem Hintergrund werden einige Argumente für das Problem, warum sich die englischen Mathematiker nach Clifford fast ausschließlich auf die Ausarbeitung der nichteuklidischen Geometrie im Rahmen der projektiven Geometrie konzentrierten und den differentialgeometrischen Aspekt außer Acht ließen, vorgebracht. M.E. scheint dagegen, wie bereits erwähnt, die Autorität Cayleys und dessen Memoir (1859), sowie die Arbeiten und die starke Ausstrahlung Cliffords für diese Entwicklung hauptsächlich verantwortlich zu sein - in ähnlichem Sinne wie Beltramis Arbeiten (1868a,b) in Italien die differentialgeometrische Richtung maßgeblich eingeleitet und gefördert haben. - Auf das vollständige Fehlen einer differentialgeometrischen Schule in England macht auch Reich((1973, 345)) aufmerksam.

5 Vgl. Becher ((1980)), insbesondere S. 47f.

6 Biographische Skizzen zu Clifford findet man bei Tucker ((1881)), Pollock ((1879)) und Newman ((1953)).

7 Die meisten Werke Cliffords erschienen posthum: die populären Schriften sind: "Lectures and Essays" ((1879)),"Elements of Dynamics", 1878-1879 , "The Common Sense of Exact Sciences" (1885). Die mathematischen Abhandlungen wurden ((1882)) gesammelt herausgegeben.

8 Pollock ((1901, 18)). Zu Helmholtz vgl. Abs. VI 2.2.

9 Vgl. dazu Graves ((1971, 148f.)), Gosztonyi ((1976, I 499f.)) und das letzte Kapitel von Gray ((1979b)).

10 Eine gründliche Analyse der philosophischen und mathematischen Arbeiten Cliffords sowie deren innerer Zusammenhang steht noch aus. Merkwürdigerweise erwähnt Torretti ((1978)) Clifford nur ganz am Rande.

11 Vgl. dazu Klein (1898), Klein (1928, 254-270), Hopf (1926).

12 Es soll hier keine systematische Theorie der Cliffordschen Parallelen gegeben werden; vgl. dazu etwa Coxeter (1965, Chap. VII). Die im folgenden dargestellten Resultate über Bewegungen des elliptischen Raumes sowie die Cliffordschen Schiebungen findet man außer bei Coxeter etwa auch in Klein (1928) und Strubecker (1961,62).

13 Vgl. Ziegler (1981, 167ff.).

14 Bei Cayley und Ball konnte Klein nie den Argwohn überwinden, daß in seinen Überlegungen zur projektiven Grundlegung der nichteuklidischen Geometrie (Abs. VI 1.2) ein Zirkel stecke ((Klein 1921, 241f.)). Cayley äußerte sich zu diesem Problem in einer Anmerkung zum Wiederabdruck von (1859) in seinen "Collected Mathematical Papers" 2, 1889 , p. 604-606. Klein ging auf dieses Problem ausführlich in (1890, 375-379) ein. Für eine moderne Darstellung dieser Grundlegung vgl. Coxeter (1965, 71ff.), Locher (1940, 215ff.).

15 Die bis 1889 erschienenen Arbeiten von Ball zur Schraubentheorie und nichteuklidischen Geometrie finden sich ins Deutsche übersetzt und zusammengefasst in (1889b).

16 Die Cliffordschen Schiebungen behandelte allerdings auch schon Lindemann (1874, 114-116) ganz nebenbei - nur bemerkte er nicht die besonderen Parallelitätseigenschaften, sowie die Möglichkeit der Zerlegung einer beliebigen elliptischen Bewegung in Schiebungen 1.und 2.Art.

17 Sie wird nicht einmal im modernen Standardwerk zur Gruppentheorie in der nichteuklidischen Geometrie der Ebene und im Raum, Magnus (1974), in welchem sonst viele historische Hinweise angeführt sind, erwähnt. Auch Wussing ((1969)) erwähnt sie nicht.

18 Vgl. dazu Rothe ((1916, 1396-1406)) und den folgenden Text.

19 Vgl. Ball (1900). Für die Schraubentheorie, deren geometrischer Gehalt im wesentlichen mit der euklidischen Theorie der linearen Komplexe identisch ist, vgl. Abs. V 4.

20 H.Cox hat gleichzeitig eine Arbeit (1882c) zur elementaren hyperbolischen Geometrie publiziert. Vgl. Abs. 1.3.1.- Die Lebensdaten von Homersham Cox konnten nicht festgestellt werden.

21 Vgl. Rothe ((1916, 1401)).

22 In dieser Zeit schrieb er die einzige weitere mir bekannt, aber nicht zugänglich gewordene, Arbeit "On Complexes and Congruencies of the First Order", Proc. of the Birmingham Philosoph. Soc. 4 , 1883-85 , 334-354.

23 Vgl. etwa Klein (1926, 389ff.) oder Gantmacher (1977, 310ff.).

24 Vgl. auch Bottazini ((1981)).

25 Zu den verschiedenen mathematischen Schulen Italiens siehe Segre ((1932)), Amaldi ((1911)).

26 Vgl. Kline ((1972, 885ff.)), Reich ((1973)), Scholz ((1982)). Zur direkten Beeinflußung der Entwicklung der Differentialgeometrie in Italien durch Riemann siehe auch Segre ((1932, 9f.)) und vor allem Portnoy ((1982)).

27 Darüber berichtet Freguglia ((1982)) fast nichts - die Namen G. Battaglini und E. d'Ovidio werden jedenfalls nicht erwähnt. Dieses Werk gibt überhaupt eher eine systematische Einführung in verschiedene Gebiete der Geometrie in historischer Abfolge als eine wirkliche historische A n a l y s e.

28 Die weiteren Arbeiten Beltramis werden bei Loria ((1901)) diskutiert.

29 Vgl. dazu Amaldi ((1911, 433ff.)).

30 Ein Schriftenverzeichnis von E. d'Ovidio bis 1915 findet sich in Gerbaldi ((1918)).

31 Vgl. dazu Vogt (1909, 5).

32 D'Ovidios Arbeiten sind heute kaum mehr bekannt. So enthält das sonst außerordentlich reichhaltige Literaturverzeichnis von Giering ((1982)) keinen einzigen Titel von d'Ovidio!

33 Vgl. etwa d'Ovidio (1875a, 30), (1881b, 1).

34 Daneben verwies de Francesco insbesondere auf Clifford (1876), (1882a), W.Killing (1885a) und auf eine kurze Notiz von Klein (1897, 644).

35 Die Formel selbst, unabhängig von den Cliffordschen Schiebungen, hatte zuerst Cayley (1855, 214) im Zusammenhang mit dem Studium von Matrizen aufgestellt. Die Auffassung des elliptischen Raumes als Parameterraum der Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen e u k l i d i s c h e n Raumes um einen festen Punkt stammt von K. Stéphanos (1857-1918) in (1883a,b) (vgl. dazu etwa Blaschke (1960, §§ 3 und 19).

36 Klein (1926, 323). Ebendort findet sich auch eine übersichtliche Ableitung dieses Satzes.

37 Study lieferte z.B auch gewichtige Beiträge zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen und deren Zusammenhang mit den Transformationsgruppen von Sophus Lie (1842-1899); vgl. dazu Hawkins ((1972)). Über seinen Anteil an der Klassifikationstheorie endlichdimensionaler Algebren vgl. Happel ((1980)).

38 Zur Biographie von Study vgl. Engel ((1931)), Weiss ((1930)). Eine kommentierte Bibliographie findet sich in Weiss ((1934)).

39 Einige Grundgedanken von (1903) hatte Study schon früher veröffentlicht: (1899), (1900).

40 Vgl. Klein (1871d), (1873).

41 Vgl. etwa Klein (1872b, 492f.), (1873, 312f.), (1906), und insbesondere (1928, 205-211).

42 Zur Biographie von Killing vgl. Engel ((1930)).

43 Vgl. dazu die gründlichen Abhandlungen Hawkins ((1980)), ((1982)), wo auch die mathematische Denkweise Killings einer genaueren Analyse unterzogen wird.

44 Siehe auch den Briefauszug von Killing an G.Mittag-Leffler (1846-1927) vom 4.8.1900, publiziert in Hawkins ((1980, 325)).

45 Killing (1883, 10), (1885a, 3).

46 Dies wird überzeugend belegt in Hawkins ((1980, 316-323)).

47 In sehr groben Umrissen wird die Entwicklung der analytischen Mechanik in nichteuklidischen Räumen in Stäckel ((1903)) skizziert. Zur Literatur vgl. Sommerville ((1911, 303f.)).

48 Letzteres kam gut zum Ausdruck in seinem Werk zu den nichteuklidischen Raumformen (1885b).

Anmerkungen zum Kapitel VIII

1 Vgl. dazu Behnke ((1961)) und Freudenthal ((1960)).

2 Vielleicht spielte hier auch die Skepsis eine Rolle, mit welcher die Ingenieure den Kleinschen Reformplänen zur Ausdehnung des mathematischen Hochschulunterrichts und der Forschung auf Probleme der angewandten Mathematik und Technik begegneten. (Zum Verhältnis der Techniker zu den Kleinschen Reformplänen vgl. etwa Pyenson ((1979))).

Bibliographie

1. Bibliographische Hilfsmittel

Bonola, R. Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea. Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche (Torino) 2(1899), p. 1-10, 33-40, 81-88; 3(1900), p. 2-3, 33-41, 70-73; 5(1902), p. 33-41, 65-71 = Ioannis Bolyai in memoriam, Budapest: Claudiopoli 1902, p. 81-154.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Leipzig: Teubner 1898-1935.
Wir zitieren die jeweiligen Artikel nach dem Autor, der Bandnummer (römische Ziffern), Teil (lateinische Ziffern), Seiten und interner Artikelnumerierung (in runden Klammern). Die Jahreszahlen beziehen sich auf das Abschlußdatum des Artikels.

Gillispie, Ch. C. (Ed.) Dictionary of scientific biography (=DSB). New York: Ch. Scribner's Sons 1970-80.

Erlecke, A. Bibliotheca Mathematica. Halle 1873 (Reprint: Schaan: Sändig 1983).

Groot, J. de Bibliography on kinematics. Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology 1970.

Loria, G. Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung. Leipzig: Teubner 1888.

May, K.O. Bibliography and research manual of the history of mathematics. Toronto: Univ. of Toronto Press 1973.

Müller, F. Führer durch die mathematische Literatur, mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. Leipzig-Berlin: Teubner 1909 (Reprint: Nendeln: Kraus 1979).

Sommerville, D. M. Y. Bibliography of non-euclidean geometry. Published at London, 1911, for the Univ. of St. Andrews (Scotland) (Enlarged Reprint: New York: Chelsea 1970).

Truesdell, C. A. / Toupin, R. A. The classical field theories. In: Handbuch der Physik (Hrsg.: S.Flügge), Bd. III.1 (Berlin 1960), p. 744-790.

2. Abkürzungen

C. R.	Comptes Rendues hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences (Paris).
Crelle	Journal für die reine und angewandte Mathematik
DSB	Dictionary of scientific biography.
J.DMV	Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Die abgekürzt zitierten Gesammelten Werke von Cayley, Clifford, Klein, Möbius und Plücker sind im alphabetischen Autorenverzeichnis (Abs. 4) bibliographiert.

3. Primärliteratur (chronologisch)

1821 Poinsot, L. Eléments de statique. Paris: Courcier (3e édition).

1826 Plücker, J. Théorèmes et problèmes sur les contacts des sections coniques. Annales de mathématiques pures et appliquées 17, p. 37-59, 69-72 = Plücker ((1895)), p. 43-62.

