institute for logic, language and computation

ARTHUR BAKKER, RENATUS ZIEGLER

Finsler-Mengenlehre

X-96-02, *received*: December 1996

technical note

Universiteit van Amsterdam

ARTHUR BAKKER, RENATUS ZIEGLER

Finsler-Mengenlehre

X-96-02, *received*: December 1996

ILLC Research Report and Technical Notes Series
Series editor: Dick de Jongh

Technical Notes (X) Series

Institute for Logic, Language and Computation (ILLC)
University of Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
NL-1018 TV Amsterdam
The Netherlands
e-mail: illc@fwi.uva.nl

Arthur Bakker / Renatus Ziegler

FINSLER-MENGENLEHRE

© MATHEMATISCH-ASTRONOMISCHE SEKTION AM GOETHEANUM
4143 Dornach, Schweiz
August 1996

Adresse der Autoren: Arthur Bakker, Matrozenhof 44, NL-1018 ZR Amsterdam

Renatus Ziegler, Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum, CH-4143 Dornach

INHALT

Einführung 3

1. Historische und philosophische Hintergründe der Finsler-Mengenlehre 3
2. Axiome der Finsler-Mengenlehre
3. Vergleich mit anderen Mengenlehren 6
4. Hinweise auf die Literatur 7

I. *Axiome der Finsler-Mengenlehre* 9

1. Die Axiome 9
2. Mengen und Klassen 10
3. Axiom der Bestimmtheit 12
4. Axiom der Identität 14
5. Vereinigung und Durchschnitt von Klassen 16
6. Axiom der Vollständigkeit 19
7. Die Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit der Axiome 20
8. Die ZF-Axiome der Mengenlehre 22
9. Mächtigkeit und Unendlichkeit 24
10. Spezielle Mengen und Klassen 26
    10.1 Die Allmenge 26
    10.2 Die Vereinigungsmemge 27
    10.3 Die größte Ordinalzahl 27
    10.4 Die Auswahlmenge 29
11. Prinzipielle Nicht-Symbolisierbarkeit der Finsler-Mengenlehre 30

II. *Zirkelfreie und zirkelhafte Mengen* 33

1. Die Definition zirkelfreier Mengen 33
2. Existenztheoreme 35
3. Beweis der ZF-Prinzipien für zirkelfreie fundierte Mengen 37
4. Historische und philosophische Bemerkungen zum Auswahlprinzip 40
5. Spezielle zirkelfreie und zirkelhafte Mengen 41
6. Kardinalzahlen 45
7. Unerreichbare Kardinalzahlen 46
8. Cantor-Mengenlehre 48
9. Mengen-Darstellungen natürlicher Zahlen 49

Rückblick und Ausblick: Mathematik und Mengenlehre 51

1. Hierarchien von Mengenlehren 51
2. Mengenlehre und Begründungsfragen der Mathematik 51

Anhang: Offene Probleme der Finsler-Mengenlehre 53

Literaturverzeichnis 54

Index 56

EINFÜHRUNG

1. Historische und philosophische Hintergründe der Finsler-Mengenlehre

Seit Georg Cantors Abhandlungen zur Mengenlehre haben viele Mathematiker versucht, den mathematischen Bereich der Mengen, insbesondere der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen axiomatisch zu begründen. Ernst Zermelos Axiomensystem [1908] war noch im Rahmen der klassischen Tradition der Logik aufgestellt worden, das heißt ohne Bezug auf eine bestimmte symbolische Logik. Axiomatik für einen Bereich mathematischer Objekte bedeutete in diesem Zeitraum, im Sinne von David Hilberts *Grundlagen der Geometrie* von 1899, eine rein begriffliche, implizite Festlegung der für alle Begriffe und Theoreme notwendigen und hinreichenden Grundbeziehungen zwischen den Elementen des betrachteten Gegenstandsbereiches.

Erst die Erweiterung und «Präzisierung» der Zermeloschen Axiome durch Abraham Fraenkel und Thoralf Skolem brachte einen expliziten Bezug auf eine symbolische Sprache. Damit ist der Ausgangspunkt einer Entwicklung gegeben, in der sich immer mehr die Auffassung durchsetzte, daß Axiomatik die begriffliche Festlegung im Rahmen einer symbolischen Sprache bedeutet, daß also Axiomatik immer formalsprachliche Axiomatik sein muß.

Alternative, allerdings mit dem Zermelo-Fraenkel-Skolemschen System (ZF-Mengenlehre) äquivalente Axiomensysteme wurde von John von Neumann, Paul Bernays und Kurt Gödel entwickelt. Eine echte Alternative, die sich in wesentlichen Punkten von den vorangehenden Axiomensystemen der Mengenlehre unterschied, wurde zum Beispiel von Willard V. O. Quine in seinen *New Foundations* aufgestellt. Allen diesen Systemen ist jedoch gemeinsam, daß sie sich wesentlich auf eine explizit sprachlich festgelegte Logik stützen.

Paul Finslers Ansatz zur axiomatischen Erfassung der Mengenlehre ist im Gegensatz zu den bisher genannten Systemen fast völlig in Vergessenheit geraten. Dies hat seinen Grund vor allem in der Tatsache, daß sie weder gründlich rezipiert noch weiter entwickelt worden ist. Große Schwierigkeiten in der Rezeption der Finsler-Mengenlehre bereitet die Tatsache, daß Finsler streng an der ursprünglichen rein gedanklich-begrifflichen Auffassung der Axiomatik im Sinne des frühen Hilbert der Jahrhundertwende festhält und damit an eine Auffassung der Logik anknüpft, die die meisten mathematischen Logiker in den zwanziger Jahren (inklusive Hilbert) bereits verlassen hatten. Im weiteren verwendet der von der Differentialgeometrie her kommende Finsler manchmal Methoden und Notationen, die nicht üblich waren. Weiter stand der Rezeption im Wege, daß er den damals ungewohnten und heute üblich gewordenen Unterschied von Mengen und Klassen einführte sowie von vornherein auch unfundierte Mengen in sein System miteinbezog.

Eine tiefergehende Schwierigkeit für die Rezeption der Finsler-Mengenlehre war (und ist) Finslers philosophische Einstellung zur Mathematik, die wir mit *Ideenrealismus* (manchmal auch *Platonismus* genannt) bezeichnen. In dieser auch von Cantor geteilten Auffassung gilt: Die mathematischen Objekte und deren Beziehungen existieren in einem absoluten Sinne als ideale (nicht-materielle) Objekte unabhängig von der Art und Weise, wie die Mathematiker sie erkennen, gedanklich erreichen oder darstellen sowie sprachlich ausdrücken können.

Diese ideenrealistische Anschauung mathematischer Inhalte ist für Finsler nichts Hypothetisches, sondern Ergebnis der tatsächlichen mathematischen Denkerfahrung. Auf diesen philosophischen Hintergrund seiner Mengenlehre ist Finsler selbst nie näher

eingegangen, da er ihn für selbstverständlich hielt. Obwohl diese Überzeugung für das Verständnis der Finsler-Mengenlehre wesentlich ist – ohne sie läßt sich die Finsler-Mengenlehre nicht nachvollziehen – soll sie an dieser Stelle nicht weiter verfolgt oder begründet werden, da es uns hier darauf ankommt, die innere Konsistenz dieser Mengenlehre selbst zu demonstrieren. Die konsistente Denkbarkeit spricht für sich selbst, was immer man für eine philosophische Überzeugung haben mag.

Alle Mathematiker sind damit einverstanden, daß Existenz Widerspruchsfreiheit impliziert, aber Finsler hielt streng an der für viele Mathematiker immer noch selbstverständlichen Auffassung fest, daß auch die Umkehrung gilt: Widerspruchsfreiheit impliziert Existenz. Dies bedeutet, daß die (widerspruchsfreie) Denkbarkeit eines mathematischen Inhaltes mit dessen Existenz äquivalent ist. Jede Forderung, welche an die Existenz zusätzliche Bedingungen (wie Konstruierbarkeit, symbolische Ausdrückbarkeit etc.) stellt, bedeutet eine Einschränkung aller denkbaren Objekte, die einer philosophischen Rechtfertigung bedarf.

Im weiteren ging Finsler im Rahmen seiner absoluten Auffassung der Logik von der universellen Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, das heißt vom *tertium non datur* aus.

Die bisher diskutierten aus dem Ideenrealimsus entspringenden philosophischen Überzeugungen, die der Finsler-Mengenlehre zugrundeliegen, werden die meisten Mathematiker nicht überraschen, denn für sie entsprechen diese weitgehend der Forschungspraxis, ohne daß im allgemeinen diese Praxis dadurch konkret tangiert wäre. Wie sich zeigen wird, hat jedoch der Ideenrealismus weitreichende und sehr konkrete Konsequenzen für die Auffassung der Grundlegung der Finsler-Mengenlehre.

Wenn Finsler zum Beispiel von *allen* Mengen spricht, dann meint er auch *wirklich* alle. Er beschränkt sich weder auf Darstellungen in abzählbaren oder finiten Systemen noch auf Darstellungen in einer abzählbaren symbolischen Sprache wie der symbolischen Prädikatenlogik erster Stufe. Es sollen demzufolge auch alle diejenigen Mengen gemeint sein, die man (noch) nicht explizit kennt oder die nicht in irgendeinem Sinne konstruiert oder sprachlich dargestellt werden können. Dies bedeutet jedoch nicht, daß Finsler die uneingeschränkte Gültigkeit des Komprehensionsprinzips annimmt, das besagt, daß jeder Begriff (Prädikat) eine Menge bestimmt. Denn dieses Prinzip, in seiner uneingeschränkten Form, gäbe die Grundlage ab zur Ableitung von Antinomien, insbesondere der Russellschen «Menge» aller sich selbst nicht enthaltenden Mengen.

Die Antinomien, die im Zusammenhang der mathematischen Logik und der Mengenlehre aufgetreten sind und zum Anlaß der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik geworden sind, haben viele mathematischen Logiker dazu geführt, den für die mathematische Praxis nach wie vor grundlegenden Standpunkt des Ideenrealismus zu verlassen, da er für eine präzise Erfassung der logischen und erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik unzureichend schien. Es ist interessant, daß obwohl auch Kurt Gödel eine überzeugter Ideenrealist gewesen ist, er sich in fast allen seinen Schriften, insbesondere in seiner bahnbrechenden Arbeit über die Unvollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe, der gängigen Mode der Darstellung mathematischer Inhalte auf der Grundlage einer Logik in symbolisch-sprachlichem Gewande angepaßt hat (siehe dazu zum Beispiel Gödel [1995]).

Finsler hat sich gründlich mit den im Zusammenhang mit der Grundlegung der Mathematik aufgetauchten Antinomien auseinandergesetzt und auf der Grundlage seiner ideenrealistischen Logikauffassung gelöst. Es gelang ihm zu zeigen, daß zur Beherrschung der Antinomien keinerlei (sprachliche oder sonstige) Einschränkungen der Logik oder der mathematischen Begriffe eingeführt werden müssen.

Andere Lösungen der Antinomien erfordern in dieser oder jener Art einschneidende Beschränkungen des begrifflichen oder des sprachlichen Darstellungsapparates. Bezüglich der Mengenlehre wurde zum Beispiel eine Beschränkung der Größe verlangt (*limitation of size*; siehe dazu Hallett [1984]). Im Sinne Finslers muß man jedoch fragen: Warum kann es keine großen oder größten Mengen geben?

Russell wollte mit seinem Zirkelfehlerprinzip alle Arten von Selbstbeziehung ausschließen, um damit der Konstruktion der Antinomien mit einem Streich den Boden zu entziehen. Aber wird hier nicht das Kind mit dem Bade ausgeschüttet? Finsler macht darauf aufmerksam, daß die Selbstbeziehung oder Zirkelhaftigkeit einer Begriffsbestimmung nicht notwendigerweise zu einem Widerspruch führt. Die folgenden auf Finsler zurückgehenden elementaren algebraischen Beispiele für erfüllbare und nicht erfüllbare zirkelhafte Begriffsbestimmungen (Definitionen) demonstrieren dies anhand einer Bestimmungsgleichung für reelle x:

$$x = a - x.$$

Diese Gleichung ist erfüllbar, und zwar genau durch $x = a/2$. Dagegen ist die Gleichung

$$x = a + x$$

durch kein x erfüllbar, wenn $a \neq 0$; und für $a = 0$ ist der Wert von x unbestimmt.

Wie auch die höhere Mathematik zeigt, kann das mathematische Denken erfolgreich mit selbstbezüglichen Situationen umgehen, zum Beispiel bei Fixpunktstheoremen und in der Eigenwerttheorie.

Finsler ging davon aus, daß man ein alle Mengen überhaupt umfassendes Mengensystem ins Auge fassen müßte, bevor man durch irgendwelche Maßnahmen eingeschränkte Mengensysteme betrachten kann. Letztere sind dann wohldefinierte Teilsysteme des Systems aller Mengen. Dies bedeutet, daß man auch alle widerspruchsfreien (das heißt wohldefinierten) zirkelhaften Mengen in das System aller Mengen einbetten muß.

Eine andere Beschränkung des Universums der zu betrachtenden Mengen besteht in der Forderung, nur in irgendeinem präzisen Sinne konstruierbare Mengen zuzulassen, damit man überhaupt etwas in der Hand hat, wovon man konkret sprechen kann. Für einen Mathematiker, der seinen Ideenrealismus wirklich ernst nimmt, kommt diese im Grunde pragmatische Position jedoch nicht in Frage. Was ihn interessiert sind nicht die praktisch oder theoretisch auffindbaren oder konstruierbaren Mengen, sondern eben *alle* Mengen.

Das Bestreben, wirklich alle, oder soviele Mengen als möglich zu fassen, ist eine direkte Konsequenz des Ideenrealismus und kann als *Maximalprinzip* bezeichnet werden. Gödel sowie andere Mengentheoretiker und Logiker legten ebenfalls das Maximalprinzip ihren Untersuchungen zugrunde. Insbesondere hoffte Gödel, daß Axiome, welche die Existenz immer größerer Kardinalzahlen fordern, letztlich zu einem System von Mengen führen würden, in welchem die Kontinuumshypothese entschieden werden kann. Solche Axiome gibt es aber bis heute noch nicht. Finsler dagegen baute das Maximalprinzip direkt in sein drittes Axiom ein. Dies hat unter anderem zur Konsequenz, daß die Finsler-Mengenlehre prinzipiell nicht symbolisierbar ist.

2. *Axiome der Finsler-Mengenlehre*

Die von Finsler aufgestellten Axiome lauten nun folgendermaßen:

> **Axiom I (Bestimmtheit)** *Für jede Menge ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die Beziehung* $\ni$ *hat.*
>
> **Axiom II (Identität)** *Mengen sind immer dann identisch, wenn die Annahme ihrer Identität nicht zu einem Widerspruch führt.*
>
> **Axiom III (Vollständigkeit)** *Ein mathematisches Objekt ist eine Menge immer dann, wenn die Annahme, es sei eine Menge, nicht zu einem Widerspruch mit den Axiomen* ***I*** *und* ***II*** *führt.*

Diese Axiome sind im selben Sinne wie die Euklidisch-Hilbertschen Axiome zur Grundlegung der Geometrie aufzufassen. Man geht aus von einem Bereich von mathematischen Objekten, und bestimmt genau diejenigen unter ihnen als Mengen, welche die drei genannten Axiome erfüllen. Selbstverständlich werden nur *reine Mengen* betrachtet, das heißt solche Mengen, deren Elemente wieder Mengen sind. Die zur üblichen $\in$-Beziehung inverse $\ni$-Beziehung bedeutet, daß wenn $M \ni N$, dann ist N Element der Menge M.

Mit diesen Axiomen gelingt es Finsler, unmittelbar die Eindeutigkeit (Monomorphie oder Kategorizität), Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit seiner Mengenlehre abzuleiten (Abschnitt I.7).

3. *Vergleich der Finsler-Mengenlehre mit anderen Mengenlehren*

Für Kenner der traditionellen ZF-Mengenlehre mögen die Axiome aus Abschnitt 2 seltsam erscheinen. Finsler kann jedoch aufgrund einer Unterscheidung von zirkelfreien und zirkelhaften Mengen zeigen, daß alle Axiome von Zermelo für die Klasse aller zirkelfreien Mengen gelten (Abschnitt II.3). Dies bedeutet insbesondere, daß das Auswahlaxiom für zirkelfreie Mengen beweisbar ist; es ist jedoch falsch für den Bereich der zirkelhaften Mengen. Mit anderen Worten: das Auswahlaxiom ist global falsch, und lokal für den eingeschränkten Bereich der zirkelfreien Mengen beweisbar. (In der ZF-Mengenlehre ist das Auswahlaxiom unabhängig).

Im weiteren gilt in der Finsler-Mengenlehre, wie in Aczels Mengenlehre [1988] der *non-well-founded sets*, das Fundierungsaxiom nicht, das heißt es sind auch sich selbst enthaltende Mengen sowie nichtabbrechende «absteigende» Ketten von Elementbeziehungen erlaubt.

Eine besondere Leistung Finslers besteht in dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit, das heißt der Existenz *unendlicher Mengen*, und damit in dem Beweis des Unendlichkeitsaxioms. Er zeigt insbesondere die Existenz der Menge der natürlichen Zahlmengen sowie die daraus ableitbare Existenz des Kontinuums (Abschnitt II.9). Vermöge des Begriffs der zirkelfreien Mengen ist dieser Beweis mit rein mathematischen Mitteln dem berüchtigten «philosophischen» Beweis von Dedekind wesentlich überlegen. Außerdem gelingt Dedekind nur der Nachweis (besser: Hinweis) auf die im Hegelschen

Sinne «schlechte Unendlichkeit» einer nicht abbrechenden Folge von Nachfolgern. Finsler weist dagegen die Existenz einer im Sinne von Dedekind *unendlichen Menge*, das heißt einer zu einer Teilmenge ihrer selbst gleichmächtigen Menge nach, nämlich die Unendlichkeit der Menge aller zirkelfreien Mengen (Abschnitt II.5).