1828 Gergonne, M. Démonstration d'un théorème de M. Chasles. Annales de mathématiques pures et appliquées 18, p. 372-377.

Möbius, A. F. Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heißen? Crelle 3, p. 273-278 = Möbius GW 1((1885)), p. 439-446.

1828/31 Plücker, J. Analytisch-Geometrische Entwicklungen. Essen: Baedeker, Bd. 1: 1828, Bd. 2: 1831.

1829 Möbius, A. F. Beweis eines neuen, von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen. Crelle 4, p. 179-184 = Möbius GW 3((1886)), p. 499-506.

1830 Chasles, M. Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre. Bulletin des sciences math., astr., phys. et chim. 14, p. 321-326.

a Plücker, J. Über ein neues Coordinatensystem. Crelle 5, p. 1-36 = Plücker ((1895)), p. 124-158.

b ———— Über ein neues Prinzip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten. Crelle 5, p. 268-286 = Plücker ((1895)), p. 159-177.

c ———— Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen. Crelle 6, p. 107-146 = Plücker ((1895)), p. 178-219.

1831 Möbius, A. F. Entwicklung der Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen Kräften, die auf einen freien, festen Körper wirken. Crelle 7, p. 205-216 = Möbius GW 3((1886)), 507-521.

1832 Plücker, J. Note sur un théorie générale et nouvelle des surfaces courbes. Crelle 9, p. 124-134 = Plücker ((1895)), p. 224-234.

Steiner, J. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander. Erster Theil (alles Erschienene). Berlin: Fincke = Gesammelte Werke 1 (Berlin 1881), p. 229-458.

1833 Möbius, A. F. Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume. Crelle 10, p. 317-341 = Möbius GW 1((1885)), p. 489-515.

1835 Plücker, J. System der analytischen Geometrie; auf neue Betrachtungsweise gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend. Berlin: Duncker und Humblot.

1837 Magnus, L. J. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. Berlin: Duncker und Humblot

(Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben, Vierter Teil).
Möbius, A. F. Lehrbuch der Statik (2 Theile). Leipzig: Göschen = Möbius GW 3((1886)), p. 1-270, 271-497.

1838 Möbius, A. F. Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Crelle 18, p. 189-212 = Möbius GW 1((1885)), p. 545-570.

1839 Chasles, M. Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe. Journal de mathématiques pures et appliquées 4, p. 348-350.

1840 Rodrigues, O. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. Journal de mathématiques pures et appliquées 5, p. 380-440.

1843 Cayley, A. Chapters in the analytical geometry of (n)dimensions. Cambridge Mathematics Journal 4(1843-45), p. 119-127 = Cayley CMP 1((1889)), p. 55-62.

Chasles, M. Propriétés géométriques rélatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. C.R. 16, p. 1420-1432.

1846 Plücker, J. System der Geometrie des Raumes; in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend. Düsseldorf: Schaub'sche Buchhandlung.

1847 Staudt, G. K. C. von Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe.

1848 Möbius, A. F. Einfacher Beweis des vom Herrn Geh. Hofrath Schweins im 32.Bande dieses Journals Nr. 25 mitgetheilten statischen Satzes. Crelle 36, p. 89-90 = Möbius GW 3((1886)), p. 567-570.

1851 Möbius, A. F. Über einen Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. Crelle 42, p. 179-184 = Möbius GW 3((1886)), p. 571-580.

Poinsot, L. Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris: Bachelier.

1854 Cayley, A. An introductory memoir upon quantics. Phil. Trans. Roy. Soc. London 144, p. 244-258 = Cayley CMP 2((1889)), p. 221-234.

1855 Cayley, A. Recherches ultérieurs sur les déterminantes gauches. Crelle 50, p. 299-313 = Cayley CMP 2((1889)), p. 202-215.

1856-60 Staudt, G. K. von Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe, 1. Heft: 1856, 2.Heft: 1857, 3.Heft: 1860.

1859 Cayley, A. A sixth memoir upon quantics. Phil. Trans. Roy. Soc. London 149, p. 61-90 = Cayley CMP 2((1889)), p. 561-592.

1860a Cayley, A. On a new analytical representation of curves in space. (June 2, 1859). Quarterly Journal of Pure and Applied Math. 3(1860), p. 225-236 = Cayley CMP 4((1891)), p. 446-455.

b ———— On a new analytical representation of curves in space. (Oct. 30, 1860). Quarterly Journal of Pure and Applied Math. 5(1862), p. 81-86 = Cayley CMP 4((1891)), p. 490-494.

Chasles, M. Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure invariable. C. R. 51, p. 855-863. 905-914.

1861 Cayley, A. Note relative aux droites en involution de M. Sylvester. C. R. 52, p. 1039-1042.

a Chasles, M. Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace. C. R. 52, p. 77-85, 189-197, 487-501.

b ———— Sur les six droites, qui peuvent être les directions de six forces en équilibre. C. R. 52, p. 1094-1104.

a Sylvester, J. J. Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation. C. R. 52, p. 741-745.

b ———— Note sur l'involution de six lignes dans l'espace. C. R. 52, p. 815-817.

1862/64 Poncelet, J. V. Applications d'Analyse et de Géométrie; qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des Propriétés Projectives des Figures. Paris, Tome 1: Mallet-Bachelier 1862, Tome 2: Gauthier-Villars 1864.

1865a Plücker, J. On a new geometry of space. Proc. Roy. Soc. London 14, p. 53-58 = Plücker ((1895)), p. 462-468.

b ———— On a new geometry of space. Phil. Trans. Roy. Soc. London 155, p. 725-791 = Plücker ((1895)), p. 469-545.

1866a Battaglini, G. Intorno ai sistemi di rette di primo grado. Rendiconti delle Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (1866) = Giornale di Matematiche 6(1868), p. 24-36.

b ———— Intorno ai sistemi di rette di secondo grado. Giornale di Matematiche 6(1866), p. 239-258; 7(1869), p. 55-75.

Plücker, J. Fundamental views regarding mechanics. Phil. Trans. Roy. Soc. London 156, p. 361-380 = Plücker ((1895)), p. 546-568.

1867 Battaglini, G. Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky. Giornale di Matematiche 5, p. 217-231.

Lüroth, J. Zur Theorie der windschiefen Flächen. Crelle 67, p. 130-152.

Plücker, J. Géométrie nouvelle de l'espace. Les Mondes, Revue hebdomadaire des sciences 13, p. 79-84 = Plücker ((1895)), p. 570-575.

Riemann, B. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854). Abhandlungen der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 13, p. 133-152 = Mathematische Werke (2.Auflage, Leipzig 1892), p. 272-287.

1868a Beltrami, E. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche 6, p. 284-312.

b ———— Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di matematica pura ed applicata (2) 2, p. 232-255.

a Helmholtz, H. von Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Verhandlungen des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg 4(1868), p. 197-202; 5(1869), p. 31-32 = Wissenschaftliche Abhandlungen 2(Leipzig 1883), p. 610-617.

b ———— Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Nachrichten von der Köngl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 14, p. 193-221 = Wissenschaftliche Abhandlungen 2 (Leipzig 1883), p. 618-639.

Klein, F. Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form (Dissertation Bonn 1868). Erweiterte Fassung: Math. Ann. 23(1884), p. 539-578 = Klein ((1921)), p. 5-49.

Weierstrass, K. Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen. Monatsberichte der Deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin (1868), p. 311-338.

1868/69 Plücker, J. Neue Geometrie des Raumes; gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig: Teubner, Erste Abtheilung: 1868, Zweite Abtheilung: 1869 (Herausgegeben von Felix Klein).

1869 a Battaglini, G. Sulla composizione delle forze. Rendiconti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (Febbraio 1869) = Giornale di Matematiche 10(1872), p. 133-140.

b ———— Sulla teorica dei momenti. Rendiconti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e. Mat. di Napoli (Maggio 1869) = Giornale di Matematiche 10(1872), p. 175-180.

c ———— Sulle serie di sistemi di forze. Rendiconti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (Agosto 1869) = Giornale di Matematiche 10(1872), p. 180-187.

d ———— Sulle dinami in involuzione. Atti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli 4(Novembre 1869).

Cayley, A. On the six coordinates of a line (Nov. 11, 1867). Trans. of the Cambridge Phil. Soc. 11, p. 290-323 = Cayley CMP 7((1894)), p. 66-98.

Zeuthen, H. G. Notes sure un système de coordonnées linéaire dans l'espace. Math. Ann. 1, p. 434-454.

1870 Battaglini, G. Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido. Rendiconti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (1870).

Cayley, A. A memoir on abstract geometry. Phil. Trans. Roy. Soc. London 160, p. 51-63 = Cayley CMP 6((1893)), p. 456-469.

Clebsch, A. Über die Plückerschen Complexe. Math. Ann. 2, p. 1-8.

Clifford, W. K. On the space — theory of matter. Proc. Cambridge Phil. Soc. (Feb. 21, 1870) = Clifford ((1882)), p. 21-22.

Fiedler, W. Über die projectivischen Coordinaten. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Ges. in Zürich 15, p. 152-182.

Helmholtz, H. von Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome (Vortrag im Docentenverein zu Heidelberg 1870) = Vorträge und Reden 2 (4.Auflage, Braunschweig 1896), p. 1-31.

a Klein, F. Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. 2, p. 198-226 = Klein ((1921)), p. 53-80.

b ———— Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten. Math. Ann. 2, p. 366-370 = Klein ((1921)), p. 81-86.

c Klein, F./ Lie, S. Deux notes nur une certaine famille de courbes et de surfaces. C. R. 70, p. 1222-1226 = Klein ((1921)), p. 415-423.

Ovidio, E. d' Nota su punti, piani e rette in coordinate omogenee. Giornale di Matematiche 8, p. 241-284.

Schering, E. Die Schwerkraft im Gaussischen Raume. Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen (1870), p. 311-321 = Gesammelte Mathematische Werke 1(Berlin 1902), p. 155-162.

1871 a Klein, F./ Lie S. Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Ann. 4, 50-84 = Klein ((1921)), p. 424-459.

b Klein, F. Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper. Math. Ann. 4, p. 403-415 = Klein ((1921)), p. 226-238.

c ——— Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Nachrichten von der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 17,p. 419-433 = Klein ((1921)), p. 244-253.

d ——— Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Ann. 4, p. 573-625 = Klein ((1921)), p. 254-305.

1872 Clifford, W. K. On the aims and instruments of scientific thought. In: Clifford 1((1879)), p. 139-180.

a Klein, F. Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Ann. 5, p. 257-277 = Klein ((1921)), p. 106-126.

b ——— Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. ("Erlanger Programm"). Erlangen: Deichert. Wiederabdruck in: Math. Ann. 43(1893), p. 63-100 = Klein ((1921)), p. 460-497.

Lipschitz, R. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Crelle 74, p. 116-149.

Ovidio, E. d' Sopra alcune formole in coordinate di rette. Giornale di Matematiche 10, 33-36.

Pasch, M. Zur Theorie der linearen Komplexe. Crelle 75, p. 106-152.

1873 Ball, R. S. Contributions to the Theory of Screws. In: Report of the British Association for the Advancement of Science (Bradford 1873), Notices and Abstracts, p. 27-28.

a Battaglini, G. Sulla teorica dei momenti d'inerzia. Giornale di Matematiche 11, p. 62-70.

b ——— Sul movimento di un sistema di forma invariabile. Giornale di Matematiche 11, p. 359-367.

a Clifford, W. K. The philosophy of the pure sciences. In: Clifford 1((1879)), p. 301-409.

b ——— Preliminary sketch of biquaternions. Proc. London Math. Soc. 4, p. 381-395 = Clifford ((1882)), p. 181-200.

c ——— On the hypotheses which lie at the bases of geometry (Translation of Riemann (1867)). Nature 8, p. 14-17, 36-37.

Klein, F. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Zweiter Aufsatz). Math. Ann. 6, p. 112-145 = Klein ((1921)), p. 311-343.

Lindemann, F. Über unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Maßbestimmung. Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen 5, p. 122-129.

Ovidio, E. d' Sulle relazione metriche in coordinate omogenee. Giornale di Matematiche 11, p. 197-220.

Schering, E. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen (1873), p. 149-159 = Gesammelte Mathematische Werke 1(Berlin 1902), p. 177-184.

Smith, H. J. S. Adress [to the section of] Mathematics and Physics. In: Report of the British Association for the Advancement of Science (Bradford 1873), Notices and Abstracts, p. 1-8.

1874 Lindemann, F. Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Maßbestimmung (Diss. Erlangen 1973). Math. Ann. 7, p. 56-144.

Ovidio, E. d' Studio sulla geometria proiettiva. Annali di matematica pura ed applicata (2) 6, p. 72-100.

Proell, R. Versuch einer graphischen Dynamik. Leipzig: Felix.

1875 Chasles, M. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie; particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne; suivi d'un memoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie (Bruxelles 1837). Seconde édition, conforme à la première: Paris: Gauthier-Villars 1875.

a Ovidio, E. d' I complessi e le congruenze lineare nella geometria proiettiva. Annali di matematica pura ed applicata (2) 7, p. 25-51.

b ———— Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1° e 2° grado in geometria proiettiva. Giornale di Matematiche 13, p. 363-379.

1875/76 Clebsch, A. / Lindemann, F. Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch; Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann. Leipzig: Teubner, Bd. 1.1: 1875, Bd. 1.2: 1876 (Reprint: New York-London: Johnson 1968).

1876 Beltrami, E. Formules fondamentales de cinématique dans les espace de courbure constante. Bulletin des Sciences Math. (1) 11, p. 233-240.

Clifford, W. K. On the free motion under no forces of a rigid system in an n-fold homaloid (Provisional Notice). Proc. London Math. Soc. 7. p. 67-70 = Clifford ((1882)), p. 236-240.

a Ovidio, E. d' Alcune proprietà metriche dèi domplessi e delle congruenze lineari in Geometria proiettiva. Atti della Reale

Accad. dei Lincei (2) 3, (2) p. 260-268.

b ——————— Sulle reti di complessi lineari nella Geometria metrico-proiettiva. Atti della Reale Accad. dei Lincei (2) 3, (2) p. 561-581.

c ——————— Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella Geometria metrico-proiettiva. Atti della Reale Accad. dei Lincei (2) 3, (2) p. 723-746.

1877 a Ovidio, E. d' Le funzioni metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. Atti della Reale Accad. dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat. (3) 1, p. 929-986.

b ——————— Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante. (Résumé de (1877a)). Math. Ann. 12, p. 403-418.

1879 Ball, R. S. The non-Euclidean geometry. Hermathena 3, p. 500-541.

1881 a Ovidio, E. d' Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari. (Estratto dal) Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino 16(1881).

b ——————— Teoremi sui complessi lineari nella metrica proiettiva. Rendiconti del Reale Istituto Lombardo (2) 14, p. 405-415.

1882 Ball, R. S. Certain problems in the dynamics of a rigid system moving in elliptic space. Trans. Roy. Irish Acad. 28, p. 159-184.

a Clifford, W. K. Motion of a solid in elliptic space. First publication in: Clifford ((1882)), p. 378-384.

b ——————— Further note on biquaternions. First publication in: Clifford ((1882)), p. 385-396.

c ——————— On the theory of screws in a space of constant positive curvature. First publication in: Clifford ((1882)), p. 402-405.

a Cox, H. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space (Abstract). Proc. Cambridge Phil Soc. 4, p. 194-196.

b ——— On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Trans. Cambridge Phil. Soc. 13, (2) p. 69-143.

c ——— Homogeneous coordinates in imaginary geometry, and their application to system of forces. Quarterly Journal of Pure and Applied Math. 18, p. 178-215.

Lindemann, F. Über die Zahl π . Math. Ann. 20, 213-225.

Veronese, G. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens. Math. Ann. 19, p. 161-234.

1883 Killing, W. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen.

Lyceum Hosianum Braunsberg, Brilon.

a Stéphanos, K. Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace aves application à l'étude des rotations sphériques. Math. Ann. 22, p. 299-367.

b ———— Sur la théorie des quaternions. Math. Ann. 22, p. 589-592.

1884 Ball, R. S. Notes on the kinematics and dynamics of rigid systems in elliptic space. Proc. Roy. Irish Acad. (2) 4(1884-88), p. 252-258.

a Buchheim, A. On the theory of screws in elliptic space. Proc. London Math. Soc. 15, p. 83-98.

b ———— A memoir on biquaternions. American Journal of Math. 7, p. 293-326.

Heath, R. S. On the dynamics of a rigid body in elliptic space. Phil. Trans. Roy. Soc. London 175, p. 281-324.

1885 Buchheim, A. On the theory of screws in elliptic space. Proc. London Math. Soc. 16, p. 15-27.

Clifford, W. K. The common sense of the exact sciences. London: Kegan Paul, Trench & Co.

a Killing, W. Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen. Crelle 98, p. 1-48.

b ———— Die nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig: Teubner.

Paolis, R. de Fondamenti di una teoria dello spazio generato dei complessi lineari. Atti della Reale Accad. dei Lincei (4), 1, p. 205-231.

1886 a Buchheim, A. On the theory of screws in elliptic space. Proc. London Math. Soc. 17, p. 240-254.

b ———— On the theory of screws in elliptic space. Proc. London Math. Soc. 18, p. 88-96.

Schoenflies, A. Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig: Teubner.

1889 a Ball, R. S. On the theory of content. Trans. Roy. Irish Acad. 29, p. 123-182.

b ———— Theoretische Mechanik starrer Systeme; Auf Grund der Arbeiten und mit einem Vorwort von Sir Robert S. Ball herausgegeben von Harry Gravelius. Berlin: Reimer.

Goursat, E. Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure (3) 6, p. 9-102.

1890 Klein, F. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann. 37, p. 544-572 = Klein ((1921)), p. 353-383.

1891 Clebsch, A./ Lindemann, F. Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch. Bearbeitet von Dr. Ferdinand Lindemann. Band 2.1 (alles Erschienene). Leipzig: Teubner (Reprint: New York-London: Johnson 1968).

Study, E. Von den Bewegungen und Umlegungen. Math. Ann. 49, p. 441-566.

1892 Zindler, K. Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen in unserem Raume; lineare Complexe und Strahlensysteme in denselben. Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Classe 101, p. 215-299.

1894 Cayley, A. Non-Euclidean geometry. Trans. Cambridge Phil. Soc. 15, p. 37-61 = Cayley CMP 13((1897)), p. 408-504.

1895 Burnside, W. On the kinematics of Non-Euclidean space. Proc. London Math. Soc. 26, p. 33-56.

1896 MacAulay, A. Octonions (Abstract). Proc. Roy. Soc. London 59, p. 169-181.

1897 Klein, F. The mathematical theory of the top. New York: Scribners Sons = Klein ((1922)), p. 618-654.

1898 Klein, F. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises. Bulletin de la Société Physico-Math. de Kasan (2) 8(1898) = Klein ((1921)), p. 384-401.

MacAulay, A. Octonions. A development of Clifford's biquaternions. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Whitehead, A. N. A treatise on universal algebra with applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press (Reprint: New York: Hafner 1960).

1899 Study, E. Eine neue Darstellung der Kräfte der Mechanik durch geometrische Figuren. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Ges. der Wiss. 51, p. 29-67.

1900 Ball, R. S. A treatise on the theory of screws. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

a Francesco, D. de Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino 35, p. 34-38.

b ———————— Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino 35, p. 387-399.

c ———————— Sull'integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. Atti della Reale Accad. dei Lincei, Rendiconti (5) 9.1, p. 245-252.

d ———————— Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante, I. Atti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (2) 10, No. 4, p. 1-38.

e ———————— Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante, II. Atti della Reale Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (2) 10, No. 9, p. 1-33.

Fubini, G. Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici. Annali delle Reale Scuola Normale Superiore di Pisa 9, p. 1-74.

Hjelmslev, J. = Petersen, J. Géométrie des droites dans l'espace non-euclidien. Oversigt over det Kongelike Danske Vid.-Selsk. Forhandlinger (Kopenhagen 1900), p. 305-330.

Study, E. Die Geometrie der Dynamen. J. DMV 8, p. 204-216.

1901 Ball, R. S. Further development of the geometrical theory of six screws. Trans. Roy. Irish Acad. 31, p. 473-540.

Francesco, D. de Su alcuni problemi di meccanica, in uno spazio pseudosferico, analiticamente equivalente a problemi nello spazio ordinario. Rendiconti dell'Accad. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli (3) 7, p. 28-38.

1902 Francesco, D. de Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. Math. Ann. 55, p. 573-584.

Klein, F. Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Zeitschrift für Math. und Phys. 47, p. 237-265. Mit einem Zusatz wieder abgedruckt in: Math. Ann. 62(1906), p. 419-448 = Klein ((1921)), p. 503-532.

Study, E. Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie. J.DMV 11, p. 313-340, Nachtrag p. 340-342.

1902/06 Zindler, K. Liniengeometrie mit Anwendungen. Leipzig: Göschen, Bd. 1: 1902, Bd. 2: 1906.

1903 Ball, R. S. On the reflections of screw-systems and allied questions. Trans. Roy. Irish Acad. 32, p. 101-154.

a Grünwald, A. Sir Robert S. Ball's lineare Schraubengebilde. Zeitschrift für Math. und Phys. 48, p. 49-108.

b ———— Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels. Zeitschrift für Math. und Phys. 49, p. 211-245.

Study, E. Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig: Teubner.

1904 Ball, R. S. Some extensions of the theory of screws. Trans. Roy. Irish Acad. 32, p. 299-366.

1905 Grünwald, A. Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad. Zeitschrift für Math. und Phys. 52, p. 229-275.

Liebmann, H. Nichteuklidische Geometrie. Berlin-Leipzig: Göschen.

1906 Klein, F. Grenzfragen der Mathematik und Philosophie. Jahresberichte der Philos. Ges. an der Univ. zu Wien 19(1906) = Klein ((1922)), p. 247-251.

Study, E. Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie. J.DMV 15, p. 476-527.

1907 Study, E. Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie. I: Geraden und Punkte als Extreme, II: Die Begriffe Links und Rechts in der elliptischen Geometrie, III: Schraubenflächen als Extreme. American Journal of Math. 29, p. 101-116, 116-159, 160-167.

1907/10 Reye, Th. Die Geometrie der Lage. Stuttgart: Kröner, 2. Abteilung: 1907 (4.Auflage), 3.Abteilung: 1910 (4.Auflage).

1908 Timerding, H. E. Geometrie der Kräfte. Leipzig: Teubner.

1909 Hamel, G. Über die Grundlagen der Mechanik. Math. Ann. 66, p. 350-397.

Vogt, W. Synthetische Theorie der Clifford'schen Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes (Habilitationsschrift Karlsruhe). Leipzig: Teubner.

1910 Klein, F./ Sommerfeld, A. Über die Theorie des Kreisels. Leipzig: Teubner.

Staude, O. Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. Leipzig-Berlin: Teubner.