Damit scheint die Finsler-Mengenlehre in die Nähe der *New Foundations* zu kommen, wo ebenfalls das Unendlichkeitsaxiom der ZF-Mengenlehre beweisbar ist und das Auswahlaxiom widerlegbar (allerdings im Rahmen einer symbolischen Sprache).

In Finslers Mengenlehre gibt es, wie in den *New Foundations* und im Gegensatz zur ZF-Mengenlehre eine *Allmenge*. Diese ist jedoch zirkelhaft, da sie Element von sich selbst sein muß. Es gibt weiter eine *größte Kardinalzahl*, sowie Kardinalzahlen, welche unerreichbar sind. (In der ZF-Mengenlehre ist die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen nicht beweisbar.) Es gibt jedoch wie in der ZF-Mengenlehre so auch in Finslers Mengenlehre keine Menge aller Ordinalzahlen (Antinomie von Burali-Forti), aber es gibt eine *größte Ordinalzahl*, nämlich die Menge aller Ordinalzahlen, welche einen Nachfolger haben.

Der Beweis der Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit für das Finslersche Axiomensystem impliziert die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit des (nicht symbolisierten) Zermeloschen Axiomensystems der hier so genannten Cantor-Mengenlehre (Abschnitt II.8). Dies ist bemerkenswert, denn gemäß Gödels zweitem Unvollständigkeitstheorem gibt es für symbolisierte Axiomensysteme wie das Axiomensystem der ZF-Mengenlehre nur *relative* Konsistenzbeweise.

Es ist naturgemäß für einen mathematisch gebildeten Leser, der mit der ZF-Mengenlehre und der mathematischen Logik, daß heißt der formalen Logik im symbolischen Gewande groß geworden ist, sehr schwierig, Schlußweisen, die auf ideenrealistischen Überzeugungen ruhen, ernst zu nehmen und symbolische Gewohnheiten für eine Weile abzulegen. Wenn man wirklich versucht, in den gedanklich-begrifflichen Gehalt von Finslers Mengenlehre einzusteigen, wird man durch eine umfassende und gedanken-ästhetisch befriedigende Theorie belohnt, die zugleich ein Loblied an die Unerschütterlichkeit des menschlichen Denkens ist. Selbstverständlich sind noch viele Fragen und Probleme in der Finsler-Mengenlehre offen, sodaß ein reiches Feld weiterer Forschung übergeben werden kann.

4. Hinweise auf die Literatur

Eine erste Neubearbeitung der Finsler-Mengenlehre stammt von Burckhardt [1938, 1939]. Er hielt sich jedoch sehr eng an das Original und seine Darstellung hilft unseres Erachtens deshalb einem modernen Leser wenig für das tiefere Verständnis des Finslerschen Ansatzes. Soweit wir wissen, ist die vorliegende Neubearbeitung die erste Darstellung, die sich konsequent mit den entsprechenden Sachverhalten der ZF-Mengenlehre im Rahmen der Prädikatenlogik erster Stufe auseinandersetzt. Für Standardauffassungen der axiomatischen ZF-Mengenlehre verweisen wir auf Ebbinghaus [1994], Jech [1978], Kunen [1980] und für die naive Klassen- und Mengenlehre auf Halmos [1968].

Das einzige uns bekannte Lehrbuch der Mengenlehre, welches überhaupt auf die Finsler-Mengenlehre eingeht – wenn auch nur am Rande – ist Bachmann [1967].

Unser Ansatz ist vor allem systematisch, deshalb gehen wir nur am Rande auf historische und philosophische Aspekte oder Parallelentwicklungen ein. Es werden hier auch nicht die verschiedenen Versionen innerhalb Finslers eigenen Darstellungen untersucht. Für letzteres

sei auf Booth [1996a] verwiesen und für Hinweise auf andere Ansätze zur Aufstellung nicht-fundierter Mengenlehren auf Aczel [1988], Barwise/Moss [1991] und Devlin [1993]. Eine andere Alternative zur traditionellen Mengenlehre, die eine gewisse Verwandtschaft mit der Finsler-Mengenlehre hat, stammt von Ackermann [1956] und wird in Booth [1996a] diskutiert. In Booth [1996a] werden zudem einige Einwände diskutiert, die am Beginn der Rezeption der Finsler-Mengenlehre eine gewisse Rolle gespielt haben.

Am ausführlichsten untersucht wurden bisher die kombinatorisch interessanten endlichen und erblich-endlichen Mengen. Für Literaturhinweise verweisen wir auf Booth [1996b, c].

Weitere Ausführungen und Literaturhinweise zum Ideenrealismus finden sich in Unger [1978] und Ziegler [1992], [1996a, c, d].

I. AXIOME DER FINSLER-MENGENLEHRE

I.1 Die Axiome

Innerhalb des Bereichs aller mathematischen Objekte werden genau diejenigen als *Mengen* ausgezeichnet, welche die folgenden drei Axiome erfüllen:

> **Axiom I (Bestimmtheit)** *Für jede Menge ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die Beziehung* $\ni$ *hat.*
>
> **Axiom II (Identität)** *Mengen sind immer dann identisch, wenn die Annahme ihrer Identität nicht zu einem Widerspruch führt.*
>
> **Axiom III (Vollständigkeit)** *Ein mathematisches Objekt ist eine Menge immer dann, wenn die Annahme, es sei eine Menge, nicht zu einem Widerspruch mit den Axiomen* ***I*** *und* ***II*** *führt.*

Wie üblich seit den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts betrachtet man nur diejenigen Mengen als zur Mengenlehre gehörig, deren Elemente selbst wieder Mengen sind, das heißt die sogenannten *reinen Mengen*.

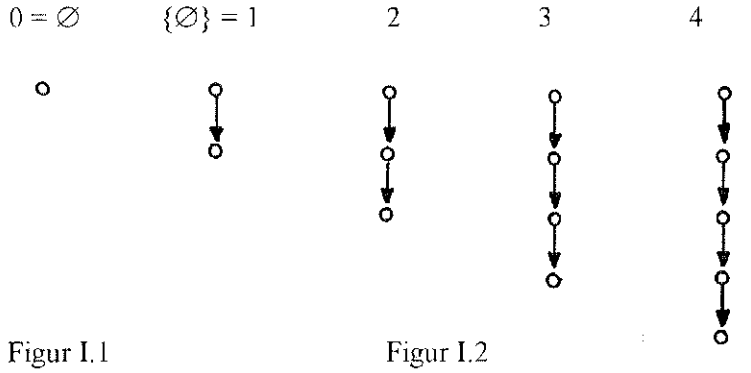
Im Sinne des Ideenrealismus ist es unproblematisch, sich auf *alle* mathematischen Objekte zu beziehen (siehe Einführung, Abschnitt 1).

Der sachgemäße Grund, daß hier die zur üblichen $\in$-Beziehung inverse $\ni$-Beziehung des Enthaltens verwendet wird, ist, daß eine Menge ihre Elemente bestimmt, und nicht umgekehrt. Diese Festlegung der Grundrelation $\ni$ wird durch die Tatsache nahegelegt, daß nicht zu jeder wohlbestimmten Gesamtheit von Mengen eine Menge existiert, welche alle diese Mengen als Elemente enthält. Das bekannteste Beispiel für diese Tatsache ist die Russell-Klasse der sich selbst nicht enthaltenden Mengen.

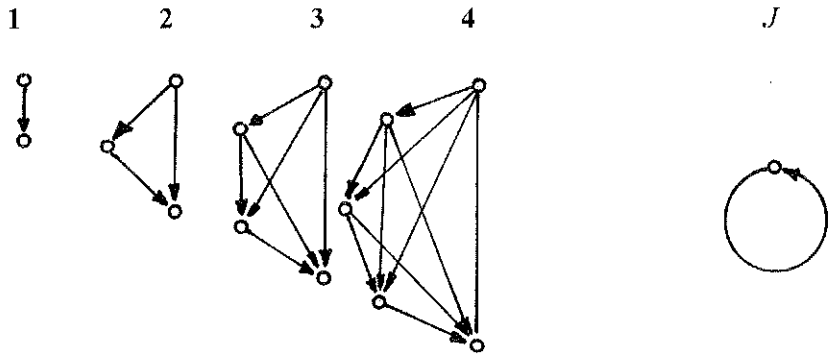
Im Vordergrund von Finslers Mengenauffassung steht also nicht die extensionale Element-Auffassung einer Menge («Eine Menge ist nichts anderes als die Summe ihrer Elemente»), sondern die Struktur-Auffassung bezüglich der $\ni$-Beziehung (siehe dazu auch Abschnitt I.4). Aus diesem Grund verwenden wir im Anschluß an Finsler zunächst diese inverse $\ni$-Beziehung, damit sich die Finsler-Mengenlehre auch in ihrer Symbolik deutlich von der üblichen ZF-Mengenlehre unterscheidet. – Wenn das sachgemäße Verständnis von $\ni$ gut ausgebildet ist, kann man natürlich wieder $\in$ benützen. Ab Kapitel II werden wir davon Gebrauch machen, weil sich $\in$ einfacher und leichter lesen bzw. schreiben läßt.

Beispiele von Mengen (Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise folgen später; die entsprechenden Figuren geben eine auf Finsler zurückgehende anschaulich-graphische Repräsentierung reiner Mengen):

Leere Menge, Nullmenge :	$\varnothing$ (Figur I.1).
Einsmenge:	$\{\varnothing\}$ (Figur I.1).
Natürliche Zahlmengen:	$0 :\equiv \varnothing,\ 1 :\equiv \{0\},\ 2 :\equiv \{1\},\ \ldots,\ n+1 :\equiv \{n\},\ \ldots$ (Figur I.2).
Endliche Ordinalzahlen:	$\mathbf{0} :\equiv \varnothing,\ \mathbf{1} :\equiv \{\mathbf{0}\},\ \mathbf{2} :\equiv \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\},\ \ldots,\ \mathbf{n+1} :\equiv \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}\},\ldots$ (Figur I.3).



Figur I.1 Figur I.2



Figur I.3 Figur I.4

Man beachte, daß die in den obigen Beispielen auftretenden Definitionen der *natürlichen Zahlmengen* nicht mit der üblichen Auffassung übereinstimmen, gemäß der *endliche Ordinalzahlen* als Repräsentanten der natürlichen Zahlen gelten. Um jedoch diese beiden wesentlich voneinander verschiedenen Mengenfolgen deutlich zu unterscheiden, behalten wir die auf Finsler zurückgehende Bezeichnung bei.

Es sind auch Mengen erlaubt, die sich selbst enthalten, da diese im allgemeinen unproblematisch sind, so insbesondere die *J-Menge* mit $J = \{J\}$ (Figur I.4).

Die ∋-Beziehung ist einmehrdeutig, das heißt Mengen können im allgemeinen mehr als ein Element enthalten. In diesem Sinne können Mengen im wesentlichen als verallgemeinerte natürliche Zahlmengen aufgefaßt werden mit einer *mehreindeutigen* Beziehung des Enthaltens anstatt einer *eindeutigen* Bestimmtheit *des* enthaltenen Elements.

I.2 Mengen und Klassen

Definition Unter einer *Klasse* verstehen wir eine Gesamtheit von Mengen, bei der eindeutig bestimmt ist, welche Mengen dazu gehören. Diese Mengen heißen die *Elemente* der Klasse. Wir schreiben $K(x)$ oder $x \in K$, wenn die Menge x ein Element der Klasse K ist. – Eine Klasse K' ist *Teilklasse* einer Klasse K, wenn aus $K'(x)$ folgt $K(x)$. Wir schreiben dafür: $K' \subset K$.

Meistens wird eine Klasse von einem Prädikat, das heißt einem Begriff bestimmt; die Elemente können jedoch auch nur aufgelistet werden. Selbstverständlich kann es für eine Klasse verschiedene Definitionen geben.

Obwohl wir uns der Symbolik der formalsprachlichen Prädikatenlogik bedienen, ist für uns die Sprache kein Bestandteil der Logik. Insbesondere beschränken wir uns nicht auf formalsprachliche Darstellungen der Prädikatenlogik erster Stufe oder auf eine solche im Rahmen einer abzählbaren Sprache. Wenn darüberhinaus von Begriffen die Rede ist, sind *reine Begriffe* gemeint, das heißt solche Begriffe, die in ihrem Inhalt nicht von der subjektiven Repräsentation, also nicht von der Erkennbarkeit, subjektiven Vorstellbarkeit oder sprachlichen Darstellbarkeit abhängen.

Beispiele von Klassen: $[\varnothing, \{\varnothing\}]$; $[\varnothing, \{\varnothing\}, J]$. Die *Russell-Klasse* K_R aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind:

$$K_R :\equiv [x \mid \neg(x \ni x)].$$

Die Russell-Klasse kann natürlich keine Menge sein, denn es ist nicht eindeutig bestimmt, ob $K_R \ni K_R$ oder nicht $K_R \ni K_R$ ist.

Jede Menge kann natürlich als Klasse aufgefaßt werden. Die Hauptarbeit im Rahmen der Finsler-Mengenlehre richtet sich auf die Untersuchung, ob – umgekehrt – eine bestimmte Klasse eine *Menge* ist oder nicht.

Wir stellen einige für die Finsler-Mengenlehre relevante elementare Tatsachen der Klassenlogik zusammen (siehe dazu zum Beispiel Halmos [1968]). Eine Klasse ist nur dadurch bestimmt, welche Elemente ihr angehören, sodaß Klassen mit denselben Elementen vom Gesichtspunkt der Klassenlogik aus als ununterscheidbar oder identisch angesehen werden. Dies ist der Inhalt des *Extensionalitätsprinzips* oder des Klassenidentitätsprinzips:

$$\forall X\, \forall Y\, \forall x\, (x \in X \leftrightarrow x \in Y) \rightarrow X = Y.$$

Falls man Begriffe auch extensional auffaßt, das heißt sie als (vom Gesichtspunkt der extensionalen Klassenlogik) ununterscheidbar auffaßt, wenn sie auf dieselben Gegenstände zutreffen, so garantiert das Extensionalitätsprinzip eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der einstelligen Prädikate mit den Klassen. Dann gehört zu jedem einstelligen Prädikat genau eine Klasse und zu jeder Klasse gehört genau ein einstelliges Prädikat, das genau auf diejenigen Gegenstände zutrifft, die Elemente der Klasse sind.

Gemäß dem Extensionalitätsprinzips sind die *Nullklasse* oder *leere Klasse* $\varnothing$ als Klasse der Prädikats $x \neq x$ sowie die *Allklasse* A als Klasse des Prädikates $x = x$ eindeutig bestimmt:

Nullklasse: $\varnothing :\equiv [x \mid x \neq x] = [x \mid \neg(x = x)]$,

Allklasse: $A :\equiv [x \mid x = x]$.

Man kann zudem zu jedem Objekt x einen Begriff angeben, der genau auf x zutrifft, nämlich den Begriff «identisch sein mit x», also das Prädikat $P(x) :\equiv y = x$. Den Umfang dieses Begriffes nennt man die *Einerklasse* von x und schreibt dafür

$$[x] :\equiv [y \mid y = x].$$

Es läßt sich nun die übliche Klassenalgebra entwickeln mit Durchschnitt, Vereinigung, Komplement etc. und daraus die entsprechenden Gesetze ableiten.

Der Konjunktion zweier Prädikate entspricht der Durchschnitt und der Disjunktion die Vereinigung der entsprechenden Klassen:

$$x \in X \cap Y \quad \leftrightarrow \quad X(x) \wedge Y(x),$$

$$x \in X \cup Y \quad \leftrightarrow \quad X(x) \vee Y(x).$$

Nimmt man die Negation als Entsprechung der Komplementbildung (relativ zur Allklasse A)

$$x \in A-X \quad \leftrightarrow \quad \neg X(x)$$

und die Neutralelemente Nullklasse $\varnothing$ und Allklasse A aus A hinzu, so gelten entsprechend die Komplementgesetze

$$x \in X \cup (A-X) = A \quad \leftrightarrow \quad X(x) \vee \neg X(x),$$

$$x \in X \cap (A-X) = \varnothing \quad \leftrightarrow \quad X(x) \wedge \neg X(x),$$

und die Gesetze über die Neutralelemente

$$X \cup \varnothing = X,$$

$$X \cap A = X.$$

I.3 Axiom der Bestimmtheit

Axiom I (Bestimmtheit) *Für jede Menge ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die Beziehung* $\ni$ *hat.*

Definition Diejenigen Mengen, zu welchen eine Menge M die Beziehung $\ni$ hat, heißen die *Elemente* der Menge M. Wir schreiben $M \ni N$, wenn N Element von M ist.

Im Sinne einer ersten Eingrenzung des Bereichs der zu untersuchenden Mengen beginnen wir mit der Gesamtheit von mathematischen Objekten, welche Axiom **I** erfüllen. Diese Gesamtheit oder Klasse soll Σ genannt werden, wobei allerdings jetzt noch nicht feststeht, ob diese Klasse Σ nur Mengen enthält. Wir werden uns trotzdem schon auf Mengen aus Σ und Klassen von Mengen aus Σ beziehen, weil nach Einführung der beiden weiteren Axiome **II** und **III** sich zeigen wird, daß es tatsächlich eine Klasse Σ gibt, die **I** erfüllt und nur aus Mengen besteht.

Definition Eine Klasse (oder Menge), welche mit jedem Element auch alle Elemente dieses Elementes enthält, werde *transitiv* genannt.