1910/18 Veblen, O./ Young, J. W. Projective geometry. Boston: Ginn & Co, Vol. 1: 1910, Vol 2: 1918.

1911 Marcolongo, R./ Timerding, H. E. Theoretische Mechanik. Bd. 1: Kinematik und Statik. Leipzig: Teubner.

1913 Study, E. Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. 12, p. 36-60.

1924 a Mises, R. von Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik. Zeitschrift für angewandte Math. und Mech. 4, p. 155-181.

b ———— Anwendungen der Motorrechnung. Zeitschrift für angewandte Math. und Mech. 4, p. 193-213.

1926 Hopf, H. Zum Klein-Clifford'schen Raumproblem. Math. Ann. 95, p. 313-339 = Freudenthal ⟪1978⟫, p. 117-144.

Klein, F. Vorlesungen über höhere Geometrie. Berlin: Springer (Reprint: Berlin: Springer 1968).

1927 Geiger, H./ Scheel, K. Handbuch der Physik. Bd. 5: Grundlagen der Mechanik, Mechanik der Punkte und starren Körper (Hrsg.: R. Grammel). Berlin: Springer.

Haenzel, G. Zur synthetischen Theorie der Mechanik starrer Körper. Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. 26, 126-161.

Hamel, G. Die Axiome der Mechanik. In: Geiger/Scheel (1927), p. 1-42.

1928 Klein, F. Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Berlin: Springer.

1929 Benteli, W. Somengeometrie und Nicht-euklidische Geometrie. Comm. Math. Helv. 1, p. 42-63.

1935 Weiss, E. A. Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. Leipzig: Teubner.

1936 Lotze, A. Die Grundgleichungen, der Mechanik im elliptischen Raum. J.DMV 46, p. 51-70.

1937 Sauer, R. Projektive Liniengeometrie. Berlin: de Gruyter.

1938 Strubecker, K. Study'sches Übertragungsprinzip und Motorrechnung. Math. Zeitschrift 44, p. 1-19.

1939 Hölder, E. Über die explizite Form der dynamischen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers relativ zu einem geführten Bezugssystem. Zeitschrift für angewandte Math. und Mech. 19, p. 166-176.

1940 Locher, L. Projektive Geometrie. Zürich-Leipzig: Orell Füssli.

1942 Blaschke, W. Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik. Leipzig-Berlin: Teubner.

1944 Blaschke, W. Nicht-Euklidische Mechanik. Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. der Wiss. 1943, No. 2, p. 1-10.

1951 Garnier, R. Cours de cinématique. Tome 3: Géométrie et cinématique cayleyennes. Paris: Gauthier-Villars.

1954 Blaschke, W. Analytische Geometrie. Basel-Stuttgart: Birkhäuser (2.Auflage).

1956 Hölder, E. Die Dynamik des starren Körpers in einem nicht-euklidischen Raum. Abhandlungen des Math. Seminars der Univ. Hamburg 20, p. 242-252.

1956/59 Adams, G. Universalkräfte in der Mechanik. Math.-Phys, Korrespondenz (1956), (6a) p. 1-10; (1957), (9a) p. 1-17; (1959), (17) p. 1-48.

1960 Blaschke, W. Kinematik und Quaternionen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Truesdell, C. A./ Toupin, R. A. The classical field theories. In: Handbuch der Physik (Hrsg.: S. Flügge), Bd. III.1 (Berlin 1960), p. 226-790.

1965 Coxeter, H. S. M. Non-euclidean geometry. Toronto: Univ. of Toronto Press (5th edition).

1966 Truesdell, C. A. Six lectures on modern natural philosophy. New York: Springer.

1968 Dimentberg, F. M. The screw calculus and its applications in mechanics. Wright-Patterson: Foreign Technology Division.

1974 Magnus, W. Noneuclidean tesselations and their groups. New York: Academic Press.

1977 Gantmacher, F. R. The theory of matrices, Vol. 1, New York: Chelsea.

Gschwind, P. Der lineare Komplex. Stuttgart: Freies Geistesleben (Math.-Astr. Blätter, Neue Folge Nr.4).

Truesdell, C. A. A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1: General concepts. New York: Academic Press.

1978 Hunt, K. H. Kinematic geometry of mechanisms. Oxford: Clarendon.

1979 Gschwind, P. Methodische Grundlagen zu einer Projektiven Quantenphysik. Stuttgart: Freies Geistesleben (Math.-Astr. Blätter, Neue Folge Nr. 6).

Bottema, O./ Roth, B. Theoretical kinematics. Amsterdam: North-Holland.

1980 Goldstein, H. Classical Mechanics. Reading (Mass.): Addison Wesley (2nd edition).

1981 Ziegler, R. Synthetische Liniengeometrie. Stuttgart: Freies Geistesleben (Math.-Astr. Blätter, Neue Folge Nr. 8).

1982 Giering, O. Vorlesungen über höhere Geometrie. Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg.

Lipkin, H./ Duffy, J. Analysis of industrial robots via the theory of screws.Proc. 12th Intern. Symp. on Industrial Robots, Paris 1982, p. 359-370.

1984 Lipkin, H./ Duffy J. The elliptic polarity of screws. (Peprint; to be published in: ASME Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design.

Übersetzungen ins Deutsche

1839 Chasles, M. Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden (Übersetzung nach der 1.Auflage von 1837, unter Weglassung des "Mémoire de géométrie....", von L.A. Sohncke), Halle: Gebauer'sche Buchhandlung 1839 (Reprint: Wiesbaden, Sändig 1968).

1851 Poinsot, L. Neue Theorie der Drehung der Körper (übersetzt von K.H. Schellbach), Berlin: Hayn.

1887 ———— Elemente der Statik (Übersetzung nach der 12.Auflage von 1877 von H. Servus). Berlin: Springer.

4. Sekundärliteratur (alphabetisch)

Amaldi, U. 1911 Sullo sviluppo della Geometria in Italia durante l'ultimo cinquantennio. Atti della società italiana per il progresso delle scienzia (Roma) 5, p. 415-461.

Bailhache, P. 1975 Louis Poinsot: La théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes. Edition critique et commentaires par P. Bailhache. Paris: Vrin.

[Ball, R.] 1913 Nature 92, p. 403-404.

[Ball, R.] 1915 Proc. Royal Soc. London, Ser. A, 91, p. XVII-XXI.

Ball, W. V. 1915 Reminiscences and letters of Sir Robert Ball. London: Cassel.

Baltzer, R. 1885 August Ferdinand Möbius. In: Möbius GW 1(1885), p. V-XX.

Becher, H. W. 1980 William Whewell and Cambridge Mathematics. Hist. Studies in the Physical Sciences 11, p. 1-48.

Beck, H. 1959/61 Alexander von Humboldt. Wiesbaden: Steiner .

Behnke, H. 1961 Felix Klein und die heutige Mathematik. Math.-Phys. Semesterberichte 7, p. 129-144

Bertrand, J.L. 1872 Notice sur Louis Poinsot. Journal des Savants (Juillet 1872), p. 405-420 = L. Poinsot, "Eléments de statique", Paris: Gauthier-Villars 1877 (12e édition), p. IX-XXVIII.

Biermann, K.-R. 1959 Über die Förderung deutscher Mathematiker durch Alexander von Humboldt. In: A. v. Humboldt. Gedenkschrift zur 100. Wiederkehr seines Todestages, Berlin: Akademie-Verlag, p. 83-159.

——————— 1968 Alexander von Humboldts wissenschaftsorganisatorisches Programm bei der Übersiedlung nach Berlin. Monatsberichte der Deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin 10, p. 142-147.

——————— 1973 Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1920. Berlin: Akademie-Verlag.

——————— 1975 Zu den Beziehungen von C. F. Gauss und A. v. Humboldt zu A. F. Möbius. NTM 12 (1), p. 12-15.

Bonola, R./ Liebmann, H. 1908 Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Leipzig: Teubner.

Bottazzini, U. 1980 Algebraische Untersuchungen in Italien 1850-1863. Hist. Math. 7, p. 24-37.

——————— 1981 Mathematics in a unified Italy. In: Mehrtens, H. et al. ((1981)), p. 165-178.

Boyer, C. B. 1954 Analysis: Notes on the evolution of a subject and a name. Math. Teacher 47, p. 450-462.

——————— 1956 History of analytic geometry. New York: Yeshiva Univ..

Brill, A./ Noether, M. 1894 Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. J.DMV 3, p. 107-566.

Bruhns, C. 1878 Die Astronomen auf der Pleissenburg [in Leipzig]. (Aus dem Decanatsprogramm 1877/78), Leipzig: Edelmann, o.J..

Cantor, M. (Hrsg.) 1908 Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Vierter Band, Leipzig: Teubner.

Carathéodory, C. 1919 Die Bedeutung des Erlanger Programms. Die Naturwissenschaften 7, p. 297-300.

Cayley, A. 1889-98 The Collected Mathematical Papers (=CMP). Cambridge: Cambridge Univ. Press.

——— 1857 Report on the recent progress of theoretical dynamics. In: Report of the British Association for the Advancement of Science (1857), p. 1-42 = Cayley CMP 3((1890)), p. 157-204.

——— 1862 Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics. In: Report of the British Association for the Advancement of Science (1862), p. 184-252 = Cayley CMP 4((1891)), p. 513-593.

Chasles, M. 1870 Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris: Imprimerie Nationale (Recueil des rapports sur l'état des lettres et les progrès des sciences en France).

Clebsch, A. 1895 Zum Gedächtnis an Julius Plücker. In: Plücker ((1895)), p. IX-XXXV.

Clifford, W. K. 1879 Lectures and Essays. London: MacMillan.

——— 1882 Mathematical Papers. First edition: London. (Corrected Reprint: New York: Chelsea 1968).

Coolidge, J. L. 1929 The heroic age of geometry. Bull. of the Amer. Math. Soc. 35, p. 19-37.

——— 1934 The rise and fall of projective geometry. The Amer. Math. Monthly 41, p. 217-228.

——— 1940 A history of geometrical methods. Oxford: Oxford Univ. Press.

Crowe, M. 1967 A history of vector analysis. Notre Dame-London: Univ. of Notre Dame Press.

Dauben, J. W. 1981a Mathematics in Germany and France in the early 19th century: transmission and transformation. In: Jahnke/Otte ((1981)), p. 371-399.

——— (Ed.) 1981b Mathematical perspectives: essays on mathematics and its historical development. New York: Academic Press.

Degen, H. 1956 Die Naturforscherversammlung zu Berlin im Jahre 1828 und ihre Bedeutung für die deutsche Geistesgeschichte. Naturwissenschaftliche Rundschau 9, p. 333-340.

Dieudonné, J. (Ed.) 1978 Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. Paris: Hermann.

Dronke, A. 1871 Julius Plücker. Bonn: Marcus.

Dugas, R. 1950 Histoire de la mécanique. Neuchâtel: Griffon.

Duhem, P. 1905 L'évolution de la mécanique. Paris: Hermann.

——— 1905/06 Les origines de la statique. Paris: Hermann.

Eccarius, W. 1975 Der Techniker und Mathematiker August Leopold Crelle (1780-1855) und sein Beitrag zur Förderung der Mathematik im Deutschland des 19. Jahrhunderts. NTM 12, p. 38-49.

——— 1976 August Leopold Crelle als Herausgeber wissenschaftlicher Fachzeitschriften. Annals of Science 33, p. 229-261.

——— 1977 August Leopold Crelle als Förderer bedeutender Mathematiker. J.DMV 79, p. 137-174.