Beispiele: Die Ordinalzahlen sind transitiv, ebenso die Klasse Σ und die Allklasse A des eben bestimmten Mengenbereichs Σ. Eine beliebige Menge M gehört mindestens zu einer transitiven Klasse, nämlich zu Σ. Im weiteren ist auch die J-Menge transitiv, denn aus $J = \{J\} \ni x \ni y$ folgt $x = J = \{J\}$ und weiter $y = J = \{J\}$, also $J \ni y$.

Definition Eine Menge X heißt *in der Menge M wesentlich*, wenn X jeder transitiven Klasse angehört, welche sämtliche Elemente von M enthält.

Falls die Menge X in der Menge M wesentlich ist, so bedeutet dies anschaulich, daß X Element irgendeines Elementes des Elementes etc. der Menge M ist. Man könnte auch von «erblich enthalten in M» anstatt von «wesentlich in M» sprechen. Daß es Mengen M gibt, in denen eine Menge X wesentlich ist, folgt aus Theorem I.1. Auf das Problem, daß X *jeder* transitiven Klasse angehören soll, welche alle Elemente von M enthält, kommen wir im Abschnitt I.5 zurück, im Zusammenhang mit einer zur obigen Definition äquivalenten Definition von «wesentlich».

Die Klasse der in M wesentlichen Mengen werde mit Σ_M bezeichnet. Sie ist wohldefiniert, das heißt, es ist eindeutig bestimmt, welche Mengen als Elemente zu ihr gehören. Denn sei

N eine beliebige Menge, dann gibt es entweder eine transitive Klasse, welche alle Elemente von M, nicht aber die Menge N enthält, oder es gibt keine solche Klasse. Im zweiten Fall gehört N zu Σ_M, im ersten nicht.

Theorem I.1 *Ein Element einer Menge M ist in M wesentlich.*

Beweis: Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, daß ein Element von M jeder, also auch jeder transitiven Klasse angehört, welche sämtliche Elemente von M enthält.

Theorem I.2 *Die Klasse Σ_M der in einer Menge M wesentlichen Mengen ist transitiv und enthält alle Elemente von M. Die Klasse $\Sigma_M \cup \{M\}$ ist ebenfalls transitiv und enthält alle Elemente von M.*

Beweis: Sei X in M wesentlich und x ein Element von X. Das Element x gehört zu jeder transitiven Klasse, welche sämtliche Elemente von M enthält, also ist x in M wesentlich und damit x in Σ_M. Wegen Theorem I.1 gehört auch jedes Element von M zu Σ_M. Daher ist Σ_M eine transitive Klasse, welche alle Elemente von M enthält. Auch die Klasse $\Sigma_M \cup \{M\}$ ist immer noch transitiv und enthält alle Elemente von M.

Theorem I.3 *Eine transitive Klasse enthält mit jeder Menge M auch alle in der Menge M wesentlichen Mengen.*

Beweis: Die in einer Menge M wesentlichen Mengen gehören nach Definition jeder transitiven Klasse an, welche alle Elemente von M enthält, insbesondere jeder transitiven Klasse, die M enthält, da eine transitive Klasse mit M alle Elemente von M enthält.

Theorem I.4 *Ist die Menge X in der Menge Y wesentlich und Y in der Menge Z wesentlich, so ist auch X in Z wesentlich.*

Beweis: Die Klasse Σ_Z der in Z wesentlichen Mengen ist nach Theorem I.2 transitiv. Sie enthält nach Voraussetzung die Menge Y und folglich nach Theorem I.3 auch die Menge X.

Es sei K_w die Klasse

$$K_w :\equiv [X \mid X \text{ ist Element von } M] \cup [X \mid X \text{ ist in einem Element von } M \text{ wesentlich}]$$

Theorem I.5 *Die Klasse K_w ist transitiv und enthält sämtliche Elemente von M.*

Beweis: Aus der Definition von K_w ergibt sich direkt, daß K_w sämtliche Elemente von M enthält. Wir zeigen nun, daß K_w transitiv ist, das heißt, daß mit jeder Menge $X \in K_w$ auch alle
$Y \in X$ zu K_w gehören. Wenn X ein Element von M ist, dann ist nach Theorem I.1 X in M wesentlich, also ist Y als Element von X in einem Element von M wesentlich, also ist $Y \in K_w$. Wenn andererseits X in einem Element von M wesentlich ist, so ist, da nach Voraussetzung Y in X wesentlich ist, Y in einem Element von M wesentlich (Theorem I.4), also ist ebenfalls $Y \in K_w$. Also ist die Klasse K_w transitiv.

Theorem I.6 *Wenn die Menge X in der Menge M wesentlich ist, so ist X Element von M oder in einem Element von M wesentlich.*

Beweis: Wenn X in M wesentlich ist, so gehört X gemäß der Definition der Wesentlichkeit sowie Theorem I.5 insbesondere zu K_w, das heißt, X ist ein Element von M oder X ist in einem Element von M wesentlich.

Theorem I.7 *Die Klasse Σ_M der in einer Menge M wesentlichen Mengen fällt zusammen mit der Klasse K_w, das heißt $\Sigma_M = K_w$.*

Beweis: Nach Theorem I.6 gilt $\Sigma_M \subset K_w$. Nach Theorem I.1 ist ein Element der Menge M in M wesentlich und nach Theorem I.4 ist jede in einem Element von M wesentliche Menge auch in M selbst wesentlich, also gilt auch $K_w \subset \Sigma_M$. Daher ist $\Sigma_M = K_w$.

Axiom II (Identität) *Mengen sind immer dann identisch, wenn die Annahme ihrer Identität nicht zu einem Widerspruch führt.*

Für die Tatsache der Identität zweier Mengen M und N schreiben wir wie üblich $M = N$. Anschaulich ist klar, daß Mengen mit derselben «Struktur» dieselben Mengen sein müssen. Für diese Struktur ist einzig die $\ni$-Beziehung entscheidend. Präziser formuliert bedeutet dies, daß bezüglich $\ni$ isomorphe Mengen identisch sein müssen. Daraus muß man entnehmen, daß eventuelle Widersprüche bei der Identifizierung zweier Mengen nur im Zusammenhang mit der Bestimmtheit, das heißt mit Axiom **I** auftreten können.

Definition Zwei Mengen M und N heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\pi\colon\ \Sigma_M \to \Sigma_N$$

gibt, die bezüglich $\ni$ homomorph ist, das heißt für beliebige X und Y aus Σ_M gilt

$$Y \ni X \quad \leftrightarrow \quad \pi(Y) \ni \pi(X),$$

und die Elemente von M vermöge π bijektiv auf die Elemente von N bezogen sind.

Man beachte, daß in der Finsler-Mengenlehre Funktionen, insbesondere Bijektionen und Isomorphismen, nicht von vornherein als (reine) Mengen aufgefaßt werden können. Es handelt sich dabei um allgemeine mathematische Objekte, welche im Sinne einer wohlbestimmten Zuordnung zwischen mathematischen Objekten eine selbständige, von der Mengenlehre unabhängige Bedeutung haben, die ihrer allfälligen mengentheoretischen *Darstellung* zugrundeliegt und nicht durch diese erst begründet oder gerechtfertigt ist (siehe dazu auch *Rückblick und Ausblick: Mathematik und Mengenlehre*).

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei von jetzt an Σ eine Gesamtheit von Objekten, welche die Axiome **I** und **II** erfüllen.

Theorem I.8 *Isomorphe Mengen sind identisch.*

Beweis: Nehmen wir an, M und N seien wohldefiniert und isomorph. Falls man M und N identifiziert, kann es gegebenenfalls nur Widersprüche geben, die ihre Bestimmtheit betreffen, also Widersprüche zu Axiom **I**. Die Annahme von deren Identität kann jedoch nicht zu einem Widerspruch mit Axiom **I** führen, denn wegen der Existenz der Isomorphie π gilt, daß die Elemente von M auf die Elemente von N bijektiv abgebildet werden und für alle in M wesentlichen Mengen X und Y gilt die $\ni$-Strukturerhaltung:

$$Y \ni X \quad \leftrightarrow \quad \pi(Y) \ni \pi(X).$$

Die Isomorphie ist die notwendige und hinreichende Bedingung für Mengenidentität im Rahmen der Axiome **I** und **II**, denn identische Mengen müssen trivialerweise isomorph sein, da sonst ein Widerspruch mit Axiom **I** unvermeidlich wäre. Aus demselben Grund haben identische Mengen dieselben Elemente. Auch hier kann die Umkehrung gezeigt werden:

Theorem I.9 *Zwei Mengen, welche dieselben Elemente haben, sind identisch.*

Beweis: Wenn M und N dieselben Elemente besitzen, so gilt wegen Theorem I.6: Wenn x in M wesentlich, so ist x Element von N oder in einem Element von N wesentlich und umgekehrt, also ist $\Sigma_M = \Sigma_N$. Folglich sind M und N isomorph, weil man für π die Identität nehmen kann, und weiter nach Theorem I.8 identisch.

Das Axiom **II** bringt ein *Minimalprinzip* zum Ausdruck, gemäß welchem möglichst viele Mengen, sofern widerspruchsfrei, miteinander identifiziert werden sollen. Durch weitgehendste Identifikation wird demzufolge erreicht, daß möglichst wenig Mengen übrig

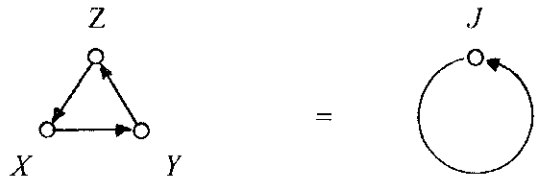
bleiben – eben nur die tatsächlich bezüglich $\ni$ strukturell verschiedenen. In der hier gegebenen Formulierung stellt es darüberhinaus ein *maximales* Minimalprinzip dar. Diese strenge (oder maximale) Form des Identitätsaxioms ist sinnvoll, da vermöge der Axiome kein anderer Grund für die Verschiedenheit zweier Mengen bestehen kann, als die Inkonsistenz der Annahme ihrer Identität.

Theorem I.10 (a) *Axiom II ist nicht äquivalent mit Theorem I.8.*
(b) *Axiom II ist nicht äquivalent mit Theorem I.9.*

Beweis: Wir betrachten Mengen aus der Klasse Σ von Mengen, welche nur das Axiom **I** erfüllen. (a) Theorem I.8 ist schwächer als Axiom **II**, denn für die Mengen $X = \{X, Y\}$ und $Y = \{X\}$ aus Σ gilt: Falls diese Mengen verschieden sind, so sind sie sicher nicht isomorph, da X zwei Elemente enthält und Y nur eins. Dagegen führt die Annahme, X und Y seien identisch, zu keinem Widerspruch (Axiom **II**), woraus dann die Isomorphie von X und Y folgt. – (b) Auch Theorem I.9 ist schwächer als Axiom **II**, denn seien J und K Mengen, die als einziges Element sich selbst enthalten, das heißt $J = \{J\}$ und $K = \{K\}$: Solange wir nicht wissen, ob $J = K$ ist oder nicht, können wir Theorem I.9 nicht benützen und es bleibt möglich, daß $J \neq K$. Sobald man aber Axiom **II** (oder Theorem I.8) annimmt, so wird $J = K$, denn J und K sind isomorph, also identisch.

Sobald wir in Abschnitt I.6 die Existenz der Nullmenge, der Einsmenge sowie der natürlichen Zahlmengen und der endlichen Ordinalzahlen bewiesen haben, folgt aus Theorem I.9 deren Eindeutigkeit und aus Theorem I.8 deren jeweilige Unterschiedenheit sowie Verschiedenheit von der J-Menge, da sie untereinander und mit der J-Menge nicht isomorph sind.

Beispiel: Wenn die Mengen X, Y, und Z den Beziehungen $X = \{Y\}$, $Y = \{Z\}$ und $Z = \{X\}$ (Figur I.5) genügen, so sind sie isomorph und daher nach Theorem I.8 untereinander und folglich mit der J-Menge identisch.



Figur I.5

Für die sachgemäße Auffassung des Identitätsaxioms hat die philosophische Grundlage des Ideenrealismus eine weitreichende Konsequenz. Sind nämlich M_1 und M_2 identische Mengen, ist also $M_1 = M_2$, so handelt es sich bei M_1 und M_2 um zwei *verschiedene*, jedoch im Sinne von Axiom **II** *identische Darstellungen* ein und derselben Menge M. Dies bedeutet nichts anderes, als daß die Identitätsrelation als dreistellige Relation zwischen der Menge M und deren identischen Darstellungen M_1 und M_2 aufzufassen ist. Das eigentliche mathematische Objekt im Sinne der Axiome **I**, **II** und **III** ist nur M, während M_1 und M_2 kontextabhängige Repräsentierungen der Menge M sind.

Definition Es seien Σ_α beliebig viele Klassen von Mengen, welche die Axiome **I** und **II** erfüllen. Dann ist die *Vereinigung* $\bigcup\Sigma_\alpha$ die Klasse aller Mengen der Klassen Σ_α, wobei Mengen aus verschiedenen Klassen Σ_α immer dann identisch sein sollen, wenn die Annahme ihrer Identität widerspruchsfrei ist.

Die Klasse $\bigcup\Sigma_\alpha$ ist eindeutig bestimmt, denn wenn Mengen als identisch aufgefaßt werden können, so weisen ihre Definitionen auf ein und dasselbe mathematische Objekt hin. Also kann von *der* Vereinigung gesprochen werden.

Theorem I.11 (a) *Es seien Σ_α beliebig viele Klassen, welche die Axiome **I** und **II** erfüllen. Dann erfüllt auch die Vereinigung $\bigcup\Sigma_\alpha$ diese Axiome.*
(b) *Falls die Klassen Σ_α transitiv sind, so ist es auch die Vereinigung $\bigcup\Sigma_\alpha$.*

Beweis: (a) Axiom **I** ist der Definition zufolge erfüllt. Die Gültigkeit von Axiom **II** ergibt sich so: Sei M eine beliebige Menge aus $\bigcup\Sigma_\alpha$. Also gehört M zu mindestens einer der Klassen Σ_α, sagen wir zu Σ_{α_0}. Es ist eindeutig bestimmt, zu welchen $N \in \Sigma_{\alpha_0}$ die Menge M die $\ni$-Beziehung hat. Die Menge M hat nun genau zu denjenigen Mengen in $\bigcup\Sigma_\alpha$ die $\ni$-Beziehung, deren Identität mit einem N unter den Bedingungen $N \in \Sigma_{\alpha_0}$ und $M \ni N$ widerspruchsfrei angenommen werden kann. – (b) Folgt unmittelbar aus der Definition der Vereinigung.

Es kann in konkreten Fällen natürlich schwierig sein, zu entscheiden, ob die Mengen $N_0 \in \Sigma_{\alpha_0}$ und $N_1 \in \Sigma_{\alpha_1}$ identisch sind, vielleicht so schwierig, wie eine Entscheidung der Goldbachschen Vermutung oder des Fermatschen Theorems. Aber hier handelt es sich nur um prinzipielle Entscheidbarkeit. Es ist prinzipiell entschieden, ob $N_0 = N_1$ oder nicht, unabhängig von unserem Vermögen, dies zu erkennen.

Zum weiteren Verständnis und einer Vorwegnahme möglicher Einwände schauen wir uns noch einmal die Vereinigung $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ zweier Klassen Σ_1 und Σ_2 an, welche die Axiome **I** und **II** erfüllen. Wir unterscheiden zuerst die folgenden Fälle:

1) $M \in \Sigma_1$ und $M \in \Sigma_2$;

2) $M \in \Sigma_1$, aber $M \notin \Sigma_2$.

1) Die Klassen Σ_1 und Σ_2 sind transitiv, also enthalten sie mit der Menge M auch *alle* deren Elemente. Alle Mengen, zu denen M die $\ni$-Beziehung hat in Σ_1 und Σ_2 sind daher für die Vereinigung $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ eindeutig bestimmt. Es kann nicht der Fall sein, daß M in Σ_2 andere oder mehr Elemente hat als in Σ_1, denn identische Mengen haben dieselben Elemente. Dies ist im absoluten Sinne zu verstehen, nicht bezüglich einer vorgegebenen Klasse. Dasselbe gilt für die Definition der Transitivität: eine transitive Klasse enthält mit jedem Elemente *alle* Elemente dieses Elementes.

2) In Σ_1 ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen $N \in \Sigma_1$ die Menge M die $\ni$-Beziehung hat. Die Menge M hat genau zu denjenigen $N \in \Sigma_2$ die $\ni$-Beziehung, für welche die Annahme, sie seien identisch mit einem Element von M in Σ_1, widerspruchsfrei ist. Dies ist eindeutig bestimmt wie unter 1) gezeigt wurde.

Es könnte noch eingewendet werden, daß man das Axiom **II** so interpretieren muß, daß $M = N$ für alle identischen Mengen M und N immer als Axiom hinzugefügt werden muß, wenn dies widerspruchsfrei möglich ist. Falls man diese durch die Technik der Symbolisierung nahegelegte Interpretation des Axioms **II** überhaupt betrachten will, so müssen noch folgende Fälle untersucht werden:

3) $M_1 \in \Sigma_1,\ M_1 = M_2,\ M_2 \in \Sigma_2$;

4) $M_1 \in \Sigma_1,\ M_1 = M_2,\ M_2 \notin \Sigma_2$.

3) Ist es unter diesen Voraussetzungen möglich, daß zum Beispiel gilt:

$$M_1 \ni N_1,\ M_1 = M_2,\ N_1 = N_2,\ \neg(M_2 \ni N_2)\ ?$$

Nein, denn wenn man, wie in der Finsler-Mengenlehre der Fall, vermöge der absoluten Logik das Gesetz der Identität hat, so können identische Objekte für einander ersetzt oder substituiert werden. Dies bedeutet: Aus $M_1 \ni N_1$ und $M_1 = M_2$ folgt $M_2 \ni N_1$, und aus letzterem zusammen mit $N_1 = N_2$ folgt $M_2 \ni N_2$.

4) löst man wie 3).

Die Einwände 3) und 4) lösen sich auf, sobald man von einer sprachlichen Darstellung von Mengen zu einer rein gedanklichen Erfassung übergeht.

Folgende Überlegungen sollen die Tragweite der Untersuchungen dieses Kapitels noch ein wenig näher beleuchten. Die Elemente einer Klasse Σ, welche das Axiom **I** erfüllt, sind streng genommen noch keine Mengen im eigentlichen Sinne (da diese alle drei Axiome erfüllen müssen), sondern Mengen*darstellungen*. Wie bereits im vorangehenden Abschnitt betont wurde, ist die scharfe Unterscheidung von Mengen von ihren kontextabhängigen Darstellungen eine weitere Konsequenz des Ideenrealismus. Wird für die Klasse Σ zusätzlich Axiom **II** gefordert, so enthält sie zwei Arten von Objekten, nämlich solche Mengendarstellungen, die mit keiner anderen Darstellung identisch sind, und solche Mengendarstellungen, die untereinander identisch sind. Bei letzteren hat man es jedoch wegen Axiom **II** nicht mehr mit diesen Darstellungen selbst zu tun, sondern mit denjenigen mathematischen Objekten, welche den verschiedenen Darstellungen zugrundeliegen.

Betrachtet man nun verschiedene Klassen Σ_α, welche die Axiome **I** und **II** erfüllen, so können diese sehr verschieden «aussehen», sowohl hinsichtlich ihrer Größe wie hinsichtlich ihrer Struktur. Die Bestimmung *der* Vereinigung $\bigcup\Sigma_\alpha$ von beliebig vielen solchen Klassen Σ_α ist ein weiterer, aber noch nicht der letzte Schritt, der von den verschiedenen Mengendarstellungen innerhalb der Klassen Σ_α weg zu den diesen Darstellungen zugrundeliegenden mathematischen Objekten, den Mengen im eigentlichen Sinne, hinführt. Denn auch $\bigcup\Sigma_\alpha$ enthält noch zwei Arten von Elementen, nämlich Mengendarstellungen, die nur in einem der Σ_α vorkommen und mathematische Objekte, welche in mehreren Klassen Σ_α unterschiedlich dargestellt sind, deren Darstellungen jeweils aber untereinander identisch sind. Erst der in Abschnitt 1.7 vollzogene Schritt zur Betrachtung *aller* die Axiome **I** und **II** erfüllenden Klassen wird dazu führen, daß man es in der Klasse $\bigcup\Sigma_\alpha$ nur noch mit den mathematischen Objekten selbst und nicht mehr mit ihren Darstellungen zu tun hat.

Arbeitet man mit einer absoluten Logik, so muß man sich also immer wieder klar machen, daß Begriffe, Theoreme und ihre Beweise nicht von unserer Erkenntnis oder der Darstellung der Objekte und ihren Beziehungen abhängen, sondern von den Objekten und ihren Beziehungen selbst, das heißt von den Sachverhalten, wie sie wirklich sind. Hierin liegt der tiefere Grund, daß eine Menge in einer erweiterten Klasse nicht plötzlich mehr oder andere Elemente enthalten kann als in der ursprünglichen Klasse gewesen sind, denn sonst müßte sie eine *andere* Menge sein.

In der symbolischen Modelltheorie liegen die Verhältnisse ganz anders. Dort gibt es zum Beispiel für die symbolisierten Axiomensysteme der natürlichen oder reellen Zahlen $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{R}$ Nichtstandardmodelle $^*\mathcal{N}$ bzw. $^*\mathcal{R}$, das heißt solche Modelle, die einerseits mehr Elemente als die Standardmodelle enthalten und in denen andererseits diesselben (symbolisierten) Theoreme gelten (elementare Äquivalenz).

Der Grund für diesen Unterschied zur Finsler-Mengenlehre liegt darin, daß in der symbolisierten Modelltheorie die sprachliche Darstellung der mathematischen Wirklichkeit und nicht diese selbst im Vordergrund steht. Symbole für konstante Objekte, Funktionen und Relationen aus der Sprache werden in jedem (elementar) erweiterten Modell neu interpretiert. Also kann ein Symbol R («reelle Zahlen») im Standardmodell interpretiert werden durch die Menge der gewöhnlichen reellen Zahlen $\mathbf{R}$, und im Nichtstandardmodell durch die Menge der Nichtstandardzahlen $^*\mathbf{R} = \mathbf{R}[a]$, wo a ein geeignet adjungiertes Element ist.

Derartige Erfahrungstatsachen und Denkgewohnheiten kann der symbolisch ausgebildete Mathematiker oder Logiker im Rahmen der Finsler-Mengenlehre nicht zur Anwendung bringen. Im weiteren ist es in diesem Zusammenhang hinderlich, bei den α's in Σ_α gewohnheitsmäßig an Ordinalzahlen zu denken, denn die Klassen Σ_α brauchen nicht in eine wohlgeordnete Folge gebracht werden zu können. Die Anordnung oder die genaue Anzahl der Σ_α-Klassen ist nicht wichtig, sondern nur, daß es «beliebig viele» oder «alle» mit einer bestimmten Eigenschaft sind. Diese Eigenschaft braucht nicht notwendigerweise in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe ausdrückbar zu sein.

Ein anderer Einwand, welcher aus den formalistischen Gewohnheiten heraus aufkommen kann, ist der folgende. Bei identischen Mengen aus verschiedenen Klassen muß doch ein Repräsentant gewählt werden. Braucht man nicht ein Auswahlaxiom für Klassen? Nein. Obwohl identische Mengen auf verschiedene Weise repräsentiert werden können, handelt es sich nur um *eine* Menge. Es muß daher nicht irgendetwas gewählt werden, denn entscheidend ist die eindeutig bestimmte mathematische Wirklichkeit und nicht die in verschiedener Weise mögliche sprachliche Repräsentierung.

Mit der Vereinigung $\bigcup\Sigma_\alpha$ von beliebig vielen Klassen Σ_α, welche die Axiome **I** und **II** erfüllen, können wir jetzt *innerhalb* einer solchen Vereinigungsklasse $\bigcup\Sigma_\alpha$ von Σ_α's die Vereinigung und den Durchschnitt von beliebigen Teilklassen definieren.

Definition Man betrachte beliebig viele Klassen K_β, die alle Teilklassen von $\bigcup\Sigma_\alpha$ sein sollen (damit identische Mengen als *eine* Menge behandelt werden können). Die *Vereinigung* $\bigcup K_\beta$ ist die Klasse *aller* Mengen aus den K_β und der *Durchschnitt* $\bigcap K_\beta$ die Klasse derjenigen Mengen, die in *allen* Klassen K_β vorkommen.

Falls alle K_β transitiv sind, so sind auch $\bigcup K_\beta$ und $\bigcap K_\beta$ transitiv.

Auf dieser Grundlage ist es nun möglich, die Definition der Wesentlichkeit zu vereinfachen.

Definition Die Klasse K heißt eine *transitive Oberklasse* (oder transitive Obermenge) der Menge M, wenn sie eine transitive Klasse (oder transitive Menge) ist, die alle Elemente von M enthält. Die *transitive Hülle* $TC(M)$ (*transitive closure*) ist die kleinste transitive Oberklasse (Obermenge) von M, das heißt:

$$TC(M) :\equiv \text{Durchschnitt aller transitiven Oberklassen von } M.$$

Bemerkung: Unter welchen Umständen die transitive Hülle $TC(M)$ einer Menge M wieder eine Menge ist, soll später untersucht werden (Abschnitt II.5). Zum Beispiel ist für transitive Mengen M die transitive Hülle $TC(M)$ eine Menge, wobei gilt: $M = TC(M)$.

Jetzt können wir eine neue Definition des Wesentlich-Seins aufstellen und gleich anschließend zeigen, daß sie mit der in Abschnitt I.3 eingeführten äquivalent ist.

Definition Die Menge X heißt *in der Menge M wesentlich*, wenn X zu $TC(M)$ gehört.

Es ist klar, daß, wenn X zu jeder transitiven Klasse gehört, welche die sämtlichen Elemente von M enthält, sie auch zu $TC(M)$ gehört und umgekehrt. Folglich sind beide Definitionen der Wesentlichkeit zueinander äquivalent. Wir können aber erst von jetzt an die zweite

Version benützen, da vorher der Durchschnitt beliebig vieler Klassen noch nicht streng definiert war.

Aus der Äquivalenz der beiden Definitionen der Wesentlichkeit folgt unmittelbar

Theorem I.12 *Die transitive Hülle einer Menge M ist identisch mit der Klasse der in M wesentlichen Mengen*: $TC(M) = \Sigma_M$.

Man beachte, daß im allgemeinen die Menge M nicht zu $TC(M)$ gehört, wohl aber zu $TC(\{M\})$. Es gilt jedoch $J = TC(J) \ni J$.

I.6 Axiom der Vollständigkeit

Axiom III (Vollständigkeit) *Ein mathematisches Objekt ist eine Menge immer dann, wenn die Annahme, es sei eine Menge, nicht zu einem Widerspruch mit den Axiomen **I** und **II** führt.*

Das Axiom **III** ist eine *Maximalforderung* in dem Sinne, daß die durch die Axiome **I** und **II** bestimmte Klasse Σ vermöge Axiom **III** die größtmögliche Klasse von Mengen festlegt. Ihre Eindeutigkeit wird in Theorem I.16 bewiesen. Auf der Grundlage des Ideenrealismus ist es selbstverständlich, daß man mit diesen Axiomen *alle*, das heißt so viele Mengen wie widerspruchsfrei möglich sind, erfaßt. Dies ist nichts anderes als eine weitere Konsequenz der Tatsache, daß Existenz und Widerspruchsfreiheit äquivalent sind.

Theorem I.13 *Folgende Tatsachen sind äquivalent:*
(i) *Axiom **III**.*
(ii) *Die Klasse Σ aller die Axiome **I** und **II** erfüllenden Mengen bildet eine Klasse von Mengen, welche bei Aufrechterhaltung der Axiome **I** und **II** keiner Erweiterung fähig ist.*

Beweis: Es sei Axiom **III** erfüllt und es sei M eine nicht zu einem Widerspruch führende Menge. Dann gibt es eine die Axiome **I** und **II** erfüllende Klasse Γ, welche M enthält, zum Beispiel die transitive Hülle $TC(\{M\})$. Falls durch die Vereinigung der Klasse Γ mit der Klasse Σ aller mit den Axiomen **I** und **II** verträglichen Mengen letztere durch M oder eine Menge $N \in TC(M)$ erweitert würde, so kommt als einziger Grund in Frage, daß M selbst keine Menge ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich gilt (ii). Umgekehrt sei nun (ii) gültig. Jede echte Erweiterung von Σ durch eine Menge M führt zu einem Widerspruch mit den Axiomen **I** und **II** und jede mit **I** und **II** verträgliche Menge gehört schon zur Klasse Σ, also gilt Axiom **III**.

Theorem I.14 *Eine Klasse M von Mengen aus Σ ist dann und nur dann eine Menge in Σ, wenn die Annahme, sie sei eine Menge, nicht mit Axiom **I** in Widerspruch steht.*

Beweis: Wenn M eine Menge ist, so kann sie nicht mit Axiom **I** in Widerspruch stehen. Wenn umgekehrt die Annahme, eine bestimmte Menge M existiere, nicht mit Axiom **I** in Widerspruch steht, so muß es eine Axiom **I** genügende transitive Klasse Γ geben, welche die Menge M enthält, die gerade die Beziehung $\ni$ zu den gegebenen Mengen besitzt, zum Beispiel die Klasse $TC(\{M\})$. Die zur transitiven Hülle $TC(M)$ gehörenden Mengen bilden dann eine Teilklasse von Γ, die zugleich Teilklasse von Σ ist und daher auch dem Axiom **II** genügt. Wenn nun die Menge M (oder eine sich mit ihr als identisch erweisende) nicht in Σ vorkommen würde, so könnte sie auch mit keiner Menge von $TC(M)$ identisch sein und deshalb würde $TC(\{M\})$ eine den Axiomen **I** und **II** genügende transitive Klasse ergeben,

deren Vereinigung mit Σ eine Erweiterung von Σ darstellen würde, im Widerspruch zu Theorem I.13.

Für die Beweistechnik in der Finsler-Mengenlehre ist Theorem I.14 sehr nützlich, da bei einer Anwendung dieses Theorems nur Axiom **I** geprüft werden muß. Dies hängt damit zusammen, daß man hier innerhalb der die Axiome **I** und **II** erfüllenden Klasse Σ argumentiert, in welcher alle gemäß Axiom **II** identischen Mengen bereits miteinander identifiziert worden sind.

Axiom **III** läßt sich nicht durch Theorem I.14 ersetzen, denn mit «Mengen» sind nur Dinge von Σ gemeint, was zur Folge hat, daß Theorem I.14 zum Beispiel die Existenz der J-Menge nicht garantiert, und damit wäre nicht eindeutig bestimmt, welche Mengen zur Klasse Σ gehören.

Theorem I.15 *Die Klasse Σ ist nicht-leer: Es existieren die Nullmenge, die natürlichen Zahlmengen, die endlichen Ordinalzahlen und die J-Menge.*

Beweis: Wir verwenden Theorem I.14. Wir beginnen mit der Nullmenge $\varnothing$. Die Annahme, dies sei eine Menge, ist verträglich mit Axiom **I**, denn es ist eindeutig bestimmt, daß $\varnothing$ zu keiner anderen Menge die $\ni$-Beziehung hat. Ebenso ist für die natürlichen Zahlmengen und die endlichen Ordinalzahlen (siehe Abschnitt I.1) eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die $\ni$-Beziehung haben. Für die J-Menge ist das einzige Element J selbst: $J = \{J\}$, also ist sie ebenfalls eindeutig bestimmt und existiert wegen Axiom **III**.

Zusammen mit Theorem I.9 folgt die Eindeutigkeit der nach Theorem I.15 existierenden Mengen. Erst später können wir beweisen, daß die Menge der natürlichen Zahlmengen existiert, daß folglich unendliche Mengen überhaupt existieren (siehe Abschnitt II.5, Theorem II.19).

I.7 Die Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit der Axiome

Alle Mathematiker sind sich darin einig, daß die Existenz eines Bereichs mathematischer Objekte und deren begrifflicher Beziehungen die Widerspruchsfreiheit des entsprechenden Begriffs- und Objektsystems impliziert. Für Finsler (wie zum Beispiel auch für Frege und Cantor) gilt ebenso die Umkehrung: Die Widerspruchsfreiheit eines Bereichs mathematischer Objekte und deren Beziehungen impliziert deren Existenz. Mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome **I**, **II** und **III** ist also zugleich die Existenz des Bereichs der Mengen bewiesen.

Theorem I.16 *Es existiert eine und nur eine nicht-leere Klasse, welche die Axiome I, II und III erfüllt.* Oder äquivalent dazu: *Die Axiome I, II und III legen eindeutig die Klasse sämtlicher Mengen fest.*

Beweis: (i) *Existenz*: Aus Theorem I.15 folgt, daß es nicht-leere Klassen gibt, welche den Axiomen **I** und **II** genügen. Es seien Σ_α *alle* Klassen, die **I** und **II** erfüllen. (Es ist möglich, diese Klassen in Betracht zu ziehen, denn es ist unabhängig vom individuellen Einsichtsvermögen eindeutig bestimmt, ob eine Klasse die Axiome **I** und **II** erfüllt oder nicht.) Ihre Vereinigung $\bigcup\Sigma_\alpha$ ist eindeutig bestimmt und erfüllt ebenfalls die Axiome **I** und **II**, wie in Abschnitt I.5 bewiesen wurde. Wir behaupten nun, $\bigcup\Sigma_\alpha$ erfüllt auch Axiom **III**. Denn man nehme an, daß es noch eine zusätzliche Menge M gäbe. Dann muß M zu einer Klasse gehören, welche die Axiome **I** und **II** erfüllt, zum Beispiel zur transitiven Hülle $TC(\{M\})$. Jede Klasse Σ_α, die **I** und **II** erfüllt, muß jedoch schon unter den Σ_α

vorkommen, ist also Teilklasse von $\bigcup\Sigma_\alpha$ und kann keine neue Menge enthalten. (ii) *Eindeutigkeit*: Man nehme an, Σ' erfülle auch die Axiome **I**, **II** und **III**. Insbesondere erfüllt diese Klasse **I** und **II**, kommt also schon unter den Σ_α vor. Daher ist $\Sigma' \subset \bigcup\Sigma_\alpha$. Zusammen mit Axiom **III** gilt dann $\Sigma' = \bigcup\Sigma_\alpha$, denn von jeder Menge in $\bigcup\Sigma_\alpha$, die nicht in Σ' vorhanden ist, kann gezeigt werden, daß sie wegen dem zu Axiom **III** äquivalenten Theorem I.13 doch in Σ' sein muß.

Es könnte eingewendet werden, daß die Teilklassen-Beziehung $\Sigma' \subset \bigcup\Sigma_\alpha$, nicht eindeutig definiert ist. Dem muß jedoch entgegengehalten werden, daß obwohl die Mengen in Σ' vielleicht nur so aussehen, wie wenn sie bloß isomorph seien zu den Mengen in $\bigcup\Sigma_\alpha$, sie gemäß Axiom **II** doch als identisch betrachtet werden müssen.