——————— 1980 Der Gegensatz zwischen Julius Plücker und Jakob Steiner im Lichte ihrer Beziehung zu August Leopold Crelle. Annals of Science 37, p. 189-213.

——————— 1981 August Leopold Crelle und die Berliner Akademie der Wissenschaften. In: Dauben ((1981b)) p. 37-46.

Engel, F. 1930 Wilhelm Killing. J.DMV 39, p. 140-154.

——————— 1931 Eduard Study. J. DMV 40, 133-156.

Ernst, W. 1933 Julius Plücker. Eine zusammenfassende Darstellung seines Lebens und Wirkens als Mathematiker und Physiker auf Grund unveröffentlichter Briefe und Urkunden. Diss. Bonn (1933).

Fano, G. 1907 Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert. Enc. der Math. Wiss. III 1.1, p. 221-288 (III AB 4a).

Fiedler, W. 1876 Geometrie und Geomechanik. Eine Übersicht zur Kennzeichnung ihres Zusammenhangs nach seiner gegenwärtigen Entwicklung. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 21, p. 186-228.

Forsyth, A. R. 1895 Biographical Notice of Arthur Cayley. In: Cayley CMP 8((1895)), p. IX-XLIV.

Fraser, C. 1983 J.L. Lagrange's early contributions to the principles and methods of mechanics. Arch. Hist. Exact Sciences 28, p. 197-241.

Freguglia, P. 1982 Fondamenti storici della geometria. Milan: Feltrinelli.

Freudenthal, H. 1956 Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. Mathem. Zeitschrift 63, p. 374-405 = Freudenthal ((1978)), p. 15-45.

——————— 1960 Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts. Math.-Phys. Semesterberichte 7, p. 2-25.

——————— 1961 Im Umkreis der sogenannten Raumprobleme. In: Essays on the foundations of mathematics, Jerusalem 1961, p. 322-327 = Freudenthal ((1978)), p. 46-51.

——————— (Hrsg.) 1978 Raumtheorie. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft (Wege der Forschung, Bd. 270).

Gerbaldi, F. (Ed.) 1918 Scritti matematici offerti ad Enrico d'Ovidio. Torino: Bocca.

Glass, E. 1983 Mathematics between logic and society in the work of Felix Klein (1849-1925). Nieuw Archiv voor Wiskunde (3) 30, p. 124-138.

Gosztonyi, A. 1976 Der Raum. Geschichte seiner Probleme in Philosophie und Wissenschaften. Freiburg: Alber.

Grattan-Guiness, I. 1981 Mathematical Physics in France, 1800-1840: knowledge, activity, and historiography. In: Dauben ((1981)), p. 95-138.

——————— 1982 Recent researches in "French Mathematical Physics of the early 19th century". Annals of Science 38, p. 663-690.

——————— 1984 Work for the workers: advances in engineering mechanics and instruction in France 1800-1830. Annals of Science 41, p. 1-33.

Graves, J. C. 1971 The conceptual foundations of contempory relativity theory. Cambridge: MIT Press.

Gray, J. 1979a Non-euclidean geometry—a re-interpretation. Hist.Math. 6, p. 236-258.

——— 1979b Ideas of space; euclidean, non-euclidean and relativistic. Oxford: Clarendon.

Gretschel, H. 1869 August Ferdinand Möbius. Archiv der Mathematik und Physik 49, Literarischer Bericht CLXXXXV, p. 1-9.

Grigorian, A. T. 1960 Les travaux sur la mécanique non-euclidienne en Russie. Scientia (6) 95, p. 347-350.

Gundelfinger, S. (Hrsg.) 1902 Drei Briefe Aronholds an Hesse. Crelle 124, p. 59-79.

Hankel, H. 1884 Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten (Vortrag vom 29.4.1869). Tübingen: Fues (2.Auflage).

Happel, D. 1980 Klassifikationstheorie endlich-dimensionaler Algebren in der Zeit von 1880 bis 1920. L'enseignement Math. (II) 26, p. 91-102.

Hawkins, T. 1972 Hypercomplex numbers, Lie groups and the creation of group representation theory. Arch. Hist. Exact Sciences 8, p. 243-287.

——— 1977a Another look at Cayley and the theory of matrices. Archives Internationales d'Histoire des Sciences 27, p. 82-112.

——— 1977b Weierstrass and the theory of matrices. Arch. Hist. Exact Sciences 17, p. 119-163.

——— 1980 Non-euclidean geometry and Weierstrassian mathematics: the background to Killing's work on Lie algebras. Hist. Math. 7, p. 289-342.

——— 1982 Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras. Arch. Hist. Exact Sciences 26, p. 127-192.

——— 1984 The "Erlanger Program" of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics. Hist. Math. 11, p. 442-470.

Henderson, L. D. 1983 The fourth dimension and non-euclidean geometry in modern art. Princeton: Princeton Univ. Press.

Henneberg, L. 1894 Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. J.DMV 3, p. 567-599.

——— 1903 Die graphische Statik der starren Körper. Enc. der Math. Wiss. IV 1, p. 345-434 (IV 5).

Hofmann, J.E. 1959 Alexander von Humboldt in seiner Stellung zur reinen Mathematik und ihrer Geschichte. In: A. v. Humboldt. Gedenkschrift zur 100. Wiederkehr seines Todestages, Berlin: Akademie-Verlag, p. 237-287.

Jacobi, C. G. J. 1835 Über die Pariser Polytechnische Schule (Vortrag vom 22.5.1835). Gesammelte Werke 7, p. 355-370.

Jahnke, H./ Otte, M. (Hrsg.) 1981 Epistemological and social problems in the early ninteenth century. Dordrecht: Reidel.

Jammer, M. 1980 Das Problem des Raumes. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft (2.Auflage).

Jung, G. 1903 Geometrie der Massen. Enc. der Math. Wiss. IV 1, p, 279-344 (IV 4).

Klein, F. (Hrsg.) 1874 Rudolf Friedrich Alfred Clebsch. Versuch einer Darstellung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen. Math. Ann. 7, p. 1-55.

——— 1921 Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Band 1, Berlin: Springer (Reprint: Berlin: Springer 1973).

Klein, F. 1922 Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Band 2. Berlin: Springer (Reprint: Berlin: Springer 1973).

——— 1923 Göttinger Professoren. Lebensbilder von eigener Hand. Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen 5, p. 11-36.

——— 1926/27 Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert. Berlin: Springer. Teil I: 1926, Teil II: 1927. (Reprint: Berlin: Springer 1979).

Klemm, F. 1966 Die Rolle der Mathematik in der Technik des 19. Jahrhunderts. Technikgeschichte 33, p. 72-90.

Kline, M. 1972 Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford Univ. Press.

Koppelmann, E. 1971/72 The calculus of operations and the rise of abstract algebra. Arch. Hist. Exact. Sciences 8,p. 155-242.

Kötter, E. 1901 Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). J.DMV 5, p. 1-486.

Lewis, A. C. 1977 H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik. Annals of Science 34, p. 103-162.

[Lindemann, F.] 1923 F. v. Lindemanns 70. Geburtstag. J.DVM 32, Mitteilungen und Nachrichten, p. 24-30.

Lorey, W. 1916 Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19.Jahrhunderts. Leipzig: Teubner (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Bd. 3).

Loria, G. 1901 Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. Bibliotheca Mathematica 2, p. 392-440.

Mach, E. 1933 Die Mechanik in ihrer Entwicklung kritisch dargestellt. Leipzig: Brockhaus (9.Auflage).

Mainzer, K. 1980 Geschichte der Geometrie. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut.

Manegold, K. H. 1966 Eine Ecole Polytechnique in Berlin. Technikgeschichte 33, p. 182-196.

Mehrtens, H. et al. (Ed.) 1981a Social History of nineteenth century mathematics. Boston: Birkhäuser.

Mehrtens, H. 1981b Mathematicians in Germany circa 1800. In : Jahnke/Otte ((1981)), p. 401-420.

Meyer, W. F. 1892 Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. J.DVM 1, p. 79-292.

Mises, R. von 1924 Felix Klein. Zu seinem 75.Geburtstag am 25.April 1924. Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik 4, p. 86-92.

Möbius, A. F. 1885-87 Gesammelte Werke (=GW). Leipzig: Hirzel.

Moseley, J. 1979 Sir Robert Stawell Ball, F. R. S.. Journal of the British Interplanetary Society 32, p. 156-160.

Müller, E. 1910 Die verschiedenen Koordinatensysteme. Enc. der Math. Wiss. III 1.1., p. 597-770 (II AB 7).

Neuenschwander, E. 1978 Der Nachlass von Casorati (1835-1890) in Pavia. Arch. Hist. Exact Sciences 19, p. 1-89.

Newmann, J. R. 1953 William Kingdon Clifford. Scientific American 188, p. 78-84.

Noll, W. 1974 The foundations of mechanics and thermodynamics; selected papers. Berlin: Springer.

Plücker, J. 1895 Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Leipzig: Teubner.

——— 1896 Gesammelte Physikalische Abhandlungen. Leipzig: Teubner.

Pollock, F. 1879 Biographical [note of W. K. Clifford].In: Clifford ((1879)) I, p. 1-55.

Pont, J.-C. 1974 La topologie algébrique dès origines à Poincare. Paris: Presses Universitaires.

Portnoy, E. 1982 Riemann's contribution to differential geometry. Hist. Math. 9, p. 1-18.

Prandtl, L. 1919 Felix Klein und die Förderung der angewandten Wissenschaften. Die Naturwissenschaften 7, p. 307-310.

Pyenson, L. 1979 Mathematics, education, and the Göttingen approach to physical reality 1890-1914. Europa 2 (2), p. 91-127.

Reich, K. 1973 Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828-1868). Arch. Hist. Exact Sciences 11, p. 273-382.

Reichardt, H. 1976 Gauss und die nichteuklidische Geometrie. Leipzig: Teubner.

Reinhardt, C. 1887 Über die Entstehungszeit und den Zusammenhang der wichtigsten Schriften und Abhandlungen von Möbius. In: Möbius GW 4((1887)), p. 699-728.

Richards, J. L. 1977 The evolution of empiricism: Hermann von Helmholtz and the foundations of geometry. British Journal Phil. Sciences 28, p. 235-253.

——— 1979 The reception of a mathematical theory: non-euclidean geometry in England 1868-83. In: Barnes, B./Shapin, S. (Eds.), "Natural Order: Historical studies of scientific culture", London : Sage 1979, p. 143-166.

——— 1980 The art and science of British algebra: A study in the perception of mathematical truth. Hist. Math. 7, p. 343-365.

Riecke, E. 1896 Plücker's Physikalische Arbeiten. In: Plücker ((1896)), p. XI-XVIII.

Rothe, H. 1916 Systeme geometrischer Analyse. Enc. der Math. Wiss. III 1.2, p. 1276-1423 (III AB 11).

Rühlmann, M. 1885 Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik und der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften. Leipzig: Baumgärtner.

Russel, B. 1897 An essay on the foundations of geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Schmidt, H. 1978 Philosophisches Wörterbuch. Stuttgart: Kröner (20.Auflage).

Schoenflies, A./Grübler, M. 1902 Kinematik. Enc. der Math. Wiss. IV 1, p. 190-278 (IV 3).

Schoenflies,A. 1904 Über den wissenschaftlichen Nachlaß Julius Plückers. Math. Ann. 58, p. 385-403.

——————— 1909 Projektive Geometrie. Enc. der Math. Wiss. III 1.1, p. 389-480 (III AB 5).