Im Zusammenhang mit der obigen Beweisführung des Theorems I.16 ist es vom Gesichtspunkt der symbolischen Modelltheorie verlockend, eine neue Konstante bzw. Menge hinzuzufügen. Dies ist jedoch im Sinne des der Finsler-Mengenlehre zugrundeliegenden Ideenrealismus nicht möglich, denn von *neuen* Mengen zu sprechen, wenn man bereits *alle* (im absoluten Sinne) hat, ist offensichtlich widerspruchsvoll. Von jeder neu definierten «Menge» kann in der Finsler-Mengenlehre gezeigt werden, daß sie entweder keine Menge ist (wie die Russellsche Klasse) oder schon in $\bigcup\Sigma_\alpha$ enthalten ist.

Unter der *Unabhängigkeit der Axiome **I**, **II** und **III*** verstehen wir die Eigenschaft, daß keines der Axiome aus den vorangehenden gefolgert werden kann. Diese Bestimmung trägt der Tatsache Rechnung, daß Axiom **II** ohne Axiom **I**, und Axiom **III** ohne die Axiome **I** und **II** keinen eindeutigen Sinn haben.

Die Unabhängigkeit der Axiome **I**, **II** und **III** ergibt sich aus folgenden Beispielen. In einer Klasse, die aus zwei Objekten besteht, von denen jedes beliebig die Beziehung $\ni$ entweder zum andern oder zu keinem Objekt besitzt, ist Axiom **I** nicht erfüllt. Eine Klasse, die aus zwei nicht identischen Objekten besteht, von denen jedes die Beziehung $\ni$ zu keinem Objekt besitzt (das heißt zwei verschiedene Nullmengen), genügt Axiom **I**, aber nicht Axiom **II**. Eine Klasse, die aus der Null- und der Einsmenge besteht, genügt den Axiomen **I** und **II**, aber nicht Axiom **III**.

Die *Vollständigkeit* des Systems der Axiome **I**, **II** und **III** bedeutet, daß es keine von diesen Axiomen unabhängige, auf Mengen bezügliche Begriffsbeziehung geben kann. Mit anderen Worten, jede solche Bestimmung ist entweder wahr oder falsch. Dies ist tatsächlich durch die eindeutige Bestimmtheit der den Axiomen **I**, **II** und **III** genügenden Klasse Σ gewährleistet. Denn wegen Theorem I.16 sind die die Axiome erfüllenden Klassen, das heißt alle Modelle der Axiome **I**, **II** und **III** zueinander isomorph und damit ist dieses Axiomensystem kategorisch (oder monomorph). Im Rahmen einer nicht-symbolisierten Prädikatenlogik ist dies äquivalent zur Tatsache, daß das Axiomensystem vollständig ist (siehe dazu Ziegler [1996d], Kapitel 3.5; entscheidend ist dabei, daß weder die Isomorphie noch die in Betracht kommenden Prädikate durch irgendwelche sprachlich-symbolischen Ausdrucksmittel beschränkt sind.)

Dies bedeutet schließlich, daß man es bei den die Axiome **I**, **II** und **III** erfüllenden mathematischen Objekten nur noch mit diesen selbst, das heißt den eigentlichen Mengen, und keinen ihrer kontextabhängigen Darstellungen zu tun hat. In diesem Sinne kann hier von prinzipiell *modellfreier Axiomatik* der reinen Mengen gesprochen werden.

Betrachtet man trotzdem noch unterschiedliche Darstellungen, so gelten in allen solchen die Axiome erfüllenden Modellen bzw. Klassen dieselben Sachverhalte, das heißt dieselben Propositionen aufgrund von Prädikaten über Mengen.

1.8 Die Axiome der ZF-Mengenlehre

Wir geben eine Übersicht der Axiome der ZF-Mengenlehre zum besseren Vergleich der entsprechenden Sachverhalte im Rahmen der Finsler-Mengenlehre. Man beachte, daß es für die üblichen Axiome der ZF-Mengenlehre entscheidend ist, daß sie im Rahmen einer sprachlich festgelegten Logik (dem Prädikatenkalkül erster Stufe) dargestellt werden.

ZF-AXIOME	BEGRIFFLICHE SACHVERHALTE (Prinzipien)
0. Existenzaxiom (existence) $\exists x\ (x = x)$	*0. Existenzprinzip* Es gibt eine Menge.
1. Axiom der Bestimmtheit (extensionality) $\forall xy\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$	*1. Prinzip der Bestimmtheit* Wenn die Mengen x und y dieselben Elemente haben, so ist $x = y$.
2. Aussonderungsaxiom (comprehension, separation) Schema der Aussonderungsaxiome: Zu jedem Ausdruck $\varphi(z)$ das Axiom: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x\ \wedge\ \varphi(z)))$	*2. Aussonderungsprinzip* Wenn x eine Menge ist und φ eine begriffliche Eigenschaft, so ist die Klasse $[z \mid x \ni z\ \wedge\ \varphi(z)]$ eine Menge.
3. Paarmengenaxiom (pairing) $\forall xy\ \exists z\ (x \in z \wedge y \in z)$	*3. Paarmengenprinzip* Für die Mengen x und y gibt es eine Menge $z = \{x, y\}$, die genau x und y enthält.
4. Vereinigungsmengenaxiom (union) $\forall X\ \exists y\ \forall xz\ ((x \in X \wedge z \in x) \rightarrow z \in y)$	*4. Vereinigungsmengenprinzip* Für jede Menge X gibt es eine Menge $y = \bigcup X$, die *Vereinigung*, die alle Elemente der Elemente von X enthält.
5. Potenzmengenaxiom (power set) $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subset x \rightarrow z \in y)$	*5. Potenzmengenprinzip* Für jede Menge x gibt es eine Menge $y = Pot(x)$, die *Potenzmenge*, die alle Teilmengen von x enthält.
6. Unendlichkeitsaxiom (infinity) $\exists x\ (\varnothing \in x \wedge \forall z\ (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x))$	*6. Unendlichkeitsprinzip* Es gibt eine Menge x, welche die leere Menge $\varnothing$ und mit jedem Element $x \ni z$ auch die Menge $z \cup \{z\}$ enthält.

7. Ersetzungsaxiom (replacement)

Schema der Ersetzungsaxiome:
Zu jeder Funktion $y = f(x)$ das Axiom:
$\forall X \, \exists y \; y = f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$.

7. Ersetzungsprinzip

Wenn f eine Funktion ist, so ist das Bild $f[X]$ jeder Menge X wieder eine Menge, das heißt: $f[X] = \{f(x) \mid X \ni x\}$.

8. Fundierungsaxiom (regularity, foundation)

$$\forall X \, (X \neq \varnothing \rightarrow \exists x \, (x \in X \wedge x \cap X = \varnothing))$$

8. Fundierungsprinzip

Für jede nicht-leere Menge X gibt es ein $\ni$-*minimales Element*, das heißt, eine Menge x mit $X \ni x$, sodaß $x \cap X = \varnothing$.

9. Auswahlaxiom (choice, AC)

$$\forall X \, (\forall xy \, ((x \in X \wedge y \in X) \rightarrow x \neq \varnothing \wedge (x = y \vee x \cap y = \varnothing))) \rightarrow \exists Y \, \forall x \, (x \in X \rightarrow (\exists z \; Y \cap x = \{z\}))$$

9. Auswahlprinzip

Jede Menge X, deren Elemente x nicht-leer sind, besitzt eine *Auswahlmenge*, das heißt eine Menge, die aus jedem Element von X genau ein Element enthält und sonst nichts.

Das *Fundierungsaxiom* bzw. das *Fundierungsprinzip* beinhaltet anschaulich, daß eine Menge letzlich nach «unten» in die Nullmenge münden soll, das heißt, daß Mengen die Nullmenge als letzten $\in$-Vorgänger bzw. $\ni$-Nachfolger haben sollen.

Definition Ein $\in$-*minimales Element* x einer Menge $X \neq \varnothing$ ist ein Element, für welches es kein $y \in X$ gibt mit $y \in x$.

Definition Ein $\ni$-*minimales Element* x einer Menge $X \neq \varnothing$ ist ein Element, für welches es kein $X \ni y$ gibt mit $x \ni y$.

Die Existenz eines $\in$-minimalen Elementes x einer Menge $X \neq \varnothing$ ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß es in der Menge X ein Element x gibt, sodaß x und X kein gemeinsames Element besitzen, das heißt $x \cap X = \varnothing$. Offensichtlich besitzt jede Menge, welche die Nullmenge als Element enthält, ein $\in$-minimales Element, ist also fundiert:

Definition Eine nicht-leere Menge heißt *fundiert*, wenn sie ein $\in$-minimales Element besitzt.

Definition Eine nicht-leere Menge heißt *fundiert*, wenn sie ein $\ni$-minimales Element besitzt.

Die Aufgabe des Fundierungsaxioms in der ZF-Mengenlehre ist die Verhinderung unendlich absteigender Ketten von Elementbeziehungen, wie zum Beispiel

$$\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0 \qquad\qquad x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots \; .$$

Damit wird gleichzeitig ausgeschlossen, daß es Mengen gibt, welche sich selbst enthalten, für die also gilt $x \in x$ bzw. $x \ni x$, denn daraus kann die nichtabbrechende Kette

$$x \in x \in x \in x \in \ldots \qquad\qquad x \ni x \ni x \ni x \ni \ldots$$

gebildet werden. Entsprechendes gilt für Zyklen der Form

$$x_0 \in x_n \in \ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0 \qquad\qquad x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots \ni x_n \ni x_0$$

da diese ebenfalls zu nichtabbrechenden Ketten erweitert werden können.

Die Gültigkeit des Fundierungsaxioms in der ZF-Mengenlehre ist die Grundlage für die sogenannte *kumulativ-hierarchische Struktur* dieser Mengenlehre, das heißt des «trichterförmigen» rekursiven Aufbaus aller Mengen dieses Systems, ausgehend von der Nullmenge $\varnothing$ und durch die ZF-Axiome erlaubten Operationen.

Wir kehren zurück zur Finsler-Mengenlehre und zeigen, daß einige der ZF-Axiome dort beweisbare Theorem sind. Aus den Theoremen I.9 und I.15 ergibt sich unmittelbar Theorem I.17.

Theorem I.17 *Das Existenzprinzip und das Prinzip der Bestimmtheit sind beweisbar.*

Theorem I.18 *Das Paarmengenprinzip und das Potenzmengenprinzip sind beweisbar.*

Beweis: Wegen Theorem I.14 ist die Klasse $z = [x, y]$ zweier Mengen x und y sicher eine Menge. Denn einerseits ist die Klasse wohlbestimmt und andererseits ist die Menge z genau dann Element von sich selbst, wenn entweder $z = x$ oder $z = y$. – Wegen Theorem I.14 ist auch die wohlbestimmte Klasse $Pot(X) = [x \mid x \subset X]$ aller Teilmengen x einer Menge X wieder eine Menge. Denn $\forall Y(Y \subset X \rightarrow X \ni Y)$ gilt genau dann, wenn $Pot(X) \subset X$ bzw. wenn $Pot(X) \ni Pot(X)$. Ob $\forall Y(Y \subset X \rightarrow X \ni Y)$ gilt, ist eindeutig bestimmt, also auch ob $Pot(X) \ni Pot(X)$.

Im allgemeinen ist natürlich für eine Menge X nicht $Pot(X) \ni Pot(X)$. Ist X transitiv, so gilt jedenfalls $X \subset Pot(X)$. Vermutlich gilt jedoch nur für die Allmenge A auch $Pot(A) \subset A$, also die Beziehung $Pot(A) = A$ und damit $Pot(A) \ni Pot(A)$.

Theorem I.19 *Die Einerklasse* $[x] :\equiv [y \mid y = x]$ *ist eine Menge, die* Einermenge $\{x\}$.

Beweis: Aus dem Paarmengenprinzip (Theorem I.18) und dem Prinzip der Bestimmtheit (Theorem I.17) folgt, daß $\{x, x\} = \{x\}$ existiert.

I.9 Mächtigkeit und Unendlichkeit

Man beachte, daß Theorem I.19 noch nicht zum Beweis der Gültigkeit des *Unendlichkeitsprinzips* ausreicht, denn dazu muß garantiert werden können, daß zumindest für ein x gilt $x \neq \{x\}$ oder allgemeiner, daß x nicht Element seiner eigenen transitiven Hülle ist. Dieser Beweis wird im Abschnitt II.3 im Rahmen der zirkelfreien Mengen nachgeholt (Theorem II.14).

Definition Eine Menge x heißt *induktiv*, wenn sie die leere Menge $\varnothing$ und mit jedem Element z mit $x \ni z$ auch die Menge $z \cup \{z\}$ enthält.

Das Unendlichkeitsprinzip behauptet also gerade die Existenz induktiver Mengen.

Zur Einführung des Begriffs der Mächtigkeit müssen wir uns auf den Begriff der allgemein-mathematischen *Funktion*, das heißt einer bestimmten Zuordnung zwischen mathematischen Objekten, beziehen. Wie bereits im Abschnitt 4 erwähnt, ist im Rahmen der Finsler-Mengenlehre dieser Begriff unabhängig von dessen Mengendarstellung bestimmt, denn die Finsler-Mengenlehre erhebt nicht den Anspruch, die ganze Mathematik zu begründen: sie ist ein mathematisches Gebiet unter anderen. Es ist jedoch möglich, von Funktionen eine mengentheoretische Darstellung zu geben.

Definition Das *geordnete Paar* (x, y) ist definiert durch die Menge

$$(x, y) :\equiv \{x, \{x, y\}\} = \{x\} \cup \{\{x, y\}\}.$$

Definition Eine Menge (oder Klasse) von geordneten Paaren heißt eine *Relation*.

Beispiel: Die Menge der geordneten Paare von natürlichen Zahlen (n, m) sodaß $n < m$ ist die Relation

$$< = \{(n, m) \mid \mathbf{N} \ni n, m \text{ und } n < m\}$$

Definition Eine *Funktion* f ist eine Relation, das heißt eine Menge (oder Klasse) von geordneten Paaren (x, y), sodaß

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (f \ni (x, y) \wedge f \ni (x, z) \rightarrow y = z).$$

Beispiel: Wenn $f(n) = n + 1$, dann ist

$$f = \{(n, m) \mid \mathbf{N} \ni n, m \text{ und } m = n + 1\}.$$

Wir kommen nun zu dem fundamentalen Begriff der Mächtigkeit.

Definition Seien X und Y Mengen.
(i) Wenn es eine injektive Funktion $f: X \rightarrow Y$ gibt, so ist X *höchstens so mächtig wie* Y oder X *hat höchstens die Mächtigkeit von* Y und wir schreiben $X \preceq Y$.
(ii) Wenn es eine bijektive Funktion $f: X \rightarrow Y$ gibt, so ist X *gleichmächtig wie* Y oder X *hat die gleiche Mächtigkeit* wie Y und wir schreiben $X \approx Y$.
(iii) Wenn es eine injektive aber keine surjektive Funktion $f: X \rightarrow Y$ gibt, so ist X *schmächtiger wie* Y oder X *hat eine kleinere Mächtigkeit wie* Y und wir schreiben $X \prec Y$.

Definition Eine Menge X heißt *Dedekind-unendlich*, wenn sie zu einer echten Teilmenge $T \subset X$, $T \neq X$, ihrer selbst gleichmächtig ist, das heißt wenn $X \approx T$. Sie heißt *Dedekind-endlich*, wenn es keine Teilmenge ihrer selbst gibt, zu der sie gleichmächtig ist.

Definition Eine Menge X heißt *endlich*, wenn sie zu einer endlichen Ordinalzahl gleichmächtig ist, das heißt wenn $X \approx \mathbf{n}$ für irgendein $\mathbf{n}$. Eine nicht endliche Menge heißt *unendlich*.

Man kann zeigen, daß jede endliche Menge auch Dedekind-endlich ist; mit Hilfe des Auswahlprinzips gilt auch die Umkehrung (siehe zum Beispiel Ebbinghaus [1994], Kapitel V.3 oder Ziegler [1996d], Abschnitt 2.7). Damit sind auch die beiden Unendlichkeitsbegriffe äquivalent und man kann einfach von *unendlichen Mengen* sprechen.

Offensichtlich ist jede induktive Menge auch unendlich, denn es gibt in diesem Falle eine Bijektion f der induktiven Menge M in eine Teilmenge ihrer selbst der Form $f(X) = \{X\}$. Dabei gibt es sicher ein Element in M, das nicht im Bild $f[M]$ liegt, nämlich die Nullmenge $\varnothing$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, denn eine unendliche Menge braucht nicht induktiv zu sein.

Wie wir im Abschnitt II.5 beweisen werden (Theorem II.19), ist die Menge der natürlichen Zahlmengen zwar unendlich, aber nicht induktiv, denn für eine natürliche Zahlmenge n ist $n \cup \{n\} = \bigcup\{n, \{n\}\}$ keine natürliche Zahlmenge. Zum Beispiel kann die Menge $2 \cup \{2\} = \{1, 2\}$ keine natürliche Zahlmenge sein.

Man beachte, daß im Gegensatz zu hier die natürlichen Zahlen meist mit den *endlichen Ordinalzahlen* identifiziert werden. Man kann dann etwa zeigen, daß erstens die so bestimmten natürlichen Zahlen jeder induktiven Menge angehören und zweitens, daß die Menge dieser natürlichen Zahlen die kleinste induktive Menge ist, das heißt diejenige Menge, die Teilmenge jeder induktiven Menge ist.

Definition Eine Menge X heißt *abzählbar-unendlich*, kurz *abzählbar*, wenn sie zur Menge ω aller endlichen Ordinalzahlen gleichmächtig ist, das heißt wenn $\omega \approx X$. Eine Menge X heißt *nicht abzählbar* oder *überabzählbar*, wenn sie eine größere Mächtigkeit als die Menge der endlichen Ordinalzahlen hat: $\omega \prec X$.

Die Existenz der Menge ω der endlichen Ordinalzahlen wird im Abschnitt II.3 bewiesen (Theorem II.14).

Bemerkung: Kardinalzahlen können erst definiert werden, wenn wir die Gültigkeit des Auswahlprinzips für zirkelfreie Mengen nachgewiesen haben (siehe Abschnitt II. 6). Es

gibt also keine Kardinalzahltheorie für die vollständige Finsler-Mengenlehre. Ob in der Finsler-Mengenlehre zur Einführung der Kardinalzahlen auch die Fundiertheit alleine ausreichen würde, ohne das Auswahlprinzip zu verwenden, ist nicht bekannt.

I.10 Spezielle Mengen und Klassen

I.10.1 Die Allmenge

Theorem I.20 *Die Allmenge A existiert. Sie enthält sich selbst und es gilt $A = Pot(A)$.*

Beweis: Die Allmenge ist diejenige wohlbestimmte Menge, welche zu *allen* Mengen die $\ni$-Beziehung hat. Nach Axiom **III** oder Theorem I.13 und Theorem I.14 existiert die Allmenge tatsächlich. Da sie alle Mengen umfaßt, enthält sie sich selbst. Nun folgt mit der Tatsache, daß A alle Mengen enthält, für eine Menge x mit $x \subset A$ sicher $A \ni x$, aber ebenso aus $A \ni x$ auch $x \subset A$, da die Elemente von x alle in A enthalten sein müssen. Daraus ergibt sich die Identität $A = Pot(A)$.

In der Tatsache, daß die Allmenge sich selbst enthält, liegt der Grund, weshalb es in der ZF-Mengenlehre keine Allmenge geben kann, denn dort ist wegen des Fundierungsaxioms keine Selbstbeziehung erlaubt.

An dieser Stelle ist folgender Einwand naheliegend: Ist die Russell-Klasse als Teilklasse der Allmenge nicht eine Menge? Nein, denn zur Bestimmung der Russell-Klasse als Menge müßte das Prinzip der Aussonderung benützt werden. Dieses Prinzip gilt jedoch in der Finsler-Mengenlehre im allgemeinen nicht, wofür gerade die Russell-Klasse als Gegenbeispiel dient: Die Russell-Klasse erfüllt Axiom **I** nicht, da nicht bestimmt ist, ob sie, als Menge aufgefaßt, sich selbst enthält oder nicht.

Eine Frage, die in diesem Zusammenhang auftauchen kann, betrifft die Bedeutung der Potenzmenge der Allmenge. Ist nicht die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge M *immer* größer als die Mächtigkeit der Menge M selbst? Nein, dies gilt in der Finsler-Mengenlehre im allgemeinen nicht. Für die Allmenge ist klar, daß sie *alle* Mengen enthält, also auch alle ihre Teilmengen. Dies bedeutet, daß die Allmenge A und ihre Potenzmenge dieselbe Mächtigkeit haben und nach Theorem I.20 ist sogar $A = Pot(A)$. Daraus entnimmt man weiter, daß jede Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens auf die Allmenge eine Klasse produziert, die keine Menge sein kann.

Zum besseren Verständnis wollen wir uns den Beweis des Cantorschen Theorems im Rahmen der ZF-Mengenlehre genauer anschauen, um herauszufinden, warum dieses Theorem nicht in der Finsler-Mengenlehre gilt.

Theorem von Cantor (ZF) *Für jede Menge M ist die Mächtigkeit der Potenzmenge Pot(M) größer als die Mächtigkeit der Menge M.*

Beweis (in ZF): Sei M eine Menge. Die Funktion $f(X) = \{X\}$ ist eine injektive Abbildung $f: M \to Pot(M)$, also ist $M \preceq Pot(M)$. Es kann aber keine bijektive Funktion $f: M \to Pot(M)$ geben. Um dies zu zeigen, definieren wir die «Diagonalmenge»

$$z = \{x \in M \mid x \notin f(x)\} \in Pot(M).$$

Gemäß Aussonderungsaxiom ist dies eine Teilmenge von M, aber z gehört nicht zum Bild $f[M]$. Denn man nehme an, daß $y \in M$ und $f(y) = z$; dann ist $y \in z$ genau dann, wenn $y \notin f(y) = z$. Widerspruch. Daher ist f nicht surjektiv, also ist: $M \prec Pot(M)$.

Dieser Beweis gilt nicht in der Finsler-Mengenlehre, weil dort die Klasse z keine Menge ist. Im obigen Beweis wird mit dem Aussonderungsaxiom geschlossen, daß z als Menge existiert, aber in der Finsler-Mengenlehre kann z nur eine Klasse sein, denn Axiom I ist nicht erfüllt, da nicht bestimmt ist, ob $f(y) \ni y$ oder nicht. Ersetzt man die Menge M durch die Allmenge A und f durch die Identität, so erhält man durch diese Konstruktion genau die Russell-Klasse.

Inhaltlich, das heißt begrifflich-mathematisch, ist jedoch klar, daß es in der Finsler-Mengenlehre eine injektive Abbildung $Pot(A) \to A$ geben muß, da $Pot(A) = A$ (Theorem I.20).

Es ist im Sinne der Finsler-Mengenlehre nicht erstaunlich, daß das Aussonderungsprinzip nicht allgemeingültig ist, denn das würde bedeuten, daß jede Klasse eine Menge ist.

Theorem I.21 *Das Fundierungsprinzip, das Aussonderungsprinzip und das Ersetzungsprinzip sind nicht allgemeingültig.*

Beweis: Die Existenz der J-Menge widerlegt das Fundierungsprinzip und die im obigen Beweis des Theorems von Cantor konstruierte Klasse sowie die Russell-Klasse als Teilklasse (aber nicht Teilmenge) der Allmenge widerlegt das Aussonderungsprinzip. Für das Ersetzungsprinzip betrachten wir eine Funktion $f: A \to A$ der Allmenge in sich, die folgendermaßen definiert ist: $f(M) = M$ für $\neg(M \ni M)$ und $f(M) = \emptyset$ für $M \ni M$. Offenbar ist das Bild $f[A]$ der Allmenge unter f genau die Russell-Klasse, welche keine Menge ist. Die Funktion f ist jedoch eindeutig definiert auf der Allmenge A. Also gilt das Ersetzungsprinzip im allgemeinen nicht.

I.10.2 Die Vereinigungsmenge

Theorem I.22 *Das Vereinigungsmengenprinzip ist nicht allgemeingültig.*

Beweis: Sei N die Klasse aller sich selbst nicht enthaltenden Mengen ohne N selbst. Diese Klasse ist wegen Theorem I.14 eine Menge. Man betrachte die Klasse $[N, \{N\}]$. Auch sie ist eine Menge. Aber die Vereinigung $\bigcup\{N, \{N\}\}$ ist genau die Russell-Klasse und diese ist keine Menge. Daher existiert die Vereinigungsmenge einer Menge nicht immer.

I.10.3 Die größte Ordinalzahl

Definition Eine Menge heißt *wohlgeordnet* durch $\ni$, wenn sie (linear oder total) geordnet ist durch $\ni$ und jede nicht-leere Teilmenge fundiert ist.

Offenbar sind Ordinalzahlen selbst fundiert, da jede Menge Teilmenge ihrer selbst ist.

Definition Eine Menge α ist eine *Ordinalzahl*, wenn sie transitiv und wohlgeordnet ist. Der *Nachfolger* von α ist $\alpha + 1 :\equiv \alpha \cup \{\alpha\}$. Wenn α kein Nachfolger ist, dann ist

$$\alpha = sup\{\beta \mid \alpha \ni \beta\}.$$

In diesem Falle heißt α *Limesordinalzahl*. Die *Ordnungsrelation* $<$ für Ordinalzahlen wird festgelegt durch:

$$\alpha < \beta :\equiv \beta \ni \alpha;$$

$$\alpha \leq \beta :\equiv \alpha < \beta \text{ oder } \alpha = \beta.$$

Wir definieren eine bestimmte *Folge von unendlichen Ordinalzahlen* α, das heißt von Ordinalzahlen mit $\alpha \succeq \omega$, wobei

$$\omega_0 \quad :\equiv \omega,$$

$$\omega_{\alpha+1} \quad :\equiv \{\beta \mid \beta \preceq \omega_\alpha\},$$

$$\omega_\gamma \quad :\equiv \bigcup_{\beta<\gamma} \omega_\beta \text{ für Limesordinalzahlen } \gamma.$$

Hieraus ist klar, daß aus $\alpha < \beta$ folgt $\omega_\alpha < \omega_\beta$. Diese ω_α werden ordinale *Anfangszahlen* genannt, weil sie am Anfang einer Folge von Ordinalzahlen mit einer bestimmten Mächtigkeit stehen. Sie bilden die Grundlage zur Definition von Kardinalzahlen im Abschnitt II.6.

Zum Beispiel ist die Menge ω aller endlichen Ordinalzahlen (Theorem II.14) eine Limesordinalzahl.

Theorem I.23 *Die Klasse Ω aller Ordinalzahlen ist keine Menge.*

Beweis: Wir betrachten die Klasse *aller* Ordinalzahlen α. Solche Mengen α enthalten wegen der Transitivität alle ihre Vorgänger und wegen der Fundiertheit können sie sich nicht selbst enthalten. Nennen wir diese Klasse Ω, so gilt:

$$\Omega = [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \mathbf{n}, \mathbf{n+1}, \ldots, \omega, \omega + \mathbf{1}, \omega + \mathbf{2}, \ldots, \omega\cdot\mathbf{2}, \omega\cdot\mathbf{3}, \ldots, \omega^2, \ldots].$$

Wäre nun Ω eine Menge, so kann sie sich nicht selbst enthalten, denn sonst wäre sie eine Ordinalzahl und gleichzeitig nicht fundiert. Enthielte andererseits Ω nicht sich selbst, so müßte sie doch eine Ordinalzahl sein, da sie in diesem Falle transitiv und wohlgeordnet ist. In beiden Fällen ergibt sich also ein Widerspruch. Folglich ist unter der Annahme, Ω sei eine Menge, nicht eindeutig entschieden, ob Ω sich selbst als Element angehört oder nicht. Mithin kann Ω keine Menge sein.

Theorem I.24 *Die Klasse O aller Ordinalzahlen, welche einen Nachfolger haben, ist eine Menge und zwar die größte Ordinalzahl.*

Beweis: Wir prüfen, ob die $\ni$-Beziehung dieser Klasse zu den Mengen eindeutig bestimmt ist. Es ist klar, daß $O \ni \alpha$, wenn α einen Nachfolger $\alpha \cup \{\alpha\}$ hat. Für die Widerspruchsfreiheit der Annahme, O sei eine Menge, muß noch die $\ni$-Beziehung dieser Klasse zu sich selbst untersucht werden. Aber wenn O eine Menge ist, so ist sie eine Ordinalzahl, da sie transitiv und wohlgeordnet ist, also enthält sie alle ihre Vorgänger, aber nicht sich selbst. Demzufolge ist nicht $O \ni O$ und die Annahme, O sei eine Menge, führt nicht zu einem Widerspruch. Hieraus folgt, daß O die größte Ordinalzahl ist, denn sie hat keinen Nachfolger, da $O \cup \{O\}$ keine Menge ist (Theorem I.23).

Jetzt läßt sich auch besser verstehen, warum es in der Finsler-Mengenlehre eine größte Ordinalzahl geben kann, während in der ZF-Mengenlehre *jede* Ordinalzahl einen Nachfolger hat. Die Nachfolger werden dabei, wie bereits erwähnt, in folgender Weise gebildet:

$$\alpha \cup \{\alpha\} = \bigcup\{\alpha, \{\alpha\}\}.$$

In der ZF-Mengenlehre ist die Bildung der Vereinigungsmenge immer möglich, in der Finsler-Mengenlehre gemäß Theorem I.22 jedoch nicht. Im Falle der Ordinalzahlen würde

$$\bigcup\{O, \{O\}\} = O \cup \{O\} = \Omega$$

tatsächlich die Klasse *aller* Ordinalzahlen ergeben. Damit haben wir ein weiteres Gegenbeispiel für die Allgemeingültigkeit des Vereinigungsmengenprinzips gefunden.

Bilden wir dagegen die Vereinigung der Klasse Ω, so erhalten wir genau O, das heißt es gilt $O = \bigcup\Omega$, denn alle Elemente der Elemente von Ω haben einen Nachfolger, und für jede Ordinalzahl, die einen Nachfolger hat, ist dieser in der Klasse Ω aller Ordinalzahlen enthalten und damit die Ordinalzahl selbst in $\bigcup\Omega$.

I.10.4 Die Auswahlmenge

Definition Sei M eine Menge mit nur nicht-leeren Elementen. Wenn eine Menge (oder Klasse) von jedem Element von M genau ein Element enthält und sonst nichts, heißt sie eine *Auswahlmenge* (oder *Auswahlklasse*) von M.

Beispiel: Die Menge $M = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ hat die Auswahlmengen $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ und $\{\emptyset\}$.

Bemerkung: Jede endliche Menge mit nicht-leeren Elementen hat eine Auswahlmenge.

Theorem I.25 *Das Auswahlprinzip ist nicht allgemeingültig.*

Beweis: Gemäß Theorem I.19 existiert die Einermenge $\{X\}$ einer Menge X. Wir betrachten die Menge $M = \{\{\alpha\} \mid \alpha \text{ eine Ordinalzahl}\}$. M ist sicher eine Menge, da eindeutig bestimmt ist, zu welchen Mengen M die $\ni$-Beziehung hat. Diese Menge hat jedoch keine Auswahlmenge, denn sonst würde die Klasse aller Ordinalzahlen eine Menge sein, im Widerspruch zu Theorem I.23.

Ein weiteres Gegenbeispiel für die Allgemeingültigkeit des Auswahlprinzips und des Ersetzungsprinzips ergibt sich aus folgender Klasse:

$$M_R = [\{x\} \mid \neg(x \ni x)].$$

Um zu zeigen, daß dies eine Menge ist, genügt es nach Theorem I.14 zu prüfen, ob es eindeutig bestimmt ist, ob M_R Element von sich selbst ist oder nicht. Es sei $M_R \ni M_R$, dann ist $M_R = \{M_R\}$ und $\neg(M_R \ni M_R)$. Dies kann jedoch nicht sein. Also ist $\neg(M_R \ni M_R)$, woraus folgt, daß $M_R \ni \{M_R\}$, was widerspruchsfrei ist.

Nun ist die Auswahlklasse von M_R die Klasse $[x \mid \neg(x \ni x)]$, also genau die Russell-Klasse und damit sicher keine Menge. Folglich ist die Existenz der Auswahlklasse nicht in jedem Fall garantiert. Im weiteren ergibt sich daraus noch einmal eine Widerlegung des Ersetzungsprinzips. Denn sei f eine Funktion über der Allmenge A, die einer Menge X irgendein Element x dieser Menge X zuordnet. Dann ist das Bild $f[M_R]$ der Menge M_R wieder gleich der Russell-Klasse, also keine Menge.

Theorem I.26 *Jede Menge ist eine Auswahlmenge, also ist die Menge aller Auswahlmengen identisch mit der Allmenge.*

Beweis: Sei M eine Menge und sei $K = [\{x\} \mid M \ni x\}$. Es ist eindeutig bestimmt, welche Elemente zu K gehören, weil M eine Menge ist und $\{x\}$ ebenfalls Menge ist, wenn x eine

Menge ist (Theorem I.19). Also ist K eine Klasse. Man nehme an, K sei eine Menge. Kann dann $K \ni K$ sein? In diesem Falle ist $K = \{x\}$ mit $M \ni x$ und K hat nur ein Element, also muß $M = \{x\}$ sein. Daraus folgt jedoch $K = \{\{x\}\} = \{x\}$ und dies gilt nur wenn x identisch mit der J-Menge ist. In allen anderen Fällen ist nicht $K \ni K$. Es ist also eindeutig bestimmt, ob $K \ni K$ oder nicht $K \ni K$. Daher ist K eine Menge. Die Menge K hat nur M als Auswahlmenge. Hieraus folgt, daß jede Menge eine Auswahlmenge ist, und damit folgt die Identität der Menge der Auswahlmengen mit der Allmenge.

I.11 Prinzipielle Nicht-Symbolisierbarkeit der Finsler-Mengenlehre

Wir gehen aus vom symbolisierten Prädikatenkalkül erster Stufe mit Identität und formulieren darin die Axiome **I** und **II** der Finsler-Mengenlehre. Wie sich zeigt, ergeben sich reichlich triviale Formeln (zum Beispiel ist **(II)** eine Tautologie), was schon ein erster Hinweis auf die Tatsache ist, daß sich der begriffliche Gehalt dieser Axiome nicht in diesem Rahmen darstellen läßt. Für Axiom **I** ist entscheidend, daß für zwei Mengen x und y *entweder* $x \in y$ *oder* $\neg(x \in y)$ gilt, das heißt, es kann nicht beides zugleich wahr oder beides zugleich falsch sein. Hier steht W oder F für die konstante Wahrheit $p \vee \neg p$ bzw. Falschheit $p \wedge \neg p$ einer beliebigen Aussage p.

(I) $\forall x\, \forall y\, ((x \in y \vee \neg(x \in y)) \wedge \neg((x \in y) \leftrightarrow F \wedge \neg(x \in y) \leftrightarrow F))$

(II) $\forall x\, \forall y\, ((x = y \leftrightarrow W) \rightarrow x = y)$

Es gibt Klassen von Objekten, welche diese Axiome erfüllen, etwa $[\varnothing, \{\varnothing\}]$. Wir wollen zeigen, daß jede Klasse von Objekten, welche **(I)** und **(II)** erfüllt, erweiterbar ist. Sei Λ irgendeine die Axiome **(I)** und **(II)** erfüllende Klasse, das heißt die Struktur $\langle \Lambda, \in \rangle$ sei ein beliebiges Modell von **(I)** und **(II)**. Die Russell-Klasse ist dann definierbar durch

$$[x \in \Lambda \mid \neg(x \in x)]$$

und gehört sicher nicht zu Λ, da sie das Axiom **(I)** nicht erfüllt. Es werde nun eine neue Konstante N definiert durch

$$x \in N :\leftrightarrow \neg(x \in x) \wedge x \in \Lambda$$

Damit erfüllt N das Axiom **I** und es ist sicher $\neg(N \in \Lambda)$. Im weiteren ist auch N mit keiner Menge aus Λ identisch, da N mit keinem solchen Element isomorph sein kann.