——————— 1919 Klein und die nichteuklidische Geometrie. Die Naturwissenschaften 7, p. 288-297.

Scholz, E. 1980 Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Boston: Birkhäuser.

———— 1982 Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie. Arch. Hist. Exact Sciences 27, p. 213-232.

Schröder, K. 1957 Riemanns Habilitationsvortrag und seine Auswirkungen in Mathematik und Physik - ein historischer Überblick. In: Naas, J./Schröder, K. (Hrsg.),"Der Begriff des Raumes in der Geometrie", Berlin: Akademie-Verlag 1957 (Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstitutes für Mathematik), p. 14-26.

Schubring, G. 1981 On education as a mediating element between development and application: the plans for the Berlin Polytechnic Institute (1817-1850). In: Jahnke/Otte ⟪1981⟫, p. 269-284.

Schuberth, E. 1971 Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Stuttgart: Freies Geistesleben.

Segre, B. 1932 La geometria in Italia, dal Cremona ai giorni nostri. Annali di Matematica (4) 11, p. 1-16.

Segre, C. 1912 Mehrdimensionale Räume. Enc. der Math. Wiss. III 2.2 A, p. 769-972 (III C 7).

——— 1919 H. G. Zeuthen. Atti della Reale Acc. delle Scienze di Torino 55(1919/20), p. 327-328.

Shaw, H. S. H. 1892 Second Report on the development of graphic methods in mechanical science. In: Report of the Annual Meeting of the British Association for the Advancement of Science (1892), p. 373-531.

Smith, H. J. S. 1882 Introduction [to the Mathematical Papers of W. K. Clifford]. In: Clifford (1882), p. XXXI-LXX.

Sommerfeld, A. 1919 Klein, Riemann und die mathematische Physik. Die Naturwissenschaften 7, p. 300-303.

Stäckel, P. 1903 Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten. J.DMV 12, p. 469-481.

——————— 1905 Elementare Dynamik. Enc. der Math. Wiss. IV 1, p. 435-691 (IV AB 6).

Stephen, L. 1887 William Kingdon Clifford. Dictionary of National Biography 4(1887), p. 540-541.

Strubecker, K. (Hrsg.) 1972 Geometrie. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft (Wege der Forschung, Bd. 177).

Struik, D. J. 1980 Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wiss. (7. Auflage).

Szabó, I. 1979 Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. Basel: Birkhäuser (2.Auflage).

Taton, R. 1950 Gaspard Monge. Elemente der Mathematik, Beiheft Nr. 9, Basel: Birkhäuser.

———— 1951 L'oeuvre scientifique de Monge. Paris: Presses Universitaires.

——— 1952 Monge, créateur des coordonnées axiales de la droite, dites de Plücker. Elemente der Mathematik 7, p. 1-5.

——— 1953 The French Revolution and the progress of science. Centaurus 3, p. 73-89.

Timerding, H. E. 1902 Geometrische Grundlegung der Mechanik des starren Körpers. Enc. der Math. Wiss. IV 1, p. 125-189 (IV 2).

——— 1922 Theodor Reye. J.DMV 31, p. 185-203.

Tobies, R. 1981 Felix Klein. Leipzig: Teubner.

Torretti, R. 1978 Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré. Dordrecht: Reidel.

Tóth, I. 1972 Die nichteuklidische Geometrie in der Phänomenologie des Geistes. Frankfurt/Main: Heiderhoff.

——— 1979 Speukulationen über die Möglichkeit eines nichteuklidischen Raumes vor Einstein. In: "Einstein Symposion Berlin", Lecture Notes in Physics 100, p. 46-83.

Truesdell, C. A. 1960 The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788. Euler, Opera omnia, Ser. II, XI 2. Zürich: Orell Füssli.

——— 1968 Essays in the history of mechanics. New York:Springer.

Tucker, R. 1881 W. K. Clifford. In: Clifford ((1882)), p. XV-XIX.

Voss, A. 1901 Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Enc. der Math. Wiss. IV 1,p. 3-121 (IV 1).

——— 1919 Felix Klein als junger Doktor. Die Naturwissenschaften 7, p. 280-287.

Vries, H. de 1926-40 Historische Studien. Groningen: Nordhoff; Bd. 1: 1926, Bd. 2: 1934, Bd. 3: 1940.

Weiss, E. A. 1930 Eduard Study, ein Nachruf. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 29, p. 52-77.

——— 1934 E. Studys Mathematische Schriften. J.DMV 43, p. 108-124, 211-225.

Wirtinger, W. 1919 Klein und die Mathematik der letzten fünfzig Jahre. Die Naturwissenschaften 7, p. 286-288.

Wussing, H. 1958 Die Ecole Polytechnique - eine Errungenschaft der französischen Revolution. Pädagogik 13, p. 646-662.

——— 1969 Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wiss..

Wussing, H./ Arnold, W. (Hrsg.) 1978 Biographien bedeutender Mathematiker. Köln: Aulis Deubner.

Zindler, K. 1921 Algebraische Liniengeometrie. Enc. der Math. Wiss. III 2.2 A, p. 973-1228 (III C 8).

Register

Die Zahlen nach dem Schrägstrich beziehen sich auf das Literaturverzeichnis

Absolute 118ff., 125, 137ff.
Absolute Polarität 130
Absolutfigur XII
Abstand, nichteuklidischer 120f.
Académie des Sciences 6
Achsenkoordinaten 43f., 60, 65, 73, 85
Adams, George 214 / 242
d'Alembert, Jean Baptiste le Rond 8, 13, 15, 17f.
d'Alembertsches Prinzip 11
Affinität 32
Amaldi, Ugo 226f. / 244
Ampere, André Marie 40
Analogie zwischen Kräften und Rotationen 16, 21, 25 (Tabelle 2), 37-41, 103, 153, 157, 192
Analysis 6
Analytische Geometrie 7, 49-52, 218
Analytische Mechanik 1, 11ff., 40
Analytische Methode in der Geometrie (s. auch Einheit ...) 3, 7ff., 21, 48f., 53ff.
Antike 7, 29
Arbeitsbegriff,
euklidischer 14, 115
nichteuklidischer 161-163, 188
Arnold, Wolfgang / 251
Aronhold, Siegfried Heinrich 221
Arithmetisierung 209ff.
Atomismus 212
Axiomatik
- der Statik 32, 215
- der Mechanik 215

Babbage, Charles 171
Bailhache, Patrice 11, 219f. / 244
Ball, Robert Stawell
Diskussion der Werke 109-110, 178f.
erwähnt 3, 98, 108, 180f., 182f., 191, 200, 211, 213, 215, 217, 222ff., 226 / 235-240, 244
Ball, W. Valentine 224 / 244
Ballsche Schraube (s. Schraubentheorie)
Baltzer, Richard 220 / 244
Battaglini, Guiseppe
Diskussion der Werke 79-81
erwähnt 3, 36, 61, 74, 83f., 91, 94 159, 196f., 223, 226 / 233-235
Barycentrischer Calcul 32, 39, 207
Becher, Harvey W. 225 / 244
Beck, Hanno 221 / 244
Bedingungsgleichung für Geradenkoordinaten 43ff., 60, 65, 74, 77, 84f.
Behnke, Heinrich 210, 227 / 244
Beltrami, Eugenio
Diskussion der Werke 198
erwähnt 79, 117, 126, 196f., 203, 208, 225 / 233, 236
Benteli, W. 213 / 241
Bernoulli, Daniel 11, 29
Bernoulli, Johann 11, 29, 40
Bertrand, Joseph Louis 19 / 244
Berzolari, Luigi 196
Betti, Enrico 197
Bewegung, projektive oder nichteuklidische 42, 126-129, 176-181, 185-188, 201f.
Bewegungsgruppe des nichteuklidischen Raumes 179
Bewußtseinsgeschichte 123f., 224
Biermann, Kurt-R. 47, 221 / 244
Biot, Jean-Baptiste 53
Biquaternionen 174, 177, 180-183, 201, 208
Blaschke, Wilhelm 213f., 222, 227 / 242
Bobillier, Etienne 31, 49f.

Bolyai, Janos 117, 174, 224
Bois- Reymond, Emil du 221
Bonola, Roberto 79, 196, 217, 224f. / 229, 244
Boole, George 171, 179
Bottazini, Umberto 222, 226 / 244
Bottema, Oene 215 / 242
Boyer, Charles 7, 53, 217f., 221 / 244
Brill, Alexander 221 / 244
Brioschi, Francesco 196f.
Bruhns, Carl Christian 220 / 244
Buchheim, Arthur
Diskussion der Werke 181-183
erwähnt 3, 179, 183, 201, 208 / 238
Bunsen, Robert Wilhelm 37
Burnside, William
Diskussion der Werke 179
erwähnt 180 / 239
Büschel von linearen Komplexen 71, 88f., 97, 147ff.

Cantor, Georg 124
Cantor, Moritz 7, 218 / 244
Carathéodory, Constantin 223f. / 244
Carnot, Lazare 9f., 13
Cauchy, Augustin Louis 12, 15, 122, 219
Cayley, Arthur
Diskussion der Werke 44-45, 51-52, 117-119
erwähnt 12, 54, 56, 61, 74, 79, 84, 99ff., 119, 123, 165, 171f., 175, 178f., 181, 183f., 191, 196, 219ff., 222, 225f., 227 / 232-234, 239, 245
Chasles, Michel
Diskussion der Werke 19-25, 41-43
erwähnt 3, 15, 18, 31, 33, 37, 75 81, 98, 111, 125, 145, 165, 218ff., 225 / 231-233, 236, 243, 245
Charakteristik 42, 129ff., 144
Charakteristikenkomplex 19, 42, 144
Clebsch, Alfred 55f., 64, 74, 79, 83, 105ff., 119, 125, 167f., 196, 201f., 207, 221ff., / 234, 236, 238, 245
Clifford, William Kingdon
Diskussion der Werke 172-185
erwähnt 3, 109, 189, 191, 200, 202, 204, 208, 225ff. / 234-238, 245
Cliffordsche Parallelen 174, 176-180, 226
Cliffordsche Schiebungen 176-181, 200, 226f.
Codazzi, Delfino 197
Coolidge, Julian Lowell 1, 124, 209f., 217f. / 245
Coriolis, Gustav 13f.
Coriolis-Beschleunigung 114
Couple 15
Cox, Homersham
Diskussion der Werke 181
erwähnt 179, 183, 226 / 237
Coxeter, Harold S.M. 221, 224, 226 / 242
Crelle, August, Leopold 31, 47, 221
Cremona, Luigi 79, 196
Crowe, Michael J. 220, 224 / 245
Culmann, Karl 174

Dauben, Joseph W. 220 / 245
Darstellende Geometrie 7f., 207
Degen, Heinz 221 / 245
DeMorgan, Augustus 171, 179
Descartes, René 8, 53, 56
Determinanten, 51, 54, 74, 197
Differentialgeometrie 7, 117, 196f., 209f., 224ff.
Differentialgleichungen 7, 11
Differentialprinzipien 12
Dimentberg, F. M. 215 / 242
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 31
Distanz, nichteuklidische 120f., 125
Doppelverhältnis 31, 120f., 144, 223
-von vier linearen Komplexen 147, 151
Drehkreuz 39
Drehpaar 27, 38
Drehmoment, nichteuklidisches 157-161, 188, 191, 193
Drehsystem (s.Rotationssystem)
Dronke, Adolf 221f, / 245
Dualität, Dualitätsprinzip (s. auch Polarität)
Erklärung 21, 50

erwähnt 9, 21, 23, 31, 48ff., 92f., 102, 157, 164, 174f., 202, 210, 219
Duffy, Joseph 216 / 243
Dugas, René 217, 219 / 245
Duhem, Pierre 217, 220 / 245
Dupin, Charles 13
Dyname 24, 61, 66, 79, 201
Dynamik, 2, 24
analytische Prinzipien der 11f.
euklidische 81, 101, 111-115
nichteuklidische 105, 111, 188-195, 208

Eccarius, Wolfgang 221 / 245f.
Ecole Polytechnique 4, 5f., 13, 29f., 217
Einheit von analytischer und synthetischer Methode 7ff., 34ff., 39, 53f., 60, 73, 106f., 166f., 174f., 202, 207f.
Einstein, Albert 1, 173, 210
Elementarteilertheorie 83
Elliptische Geometrie 117, 120, 174-180, 185-188, 202, 205, 208, 214
Energie, kinetische 115, 184, 189
Energiebegriff,
euklidischer 115
nichteuklidischer 3, 161-163, 188
Energieerhaltungsgleichung 115, 191
Erlanger Programm von Felix Klein 32, 106, 119, 122-123, 168, 202, 207
Erlecke, Albert / 229
Ernst, Wilhelm 56, 221f. / 246
Euler, Leonhard 8, 11, 13, 15, 17f., 21, 29, 219
Eulersche Bewegungsgleichungen
euklidisch 17, 111ff., 193
nichteuklidisch 184, 190, 193, 198f.