Damit ergibt sich: *Wenn $\langle \Lambda, \in \rangle$ ein Modell der symbolisierten Finsler-Axiome (I) und (II) im Rahmen des symbolischen Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe ist, so ist es erweiterbar.*

Dies steht jedoch mit dem zu Axiom **III** äquivalenten Theorem I.13 in Widerspruch. Zusammen mit der Einsicht, daß in *jeder* sinnvollen prädikatenlogischen Symbolisierung der Finsler-Mengenlehre Λ mit N erweiterbar ist, folgt, daß die Finsler-Mengenlehre nicht in der symbolischen Prädikatenlogik erster Stufe dargestellt werden kann.

Eine andere Möglichkeit, die Unabgeschlossenheit oder Unvollständigkeit von prädikatenlogischen Symbolisierungen der Finsler-Mengenlehre zu demonstrieren, geht auf einen Einwand von Kreisel [1954] zurück (so wie obige Überlegung an einen Einwand von Baer [1928] anknüpft): Immer, wenn es widerspruchsfrei möglich ist, kann für zwei Mengen M und N das Axiom $M = N$ hinzugefügt werden. – Auch damit läßt sich der ursprüngliche Bestand an Mengen in einem Modell in gewissen Grenzen verändern.

Diese Resultate lassen sich verallgemeinern auf jede Art von symbolischer Darstellung mit Hilfe der Finslerschen Unvollständigkeitstheoreme. Diese lauten (siehe dazu Ziegler [1996d], Kapitel 4.18 oder [1996c]):

Erstes Finslersches Unvollständigkeitstheorem *Für jeden symbolischen Kalkül, der zumindest die elementare Arithmetik umfaßt, gibt es ein mathematisches Objekt, das nicht symbolisch darstellbar ist.*

Zweites Finslersches Unvollständigkeitstheorem *Für jeden symbolischen Kalkül, der zumindest die elementare Arithmetik umfaßt, gibt es ein symbolisch darstellbares Theorem, das symbolisch widerspruchsfrei, aber mathematisch-inhaltlich falsch und folglich relativ zum betrachteten Gedankenzusammenhang formallogisch widerspruchsvoll ist.*

Mit «formallogisch» ist hier ausdrücklich *keine* formalsprachliche (oder symbolische) Darstellung der Mathematik gemeint, sondern eine Darstellung *mathematischer Sachverhalte*, genauer mathematischer Begriffsinhalte, Begriffsverknüpfungen (Urteile) sowie mathematischer Folgerungen und Beweise, gemäß ihren formalen (im Gegensatz zu ihren inhaltlichen) logischen Strukturen mit Hilfe (unter anderem) der formallogischen Kategorien der Proposition und des Prädikats (siehe dazu Ziegler [1996d], Kapitel 3).

Da in der Mengenlehre in der üblichen Weise die elementare Arithmetik dargestellt werden kann, können beide Unvollständigkeitstheoreme unmittelbar auf die Finsler-Mengenlehre angewendet werden. Dies bedeutet, daß jede Art von Symbolisierung der Finsler-Mengenlehre Inkonsistenzen zur Folge hat, die erstens die Vollständigkeit und zweitens die Widerspruchsfreiheit der Finsler-Mengenlehre betreffen.

Weiter unten werden wir sehen, daß auch der der ZF-Mengenlehre entsprechende Teilbereich der Finsler-Mengenlehre, der Bereich der fundierten und zirkelfreien Mengen der hier so genannten *Cantor-Mengenlehre*, nicht symbolisierbar ist (siehe Abschnitt II.8). Seine absolute, das heißt nicht symbolisierbare Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit erbt dieser Teilbereich von der vollständigen (aber nicht symbolisierten) Finsler-Mengenlehre.

II. ZIRKELFREIE MENGEN

In diesem Kapitel werden wir die zirkelfreien Mengen definieren (Abschnitt 1) sowie einige Existenztheoreme ableiten (Abschnitt 2) und schließlich beweisen, daß die nicht-symbolisierten ZF-Axiome außer der Fundiertheit für die Klasse der zirkelfreien und fundierten Mengen gelten (Abschnitt 3). Es folgen einige Betrachtungen zum Auswahlprinzip (Abschnitt 4) und eine Palette von Beispielen und Theoremen über zirkelhafte und zirkelfreie Mengen (Abschnitt 5). Danach folgt ein Ausblick in die Kardinalzahltheorie (Abschnitt 6) und in unerreichbare Kardinalzahlen (Abschnitt 7) sowie in die Mengenlehre der zirkelfreien und fundierten Mengen, das heißt in die hier so genannte *Cantor-Mengenlehre* (Abschnitt 8). Zum Abschluß werden die Mengendarstellungen der natürlichen und der reellen Zahlen betrachtet (Abschnitt 9).

Von hier ab verwenden wir ausschließlich das gewohnte Zeichen $\in$ für die Element-Beziehung anstatt der inversen $\ni$-Beziehung.

II.1 Die Definition zirkelfreier Mengen

Mit Sicherheit zirkelhaft sind Mengen, die sich selbst enthalten, wie die J-Menge und die Allmenge. Auch wenn, allgemeiner, eine Menge M Element ihrer eigenen transitiven Hülle $TC(M)$ ist, das heißt wenn eine Menge in sich selbst wesentlich ist, ist sie als zirkelhaft aufzufassen.

Um die zirkelfreien Mengen zu definieren, schließen wir zuerst alle diejenigen Mengen aus Σ aus, in deren transitiver Hülle eine in ihrer eigenen transitiven Hülle enthaltene Menge enthalten ist, das heißt in denen eine in sich selbst wesentliche Menge wesentlich ist. Damit sind insbesondere alle sich selbst enthaltenden Mengen ausgeschlossen. Die Teilklasse von Σ der übrig bleibenden Mengen sei mit Σ^* bezeichnet. Diese Klasse Σ^* enthält noch immer zirkelhafte Mengen. Zum Beispiel kann die Menge C aller zirkelfreien Mengen nicht selber zirkelfrei sein, denn sonst müßte sie sich selbst enthalten. Weiter ist die Menge C auch nicht in ihrer transitiven Hülle $TC(C)$ enthalten.

Definition Eine Menge M aus Σ heiße *zirkelfrei*, wenn
(i) $M \in \Sigma^*$, das heißt, wenn in der transitiven Hülle von M keine Menge enthalten ist, welche Element ihrer eigenen transitiven Hülle ist, und wenn
(ii) M und jede in ihrer transitiven Hülle enthaltene Menge vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist.

Zirkelhaft heisse jede Menge, die nicht zirkelfrei ist.

Da es sich hier um eine imprädikative Definition handelt, muß geklärt werden, ob sie eine eindeutig bestimmte Klassifizierung der Mengen in zirkelfreie oder zirkelhafte induziert, also ob die Definition wohlbestimmt ist.

Definition Eine *Interpretation* von *zirkelfrei* ist eine charakteristische Funktion χ_{zf} von Σ^* auf $\{0, 1\}$, für welche gilt: $\chi_{zf}(M) = 0$ für die Interpretation von M als zirkelfrei und $\chi_{zf}(M) = 1$ für die Interpretation von M als zirkelhaft.

Die obige Definition von zirkelfrei ist nun so zu verstehen, daß eine Menge genau dann zirkelfrei ist, wenn es eine Definition derselben gibt, die bei allen Interpretationen von zirkelfrei χ_{zf} dieselbe Menge bestimmt. Wenn es eine solche Definition nicht gibt, so ist die

Menge zirkelhaft: sie hängt dann vom Begriff zirkelfrei ab. Hiermit ist klar, daß eine Menge entweder zirkelfrei oder zirkelhaft sein muß, also gilt

Theorem II.1 *Jede Menge ist eindeutig entweder zirkelfrei oder zirkelhaft.*

Man beachte, daß die durch die Definition explizit gemachte Eigenschaft der Zirkelfreiheit von Mengen unabhängig von unserer Erkenntnis existiert und jeweils einer Menge zukommt oder nicht zukommt. Dagegen können zur Untersuchung, ob eine konkret gegebene Menge M zirkelfrei ist oder nicht, beliebigen Variationen der Intepretation von zirkelfrei χ_{zf} vorgenommen werden. Derart durch Variation von χ_{zf} interpretierte Mengen werden dann hypothetisch (oder vorläufig) als zirkelfrei bzw. zirkelhaft aufgefaßt, bis man herausgefunden hat, ob es für die zu untersuchende Menge M eine Interpretation gibt, die bei allen Interpretationen von zirkelfrei χ_{zf} dieselbe Menge bestimmt oder nicht. Im ersten Fall ist M (tatsächlich oder endgültig) zirkelfrei, im letzteren zirkelhaft.

Wegen der Wohlbestimmtheit der Definition der Zirkelfreiheit kann die Gesamtheit der zirkelfreien Mengen als eine Klasse C betrachtet werden. Eine Menge M ist dann zirkelfrei, wenn sie ohne Bezug auf die Klasse C definiert werden kann. Die Interpretation der Klasse C kann in diesem Falle vermöge der Variation der Interpretation von zirkelfrei χ_{zf} beliebig geändert werden:

$$C_\chi = \{X \mid \chi_{zf}(X) = 0\}.$$

Trotzdem wird die Definition immer dieselbe Menge M bestimmen. Natürlich ist dieses Kriterium nicht praktisch ausführbar. Hier kommt es jedoch nur auf die prinzipielle Entscheidbarkeit an.

Für die mit der ZF-Mengenlehre vertrauten Leser soll noch auf die übliche Bestimmung der Definierbarkeit von Mengen eingegangen werden. In der symbolischen Modelltheorie für die Mengenlehre heißt eine Menge M definierbar über einem Modell $\mathcal{A} = \langle A, \in \rangle$, wenn es eine Formel φ und einen (oder mehrere) Parameter $p \in A$ gibt, sodaß

$$M = \{x \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi(x, p)\}.$$

Wenn die Menge M unabhängig ist vom Parameter p, läßt man ihn in der Formel weg und schreibt: $\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow x = M)$.

Nicht jede Menge ist in diesem Sinne definierbar, insbesondere nicht solche, welche zu ihrer Definition überabzählbar vieler Operationen bedürfen.

In der Finsler-Mengenlehre ist jedoch jede Menge im Prinzip definierbar vermöge einer konkreten Verknüpfung von reinen Begriffen, welche die Menge im Sinne von Axiom **I** eindeutig bestimmen. Dabei wird hier weder eine symbolische Ausdrückbarkeit noch eine Beschränkung der Anwendung der Operationen (zum Beispiel überabzählbar viele) gefordert. Kurz gesagt: es gibt keine sprachlichen Einschränkungen in irgendeiner Form.

Wir schreiben $Def(x, p)$ für eine Definition für die Menge x, die von einem Parameter p abhängt. Wir können für p die Klasse C wählen. Wenn die Definition unabhängig von C ist, können wir den entsprechenden Parameter weglassen. Andererseits können wir jedoch nicht sagen, daß $Def(x, p)$ zirkelfrei ist, wenn in der Definition C nicht vorkommt. Im Prinzip könnte ein äquivalenter oder verwandter Begriff zur Zirkelfreiheit an irgend einer Stelle benützt werden. Dies bildet *theoretisch* kein Problem, weil das Kriterium darin besteht, ob $Def(x)$ immer dieselbe Menge bestimmt was immer C auch sein möge. Mit der Veränderung von C verändert sich auch jeder zur Zirkelfreiheit äquivalente Begriff, wie auch jeder von ihr abhängige Begriff, wie etwa die Vereinigungsmenge (Theorem I.22 und II.12) oder die Auswahlmenge (Theorem I.25 und II.16). Denn vom Gesichtspunkt des Ideenrealismus aus gibt es nur *einen* Begriff der Zirkelfreiheit, nämlich den allen möglichen, zur ursprünglichen Definition der Zirkelfreiheit äquivalenten Darstellungen übergeordneten Begriffsinhalt.

Praktisch scheint es unmöglich, dieses Kriterium auf eine Menge konkret anzuwenden, um festzustellen, ob sie zirkelfrei ist oder nicht. Wir werden aber sehen, daß für einfache Mengen keine großen Schwierigkeiten auftauchen. Meistens ist vom Definitionsinhalt her klar, ob eine Menge vom Begriff der Zirkelfreiheit unabhängig ist (wie die Nullmenge) oder nicht. Zudem werden einige Theoreme abgeleitet, die es gestatten, auf einfache Weise die Zirkelfreiheit von bestimmten Klassen von Mengen zu bestimmen, insbesondere durch den Nachweis fast aller zu den Axiomen der ZF-Mengenlehre äquivalenten Prinzipien (siehe Abschnitt II.3).

Beispiele: Die *Nullmenge* kann definiert werden durch $\varnothing = \{x \mid \neg(x = x)\}$. Hier ist unmittelbar klar, daß $Def(\varnothing)$ nicht von C abhängt. Auch für die *natürlichen Zahlmengen* und alle *endlichen Ordinalzahlen* ist die Zirkelfreiheit ohne weiteres klar.

Wir werden später beweisen, daß die *Menge* aller zirkelfreien Mengen existiert und zirkelhaft ist, da sie sonst sich selber enthalten müßte (Theorem II.4).

Es mag zunächst befremdlich erscheinen, daß es Mengen gibt, die nicht anders als mit Beziehung auf den Begriff der Zirkelfreiheit definiert werden können, die man also nicht unabhängig davon etwa durch bloßes Aufzählen oder Aufweisen der Elemente bestimmen kann. Es ist jedoch zu bemerken, daß man ebenso auch die Klasse *aller* Mengen nicht durch bloßes Aufzählen oder Aufweisen bestimmen kann, ohne den Begriff des Alles zu benützen, denn sonst könnte die Hinzufügung von neuen Mengen keinen Widerspruch ergeben.

Theorem II.2 *Ist M eine zirkelfreie Menge, so ist jedes Element der transitiven Hülle von M und jedes Element von M ebenfalls eine zirkelfreie Menge und von M verschieden.*

Beweis: Es sei die Menge $M \in \Sigma^*$ zirkelfrei und die Menge N ein Element der transitiven Hülle von M. Damit ist auch $N \in \Sigma^*$ und es gilt $TC(\{N\}) \subset TC(M)$. Jedes Element von $TC(M)$ ist vom Begriff zirkelfrei unabhängig, also auch jedes Element von $TC(\{N\})$. Daher ist N zirkelfrei. Die Menge N ist verschieden von M, weil M in Σ^* liegt. Denn wäre $N = M$, so würde M zu seiner eigenen transitiven Hülle gehören, das heißt in sich selbst wesentlich sein, also wäre $M \notin \Sigma^*$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

II.2 Existenztheoreme

Mit der exakten Bestimmung der Klasse aller zirkelfreien Mengen haben wir eine Grundlage erarbeitet, auf welcher wir einige Eigenschaften zirkelfreier Mengen ableiten können. Dies ist insbesondere von Bedeutung, weil in der Finsler-Mengenlehre nicht jede Gesamtheit von Mengen wieder eine Menge bildet. Es müssen also zusätzliche Kriterien ausgearbeitet werden, die es gestatten, Mengen aus gegebenen Klassen von Mengen zu bestimmen. Ist eine Klasse gegeben, so ist die Zugehörigkeit oder Nicht-Zugehörigkeit irgendwelcher Mengen zu ihr eindeutig bestimmt. Widersprüche sind hier nur möglich in der konkreten Definition einer Klasse.

Falls eine gegebene Klasse K als Menge M aufgefaßt werden soll, das heißt nachgewiesen werden soll, daß sie eine Menge ist, so kommt als einziges neues zu prüfendes Element die Menge M in Betracht. Zum Nachweis der Existenz von M ist es also hinreichend zu untersuchen, ob es eindeutig bestimmt ist, daß M entweder in ihrer eigenen transitiven Hülle enthalten ist oder nicht. Als einziger möglicher Hinderungsgrund für die Existenz der Menge M zeigt sich also die Bestimmtheit oder Nicht-Bestimmtheit ihres Selbstbezuges.

Der letzte Fall kann nur eintreten, wenn die Definition von M einen nicht erfüllbaren Selbstbezug enthält, das heißt insbesondere, wenn sich nicht in eindeutiger Weise deren Zirkelfreiheit oder Zirkelhaftigkeit bestimmen läßt. Dieses Problem entschärft sich wesentlich, wenn man die Untersuchung der Mengen auf den Bereich der zirkelfreien Mengen einschränkt.