Fano, Gino 218 / 246
Faraday, Michael 56f.
Fermat, Pierre de 8
Fernebene XII
Fiedler, Wilhelm 83f., 220, 223 / 234, 246
Forsyth, Andrew Russel 221 / 246
Fourier, Jean Baptiste Joseph de 9, 40
Francesco, Domenico de
Diskussion der Arbeiten 198f.
erwähnt 191, 208, 227 / 239f.
Fraser, Craig 218, 220 / 246
Freguglia, Paolo 226 / 246
Freudenthal, Hans 210, 224, 227 / 246
Fubini, Guido 200 / 239
Fundamentalfläche einer Maßbestimmung XII 117ff., 125, 137ff., 185, 201
Fundamentalkomplexe 93, 96-98, 110, 195

Gantmacher, F. R. 226 / 242
Garnier, René 214 / 242
Gauss, Carl Friedrich 29, 31, 122, 174, 196
Geomechanik / 246
Geometrie der Bewegung (euklidisch) 42
Geometrische Optik 11
Geometrische Mechanik 1f., 13, 39, 105, 167, 171, 183, 207f., 209ff., 213ff.
Geiger, Hans 213 / 241
Gerbaldi, Francesco 227 / 246
Gergonne, Joseph-Diaz 9f., 30f., 49, 51, 53, 220, 231
Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte 48
Giering, Oswald 213f., 227 / 242
Gillispie, Charles C. / 229
Giorgini, Gaetano 20, 24
Gleichgewichtsbedingung 26, 34ff.
Goldstein, Herbert 224 / 242f.
Gordan, Paul 79, 196, 201f.
Goeschen, Georg Joachim 35
Gosztonyi, Alexander 225 / 246
Goethe, Johann Wolfgang von 29
Goursat, Edouard 179 / 238
Graphische Statik 2
Graphische Verfahren in der Mechanik 2
Grassmann, Hermann 39, 179, 181, 183, 214, 224
Grattan-Guiness, Ivor 217ff. / 246
Graves, John Cowperthwaite 225 / 246
Gravitationstheorie 1, 3 , 210
Gray, Jeremy 217, 224f. / 247

Gregory, Duncan Farquharson 171
Gretschel, Heinrich / 247
Grigorian, A. T. 214 / 247
Groot, J. de 215, 217 / 229
Grübler, Martin 20, 42, 217, 219f. / 249
Grünwald, Anton 213 / 240
Gschwind, Peter 214 / 242
Gundelfinger, Siegmund 221 / 247

Hamel, Georg 215 / 241
Hamilton, William Rowan 1, 11f., 18, 171, 179f., 182
Hamiltonsches Prinzip 199, 203f., 217
Hankel, Hermann 49 / 247
Haenzel, Gerhard 213 / 241
Harmonische Lage von Dynamen (nach Battaglini) 80
Happel, Dieter 227 / 247
Hauptachsen eines linearen Komplexes oder Nullsystems
euklidisch 34, 59, 69, 72, 79, 110
nichteuklidisch 140ff.
Hauptachsen einer nichteuklidischen Bewegung 129
Hauptträgheitsachse 16, 189, 194
Hauptträgheitsebene 189
Hauptträgheitskomplex 110, 194
Hauptträgheitsschraube 110, 194
Hauptträgheitstetraeder 189
Hawkins, Thomas 202f., 220, 223ff., 227 / 247
Heath, Robert, Samuel
Diskussion der Werke 183 - 195
erwähnt 3, 105, 111, 179, 198f., 208, 211 / 238
Helmholtz, Hermann von 123, 171, 173, 202, 225 / 233f.
Henderson, Linda D. 224 / 247
Henneberg, Lebrecht 217 / 247
Herder, Johann Gottfried 29
Herpolhodie 17, 199
Herschel, John Frederick William 171
Hesse, Otto 55, 221
Hilbert, David 210f.
Hjelmslev, Johannes 200, 240
Hofmann, Joseph Ehrenfried 221 / 247
Hölder, Ernst 214 / 241f.
Hopf, Heinz 226 / 241
Humanismus 29
Humboldt, Alexander von 47ff., 221
Humboldt, Wilhelm von 29, 47
Hunt, Kenneth, H. 215 / 242
Hyperbolische Geometrie 121
Hyperebene, vierdimensionale 91f., 102, 103, 194
Hyperebenenkoordinaten 91f., 102, 164, 194
Hyperkomplexe Zahlen (s.auch Biquaternionen) 117, 208, 217, 227

Industrialisierung 13, 30
Intensität einer Kraft 26, 61. 154f.,
- eines Kraftsystems 155
- einer unendlich kleinen Bewegung 143, 152
Invariante des linearen Komplexes (s.auch Parameter) 90, 95ff.
Invariante zweier linearer Komplexe (s. simultane Invariante)
Invariantes Tetraeder 126ff.
Involution (im Sinne von Sylvester) 43f.
- (im Sinne von Battaglini) 81
- (im Sinne von Klein) 91, 95ff., 103, 147, 163

Jacobi, Carl Gustav Jacob 1, 11f., 18, 31, 55, 204, 221 / 247
Jacobs, Konrad 223
Jahnke, Hans Niels / 247
Jammer, Max 224 / 247
Jung, Guiseppe / 247

Kant, Immanuel 123
Killing, Wilhelm
Diskussion der Werke 203 - 205
erwähnt 175, 223, 227 / 237f.
Kinematik,
euklidische 1f., 13, 16, 19-23, 26f. 42, 81, 105, 143, 201, 207, 213, 215ff., 219

nichteuklidische 100, 105, 111, 126 -146, 164, 181, 185-189, 198, 201f., 207
Kirchhoff, Gustav Robert 57
Klein, Christian Felix
Diskussion der Werke 83-108, 119-124
erwähnt 2f., 6, 8, 10f., 14, 29, 32, 36, 41, 48, 57f., 61f., 72ff., 79, 81, 109, 111, 113, 117, 125, 143ff., 163, 165, 167f., 171, 175, 178, 181, 183, 188, 196f., 200ff., 203, 207, 209ff., 213, 219, 221ff., 224ff. / 234-241, 247f.
Klemm, Friedrich 219 / 248
Kline, Morris 8, 217, 226 / 248
Komplex, 59, 73
linearer (s.auch Nullsystem) 37, 43ff., 59, 66ff., 79ff., 83ff., 87, 129ff.
quadratischer (zweiten Grades) 19f., 43, 72, 79, 83, 96
spezieller 68, 71, 88
Komplexfläche 73
Komplexraum, fünfdimensionaler 80f., 100f., 103f., 113, 163-165, 192ff.
Kongruenz, 59, 73
lineare 59, 71f., 88f., 177
Konfigurationsraum 2, 124, 210
Konjugierte Geraden (bezüglich eines Nullsystems oder eines linearen Komplexes) 34, 59, 68, 79, 99
Kontinuumsmechanik 1, 12, 215, 217,
Koordinaten
- einer Geraden 26, 43ff., 50ff., 59ff., 64, 74, 84, 222
- einer Kraft 45, 61, 65, 154
- eines Kräftesystems 37, 66, 80, 155ff.
- eines linearen Komplexes 89, 96
- einer unendlich kleinen Bewegung 45, 143
Koppelmann, Elaine 219, 225 / 248
Korreziprokalschrauben 98, 110
Kötter, Ernst 31, 42, 217ff. / 248
Kraftbegriff, nichteuklidischer 3, 99, 153-157, 178, 188, 192
Kräftepaar
Erklärung 25-27
erwähnt 15, 23, 33f., 37, 104
Kräftesystem 24, 34, 37, 66ff., 79, 101f., 142
Kraftkomplex (s.Kraftsystem)
Kraftkreuz 39, 66, 104, 155f.
Kreiseltheorie 211
Kreispunkte, imaginäre XII 118, 125
Kugelkreis, imaginärer 118, 121 125, 148, 165

Lacroix, Sylvestre François 9
Lagrange, Joseph Louis 1, 6, 7f., 11f., 13, 17f., 21f., 31, 40, 207, 218ff.
Lambert, Johann Heinrich 219
Laplace, Pierre Simon 5, 207
Legendre, Adrien Marie 5
Leibniz, Gottfried Wilhelm 29
Leitgeraden einer linearen Kongruenz 59, 72, 88
Leitgerade eines speziellen Komplexes 88
Lessing, Gotthold Ephraim 29
Lewis, Albert C. 224 / 248
Lie, Sophus 119, 123, 145, 202, 227, 235
Lie-Algebra, 203, 205
Liebmann, Heinrich 79, 196, 214, 217, 224 / 240, 244
Lindemann, Ferdinand
Diskussion der Werke 125-169
erwähnt 3, 10, 73f., 100, 105f., 111, 178f., 181, 184f., 188, 192, 196, 203f., 207f., 211, 220, 222, 225f. / 236-238, 248
Linienkoordinaten (s.Koordinaten einer Geraden)
Linienquadrik 192
linksgewundener linearer Komplex 71
Lipkin, Harvey 216 / 243
Lipschitz, Rudolf 83, 126, 203, 217 / 235
Lobačevskij, Nikolai Ivanovič 117, 174, 196, 204, 224
Locher, Louis 224, 226 / 242
Lorey, Wilhelm 219f. / 248

Loria, Gino 217, 227 / 229, 248
Lotze, Alfred 214 / 241
Ludwig, Karl 221
Lüroth, Jacob
Diskussion der Werke 74
erwähnt 75, 233

MacAulay, Alexander 183 / 239
Mach, Ernst 11, 217 / 248
Magnus, Ludwig Immanuel 34, 64 / 231
Magnus, Wilhelm 226 / 242
Mainardi, Gaspare 197
Mainzer, Klaus 217 / 248
Manegold, Karl-Heinz 30, 217, 220 / 248
Mannheim, Amédé 30, 42, 220
Mannigfaltigkeit, n-dimensionale projektive 122-124
Marcolongo, Robert 40, 215, 220 / 241
Maßbestimmung
euklidisch 62, 118, 125
lokale 117
nichteuklidische 99f., 117-121, 125ff., 197f.
Masse-Trägheitstensor 189, 194
Mathematische Physik 5, 30
May, Kenneth Ownsworth / 229
Mechanismentheorie 215f.
Mehrtens, Herbert 219 / 248
Mengenlehre 1, 124
Methode,
genetische 107, 203
mathematische, bei Clifford 173-175
Killing 203
Klein 3, 105-108
Möbius 38f.
Plücker 3, 53-58
Study 200-202
philosophische 7
Metrik (s.Maßbestimmung)
Meyer, Wilhelm Franz 221 / 248
Mises, Richard von 108, 111, 213, 215, 223 / 241, 248
Mittag-Leffler, Gösta 227
Möbius, August Ferdinand
Diskussion der Werke 32-39
erwähnt 3, 10, 22, 24f., 29ff., 40f., 43, 48ff., 63f., 73, 79, 94, 98, 101, 125, 143, 159, 174, 196, 215, 219f., 222 / 231f., 248
Momente, Theorie der
euklidisch 79-81
nichteuklidisch 157-161
Moment einer Geraden bezüglich eines Punktes 25, 65, 79
- eines Kräftepaares 16
- eines Kräftesystems bezüglich einer Geraden 36, 79, 95f.
- zweier Geraden
euklidisch 75
nichteuklidisch 149-152, 197
- zweier Kräfte 33f.
- zweier Kräftesysteme 80
- zweier linearer Komplexe
euklidisch 95f.
nichteuklidisch 149-152
Monge, Gaspard 5, 7ff., 13f., 15f., 18f., 31, 43, 53, 196, 207, 217, 219f.
Moseley, James 224 / 248
Mozzi, G. 15, 19
Müller, Emil 220 / 248
Müller, Felix / 229

n-dimensionale Geometrie (s.auch Mannigfaltigkeit) 51f., 122-124, 166, 196ff., 203f., 210, 224
Napoléon 5
Naturphilosophie, idealistische 29f., 47f.
Neigung zweier Geraden oder linearer Komplexe 146-149
Neuenschwander, Erwin 222 / 248
Neuhumanismus 29f., 47f., 220
Newman, James R. 173, 225 / 249
Newton, Isaac 5, 11
Noll, Walter 215 / 249
Noether, Max 221 / 244
Nullebene 34, 37, 49, 68, 87, 133
Nullfläche 184, 189
Nullgerade, Nullinie 34
Nullkorrelation 19, 59, 64, 79, 142
Nullpunkt 34, 37, 49, 68, 88, 133
Nullsystem (s.auch linearer Komplex)
Erklärung 32-34, 68-71, 132-138
erwähnt 15, 20, 24, 38, 43, 49, 109, 207

Octonion 183
Oken, Lorenz 48
Operations-Kalkül 171, 179
Otte, Michael / 247
Ovidio, Enrico d'
Diskussion der Werke 197f.
erwähnt 3, 123, 196f., 226f., 235-237

π 3, 167f., 208
Paolis, Riccardo de 196f. / 238
Parameter des linearen Komplexes (s.auch Invariante des linearen Komplexes) 60, 69, 80, 95ff., 109
Pascal, Blaise 19
Pascal, Ernesto 196
Pasch, Moritz 210, 225, 235
Peacock, George 171, 179
Perron, Oskar 168
Petersen, Johannes = Hjelmslev, Johannes
Phasenraum 2, 124, 210
pitch 109
Plücker, Julius
Diskussion der Werke 49-52, 53-73,
erwähnt 8, 10, 29, 31, 43ff., 74, 79ff., 83f., 95f., 105ff., 119, 122, 141, 171, 196, 207, 215, 221ff., 225 / 231-234, 249
Poincaré, Henri 2
Poinsot, Louis
Diskussion der Werke 15-19, 24-27
erwähnt 3, 9f., 13, 15, 31, 33, 35, 37, 40f., 61, 98, 125, 196, 207, 219ff. / 231f. 243
Poisson, Siméon Denis 11
Polarität im fünfdimensionalen Komplexraum 91f., 101f., 103f., 153, 192ff.
Polaroperator 182
Polhodie 17, 199
Pollock, Frederick 225 / 249
Poncelet, Jean Victor 9, 14, 30f., 48f., 51, 53f., 196, 218f., / 233
Pont, Jean-Claude / 249
Portnoy, Esther 224, 226 / 249
Potentialfunktion, nichteuklidische 203
Prandtl, Ludwig 223 / 249
Prinzip der Kontinuität 10, 218
Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten oder Arbeit 11, 37, 40f., 79, 101f., 163
Prinzip der virtuellen Rotationen 22, 41
Produktbildung, zwei Arten von 85
Projektive Geometrie 2, 7, 10, 13, 23, 48, 118, 171, 209f.
Projektivität 49
Projektivschraubenlinie II
Proell, Reinhold 217 / 236
Pyenson, Lewis 227 / 249

Quadrik II
Quantentheorie 3, 214
quantics 117f.
Quaternionen 178, 183, 200f., 213

Raumelement
Gerade als - 60, 103, 207
Komplex als - 89ff., 103, 109, 156, 159
Raumformen, projektive 203f.
Raumproblem von
Clifford - Klein 175
Riemann-Helmholtz-Lie 123
rechtsgewundener linearer Komplex 71
Reduktion von Kräften und Kräftesystemen 15, 26
Regelfläche 73f.
Reich, Karin 224, 226 / 249
Reichardt, Hans 224f. / 249
Reinhardt, Curt 32, 35, 39, 220 / 249
Reziprozität (s. Polarität)
reziprok (im Sinne von Ball) 110
Reye, Theodor 201, 213 / 240
Richards, Joan L. 172, 224f. / 249
Riecke, Eduard 56, 222 / 249
Riemann, Bernhard 1, 117, 119, 122f., 126, 172f., 196f., 203, 205, 209f., 224f., 233
Rodrigues, Olinde 40, 101, 220 / 232
Rotationsdyname 111
Rotationskomplex 130-144, 155f., 164, 188
Rotationskoordinaten 164

Rotationskraft 154, 193
Rotationskraftsystem 156
Rotationsmoment (s.Drehmoment)
Rotationssystem 22, 24f., 39, 101f., 156
Roth, B. 216 / 242
Rothe, Hermann 217, 226 / 249
Rühlmann, Moritz 13, 219 / 249
Russel, Bertrand 119, 210 / 249

Salmon, George 83, 123
Sauer, Robert 214 / 241
Scheel, Karl 213 / 241
Schering, Ernst 203, 235f.
Schiller, Friedrich 29, 220
Schmidt, Heinrich 29 / 249
Schnittbedingung für Geradenkoordinaten 74ff., 86
Scholz, Erhard 123, 224, 226 / 250
Schoenflies, Arthur 20, 42, 60, 62, 145, 217, 219ff., 224 / 238, 249f.
Schraube (s.Schraubentheorie)
Schraubenbewegung, infinitesimale II, 15, 19, 21ff., 24, 111, 129, 144
Schraubenlinie, projektive 129, 144f.
Schraubentheorie 2, 98, 109f., 178, 180f., 191, 211, 213ff., 217, 223f., 226
Schraubung II
Schraubungsinvarianz des linearen Komplexes 71
Schröder, Kurt / 250
Schuberth, Ernst 223 / 250
Schbring, Gert 220 / 250
Schuhmacher, Heinrich Christian 117
Segre, Beniamino 79, 226 / 250
Segre, Corrado 197, 222 / 250
Shaw, Henry Selby Hele 217 / 250
Signatur der quadratischen Form der Liniengeometrie 97
Simultane Invariante zweier linearer Komplexe 90, 94ff., 101f., 103, 188
Smith, Henry J. Stephen 173f., 175, 236 / 250
Sommerfeld, Arnold 211, 223 / 241, 250
Sommerville, Duncan M'Laren Young 225, 227 / 229
Stöckel, Paul 211, 217, 223, 227 / 250
Statik (s. Kräftesystem)
Staude, Otto 225 / 241
Staudt, Georg Karl Christian von 48f., 105, 196f, 209 / 232
Steiner, Jacob 31, 48, 54f., 196, 221 / 231
Stéphanos, Kyparissos 227 / 238
Stephen, L. 174 / 250
Stevin, Simon 15
Stolz, Otto 105, 119
Strahlenkoordinaten 44f., 60, 65, 73, 85,
Strubecker, Karl 213, 226 / 241, 250
Struik, Dirk J. 196, 222 / 250
Study, Eduard
Diskussion der Werke 200-202
erwähnt 3, 111, 182, 208, 211, 213, 223, 227 / 239f.
Sylvester, James Joseph
Diskussion der Werke 43f.
erwähnt 56, 79, 97, 123, 171, 196 / 231
Synthetische Geometrie 7f., 48f., 218
Synthetische Methode in der Geometrie (s.auch Einheit...) 3, 7ff., 17, 21, 48f., 209
Szabó, István 217 / 250

Taton, René 218f. / 250f.
Technische Mechanik 13, 30, 211
Teubner, Benedictus Gotthelf 83
Theta-Funktionen 191, 199
Timerding, Heinrich Emil 40, 211, 215 217, 219f., 223f. / 240f., 251
Tobies, Renate / 251
Topologie 124, 209
Torretti, Roberto 224, 226 / 251
Tóth, Imre 224 / 251
Toupin, Richard A. 214f., 217 / 229, 242
Trägheitsellipsoid 16, 100, 105, 193, 219
Trägheitsgesetz von Sylvester 97
Trägheitsmoment 16, 184, 189, 204f.
Trägheitsradius 184
Trägheitstensor 112, 193
Transformationsgruppe 122, 201, 227
Translationskomplex 130-144, 155f., 164, 188

Translationskoordinaten 164
Translationskraft 154f., 193
Translationskraftsystem 156
Translationsmoment (s.Verschiebungsmoment)
Translationssystem 156
Transzendenz von π 3, 167f., 208
Truesdell, Clifford Ambrosius 1, 11, 214f., 217ff. / 229, 242, 251
Tücker, Robert 225 / 251
twist 110

Übertragung XII
Übertragungsprinzipien XII, 201f., 213
Umlegung 201
Unterrichtswesen in Deutschland 29f., 47f.
- in Frankreich (s.Ecole Polytechnique)

Variationsprinzipien 12
Varignon, Pierre 15, 40
Veblen, Oswald 209, 221 / 241
Vektor, linienflüchtiger 65
Vektorkalkül 25ff., 39
Vektorpaar 26f., 65
Veronese, Guiseppe 123, 196f. / 237
Verschiebungsmoment 157-161, 188, 191, 193
Verwandtschaft, geometrische 31f. ,48
Vogt, Wolfgang 200f., 227 / 241
Voss, Aurel 105, 167, 217, 220, 223f. / 251
Vries, Hendrik de 32, 219ff. / 251

Weierstrass, Karl 83, 119, 203, 223 / 234
Weiss, Ernst August 213, 225, 227 / 241, 251
Whitehead, Alfred North 183, 239
Windungssinn des linearen Komplexes 71
Winkel, nichteuklidischer 120f.
Winkelgeschwindigkeit 187, 199
Wirtinger, Wilhelm 223 / 251
wrench, 110
Wurf 49
Wussing, Hans 217, 224, 226 / 251

Young, John Wesley 209, 221 / 241

Zentrifugalbeschleunigung 114
Zeuthen, Hieronymus Georg
Diskussion der Werke 74-78
erwähnt 60, 79f., 94, 197, 222 / 234
Ziegler, Renatus 219f., 222f., 225f. / 242
Zindler, Konrad 213, 217, 219 / 239f., 251
Zylindroid 72, 80, 110, 149, 157, 222, 225