Theorem II.3 *Eine Klasse zirkelfreier Mengen ist immer eine zirkelfreie oder zirkelhafte Menge.*

Beweis: Wir beweisen, daß eindeutig bestimmt ist, welche Elemente einer Klasse M von zirkelfreien Mengen die $\in$-Beziehung zu dieser haben, damit wir Theorem I.14 anwenden können. Für alle Elemente der Klasse ist die $\in$-Beziehung schon bestimmt. Wir werden also nur die $\in$-Beziehung für den Fall, daß M eine Menge ist, untersuchen. Die Menge M besteht nur aus zirkelfreien Mengen, daher kann sicher nicht $M \in M$ und M auch kein Element der transitiven Hülle $TC(M)$ sein. Es sei also $M \notin M$ und $M \notin TC(M)$. Kann diese Annahme zu einem Widerspruch führen? Die Menge M ist eine Klasse von zirkelfreien Mengen und ist als Klasse wohldefiniert. Widersprüche können nur auftreten, wenn M vermöge seiner Abhängigkeit vom Begriff zirkelfrei zu sich selbst oder zu $TC(M)$ gehören muß. – Die Möglichkeit, daß M zirkelfrei und zugleich $M \in M$ oder $M \in TC(M)$ ist, ist ausgeschlossen, da $M \in M$ und $M \in TC(M)$ impliziert, daß M zirkelhaft ist. – Die Möglichkeit, daß M zirkelhaft und zugleich $M \in M$ oder $M \in TC(M)$ ist, ist ebenfalls ausgeschlossen, weil M nur aus zirkelfreien Elementen besteht. Also ist tatsächlich $M \notin M$ und $M \notin TC(M)$. – Es ist also eindeutig bestimmt, daß $M \notin M$. Die wegen Theorem I.14 existierende Menge M kann zirkelfrei oder zirkelhaft sein, und ist von jeder in ihrer transitiven Hülle enthaltenen Menge verschieden.

Man kann sich fragen, warum hier das Problem der Russellschen Antinomie nicht auftritt. Betrachten wir dazu die Klasse aller sich selbst nicht enthaltenden zirkelfreien Mengen. Dies ist dieselbe Klasse wie die Klasse C *aller* zirkelfreien Mengen, weil zirkelfreie Mengen sich selbst nicht enthalten. Das Problem der Russell-Klasse, daß sie als (zirkelfreie) *Menge* gemäß dieser Definition genau dann zu sich selbst gehören müßte, wenn sie nicht zu sich selbst gehört, kann hier nicht auftreten, denn es gilt

Theorem II.4 *Die Klasse aller zirkelfreien Mengen ist eine zirkelhafte Menge: C.*

Beweis: Aus Theorem II.3 folgt direkt, daß die Klasse C aller zirkelfreien Mengen eine Menge ist. Sie ist zirkelhaft, weil sie sonst als zirkelfreie Menge sich selbst enthalten müßte.

Wir führen nun den Begriff der Zirkelfreiheit auch für Klassen ein.

Definition Eine *Klasse* heißt *zirkelfrei*, wenn sie nur zirkelfreie Elemente enthält und vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist, das heißt, wenn sie eine Definition hat, die immer dieselbe Klasse bestimmt, unabhängig von jeder Interpretation von zirkelfrei und damit unabhängig von der Interpretation der Menge C.

Hier handelt es sich wieder um eine imprädikative Definition. Ihre Rechtfertigung ergibt sich aus dem folgenden Theorem.

Theorem II.5 *Eine Klasse von zirkelfreien Mengen ist genau dann eine zirkelfreie Menge, wenn sie vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist, das heißt, wenn sie so definiert werden kann, daß die Definition stets dieselbe Klasse liefert, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bestimmt werden.*

Beweis: Es ist klar, daß wenn die Definition $Def(M)$ der Menge M vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist, dies auch für die Definition der Klasse gilt. Jede zirkelfreie Menge ist also eine zirkelfreie Klasse. Sei umgekehrt M eine Klasse von zirkelfreien Mengen. Wegen Theorem II.3 ist sie eine Menge. Alle ihre Elemente sind zirkelfrei, das heißt alle in ihrer

transitiven Hülle enthaltenen Mengen sind zirkelfrei (Theorem II.2). Da sie selbst vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist, ist M eine zirkelfreie Menge.

Theorem II.6 *Jede Teilklasse einer zirkelfreien Klasse ist eine zirkelfreie Klasse.*

Beweis: Sei K eine zirkelfreie Klasse. Um bequemer mit dem Begriff zirkelfrei operieren zu können, betrachten wird die transitive Hülle $TC(K)$ anstatt K. Auch $TC(K)$ ist vom Begriff zirkelfrei unabhängig, weil die Definition der transitiven Hülle vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist. Alle ihre Elemente sind zirkelfrei (Theorem II.2). Daher ist $TC(K)$ eine zirkelfreie Klasse. Ob eine beliebige Klasse T eine Teilklasse von $TC(K)$ ist, ist eindeutig bestimmt. Im weiteren kann T definiert werden, ohne den Begriff zirkelfrei oder zirkelhaft zu benützen, weil $TC(K)$ nur aus zirkelfreien Mengen besteht. Da jede Teilklasse von K auch eine Teilklasse von $TC(K)$ ist, ist das Theorem bewiesen.

Daraus folgt

Theorem II.7 *Jede Klasse von Elementen einer zirkelfreien Menge M ist eine zirkelfreie Teilmenge von M. Jede Teilmenge einer zirkelfreien Menge ist eine zirkelfreie Menge.*

Beweis: Sei T eine Teilklasse der Menge M. Mit Theorem II.6 folgt, daß T zirkelfrei und mit Theorem II.5, daß T eine Menge ist. Also ist T eine zirkelfreie Teilmenge von M.

II.3 Beweise der ZF-Prinzipien für zirkelfreie Mengen

Wir zeigen hier, daß die in Abschnitt I.8 aufgestellen Prinzipien der ZF-Mengenlehre innerhalb des Bereichs der Menge C der zirkelfreien Mengen beweisbare Theoreme darstellen.

Theorem II.8 (0. Existenzprinzip) *Es gibt eine zirkelfreie Menge.*

Beweis: Durch Theorem I.15 ist die Existenz der Nullmenge gesichert. Sie ist die Menge, zu der keine andere Menge die $\in$-Beziehung hat. Aus der Definition $\varnothing :\equiv \{x \mid x \neq x\}$ ergibt sich, daß sie nicht in ihrer transitiven Hülle enthalten ist und nicht vom Begriff zirkelfrei abhängt.

Theorem II.9 (1. Prinzip der Bestimmtheit) *Wenn die zirkelfreien Mengen x und y dieselben Elemente haben, so ist $x = y$.*

Beweis: Theorem I.9.

Theorem II.10 (2. Aussonderungsprinzip) *Wenn x eine zirkelfreie Menge ist und φ eine begriffliche Eigenschaft, so ist die Klasse $[z \mid z \in x \wedge \varphi(z)]$ eine zirkelfreie Menge.*

Beweis: Die Klasse $[z \mid z \in x \wedge \varphi(z)]$ ist wohldefiniert und besteht nur aus zirkelfreien Mengen. Als Teilklasse von x ist sie nach Theorem II.7 eine zirkelfreie Menge.

Theorem II.11 (3. Paarmengenprinzip) *Für die zirkelfreien Mengen x und y gibt es eine zirkelfreie Menge $z = \{x, y\}$, die genau x und y enthält.*

Beweis: Eine zirkelfreie Definition für das Paar aus den zirkelfreien Mengen x und y ist die folgende: Die Klasse, welche nur die Mengen x und y enthält. Daraus folgt, daß $[x, y]$ eine zirkelfreie Klasse ist und nach Theorem II.5 eine zirkelfreie Menge.

Bemerkung: Falls man $x = y$ voraussetzt, so folgt aus dem Paarmengenprinzip und dem Prinzip der Bestimmtheit, daß $\{x, x\} = \{x\}$ immer eine zirkelfreie Menge ist, falls x eine solche ist.

Theorem II.12 (4. Vereinigungsmengenprinzip) *Für jede zirkelfreie Menge X gibt es die zirkelfreie Vereinigung $\bigcup X$, die alle Elemente der Elemente von X enthält.*

Beweis: Die Vereinigung $\bigcup X$ ist eine Teilklasse der transitiven Hülle $TC(X)$ und demzufolge nach den Theorem II.5 und II.6 eine zirkelfreie Menge.

Theorem II.13 (5. Potenzmengenprinzip) *Für jede zirkelfreie Menge x gibt es die zirkelfreie Potenzmenge $y = Pot(x)$, die alle Teilmengen von x enthält.*

Beweis: Nach Theorem II.7 sind alle Teilmengen von x zirkelfrei. Die Klasse aller Teilmengen von x ist eindeutig bestimmt. Der Begriff der Teilmenge von x ist vom Begriff zirkelfrei unabhängig, da jede Teilmenge von x aus Elementen besteht, die, wie x selbst, unabhängig vom Begriff zirkelfrei bestimmt sind. Daher ist $Pot(x)$ nach Theorem II.5 eine zirkelfreie Menge.

Theorem II.14 (6. Unendlichkeitsprinzip) *Es gibt eine zirkelfreie Menge x, welche die leere Menge $\emptyset$ und mit jedem zirkelfreien Element $z \in x$ auch die Menge $z \cup \{z\}$ enthält.*

Beweis: Man betrachte die wohlbestimmte Klasse ω aller *endlichen* Ordinalzahlen:

$$\omega = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}, \mathbf{n+1}, \ldots\}.$$

Die endlichen Ordinalzahlen sind untereinander verschieden und zirkelfrei, da sie nicht in ihrer eigenen transitiven Hülle enthalten sind und vom Begriff zirkelfrei unabhängig definierbar sind. Die Bildung des Nachfolgers $\mathbf{n+1} :\equiv \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\} = \bigcup\{\mathbf{n}, \{\mathbf{n}\}\}$ ist durch das Paarmengenprinzip (für die Einermenge) und das Vereinigungsmengenprinzip garantiert. Als Teilklasse der Menge der zirkelfreien Mengen ist sie nach Theorem II.3 eine Menge und nach Theorem II.5 eine zirkelfreie Menge, da sie als unendliche Menge nicht in ihrer transitiven Hülle enthalten ist sowie ihre Definition nicht vom Begriff zirkelhaft abhängig ist.

Theorem II.15 (7. Ersetzungsprinzip) *Wenn f eine zirkelfreie Funktion der Menge der zirkelfreien Mengen in sich selbst ist, so ist das Bild jeder zirkelfreien Menge X wieder eine zirkelfreie Menge, das heißt $f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$ ist eine zirkelfreie Menge.*

Beweis: Sei f eine Funktion der Menge der zirkelfreien Mengen in sich selbst, die vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist (dabei kann die Funktion f eine Klasse sein). Sämtliche $f(x)$ mit $x \in X$ sind zirkelfrei und es ist eindeutig bestimmt, welche Mengen zu $f[X]$ gehören. Die Funktion f ist vom Begriff zirkelfrei unabhängig und daher auch die Klasse $f[X]$. Aus Theorem II.5 folgt, daß $f[X]$ eine zirkelfreie Menge ist.

(8. Fundierungsprinzip) *Für jede nicht-leere zirkelfreie Menge X gibt es ein zirkelfreies $\in$-minimales Element, das heißt, eine zirkelfreie Menge $x \in X$, sodaß $x \cap X = \emptyset$.*

Für den Bereich der zirkelfreien Mengen gilt im allgemeinen das Fundierungsprinzip nicht, wie die in Theorem II.22 diskutierten Mengen zeigen. Schränkt man die Menge C aller zirkelfreien Mengen durch die Forderung der Fundiertheit ein, so gilt das Fundierungsprinzip *per definitionem*.

Theorem II.16 (9. Auswahlprinzip) *Jede zirkelfreie Menge X, deren Elemente x nicht-leer sind, besitzt eine zirkelfreie Auswahlmenge, das heißt eine zirkelfreie Menge, die aus jedem Element von X genau ein Element enthält und sonst nichts.*

Wir beweisen zuerst eine eingeschränkte Form des Auswahlprinzips, nämlich das Auswahlprinzip für paarweise elementfremde (disjunkte) Elemente.

Theorem II.17 (Auswahlprinzip für elementfremde Elemente) *Ist M eine zirkelfreie Menge, deren Elemente von der Nullmenge verschieden sind und paarweise elementfremd sind, so gibt es mindestens eine zirkelfreie Auswahlmenge, das heißt eine zirkelfreie Menge, welche mit jedem Element von M genau ein Element gemeinsam hat, sonst kein Element enthält und eine Teilmenge der Vereinigung $\bigcup M$ ist.*

Beweis von Theorem II.17: Die Elemente von M sind nicht-leer, also gibt es ein Element x in jedem Element X von M. Ein solches Element von X ist immer unterscheidbar von jedem anderen Element in X (nicht unterscheidbare Mengen sind wegen Axiom II identisch). Wir können also jedem Element X von M ein Element x aus X zugeordnet denken. Diese Zuordnungen sind völlig unabhängig voneinander. Es wird also nichts Unmögliches verlangt, wenn wir sagen: Sei W eine Teilklasse von $\bigcup M$ so, daß aus jedem Element X von M genau ein Element x von X zu W gehört und sonst nichts. Aus Theorem II.7 folgt, daß W eine zirkelfreie Menge ist und zwar eine Auswahlmenge von M.

Das Auswahlprinzip verdankt seinen Namen der Tatsache, daß aus jedem Element von M ein Element sozusagen «gewählt» wird. Meistens wird zuerst der Begriff der Auswahlfunktion definiert.

Definition Eine Funktion $f\colon M \to \bigcup M$ heißt *Auswahlfunktion*, wenn $f(X) \in X$ für jedes Element X der Menge M.

Damit hat das Auswahlprinzip die Form: *Jede Menge von nicht-leeren Mengen hat eine Auswahlfunktion.*

Man beachte, daß eine Zuordnung, die jeder Menge X ein Element $x \in X$ zuordnet, eine Klasse von geordneten Paaren (X, x) ist, das heißt eine Funktion (siehe dazu Abschnitt I.8).

Für die Bestimmung der Auswahlmenge von Mengen wie $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ hilft uns das Theorem II.17 allerdings nicht viel. Dazu braucht man Theorem II.16.

Beweis von Theorem II.16: Wie im Beweis von Theorem II.17 können wir jedem Element X von M ein Element x zugeordnet denken. Zusammen genommen ist die Zuordnung eine Klasse von geordneten Paaren

$$(X, x) :\equiv \{X, \{X, x\}\} = \{X\} \cup \{\{X, x\}\}$$

so, daß $x \in X \in M$. Die Paare $\{X, x\}$ sind Teilmengen von $\bigcup\{M, \bigcup M\}$, also Elemente von

$$Pot(\bigcup\{M, \bigcup M\}).$$

Die geordneten Paare sind dann Paarmengen von Elementen aus

$$M \cup Pot(\bigcup\{M, \bigcup M\}).$$

Die Klasse der geordneten Paare bilden nach Theorem II.7 eine zirkelfreie Teilmenge f dieser Menge, wobei $f = \{ \ldots, (X, x), \ldots \}$ eine Auswahlfunktion ist. Es ist möglich, daß für $X \neq Y$ die Mengen (X, x) und (Y, x) zu f gehören, das heißt die Elemente von M brauchen nicht mehr paarweise elementfremd (disjunkt) zu sein. Damit ist Theorem II.16 bewiesen.

Eine mögliche Auswahl für $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ist die Menge $\{a, b\}$. Damit ist die Existenz einer Auswahlmenge auch bei Mengen mit nicht disjunkten Elementen gesichert.

Das Auswahlaxiom hat eine interessante Geschichte (siehe insbesondere Moore [1982]). Erstmals im Jahre 1904 hat Zermelo es explizit formuliert, um das Wohlordnungstheorem zu beweisen. Sein Beweis stieß auf viel Kritik und Ablehnung, denn man konnte einfach nicht glauben, daß es für alle Mengen, insbesondere für die Menge der reellen Zahlen, eine Wohlordnung geben könne. Im Jahre 1908 bewies Zermelo dasselbe noch einmal, ausgehend von einer Liste von Axiomen für die Mengenlehre von Cantor, den heute sogenannten *Zermeloaxiomen*. Darunter befand sich natürlich auch das Auswahlaxiom.

Das Auswahlaxiom hat viele äquivalente Formen, zum Beispiel: das Lemma von Zorn (zu jeder partiell geordneten Menge, in der jede nicht-leere total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, gibt es ein maximales Element), das Wohlordnungstheorem (in einer total geordneten Menge hat jede nicht-leere Teilmenge ein erstes Element), das Theorem über die Gleichmächtigkeit jeder Menge zu einer Ordinalzahl, das Vergleichbarkeitstheorem für Mengen (für zwei Mengen X, Y ist entweder $X \prec Y$ oder $X \approx Y$ oder $X \succ Y$).

Erst durch Zermelos Untersuchungen und seine explizite Formulierung wurde das Auswahlaxiom jedoch den Mathematikern als notwendige Bedingung vieler Beweise bewußt. Historisch und psychologisch ist interessant, daß viele Mathematiker, welche das Auswahlaxiom in seiner expliziten Form später ablehnten, dieses davor in ihren eigenen Forschungen implizit verwendet hatten (siehe Moore [1982], § 1.7).

Befürworter des Axioms sehen diese Tatsache als ein Hinweis für dessen Gültigkeit an. Viele Mathematiker waren mit Zermelo einverstanden, daß das Axiom unmittelbar evident sowie notwendig ist für die Mathematik (siehe dazu zum Beispiel Läuchli [1979]). Das Lemma von Zorn wird in der Algebra oft verwendet und in der Topologie braucht man die Tatsache, daß ein unendliches Produkt von nicht-leeren Räumen nicht-leer ist. Letzteres beruht auf der Tatsache, daß man aus jedem Raum ein Element auswählen kann.

Einige Logiker, vor allem diejenigen, welche alle auf dem Ideenrealismus beruhenden Überzeugungen ablehnen, haben jedoch große Vorbehalte gegenüber dem Auswahlaxiom. Dies hat damit zu tun, daß das Axiom eine Existenzbehauptung macht: für jede Menge von nicht-leeren Elementen existiert eine Auswahlfunktion, oder: jede solche Menge hat eine Auswahlmenge. Bei den anderen Axiomen der ZF-Mengenlehre entstehen die Mengen, indem die Operationen

$$\{\ ,\ \},\ \bigcup,\ Pot(\ ),\ f[\ ]$$

auf andere Mengen angewendet werden. Die Mengen werden sozusagen konstruiert, letztendlich aus der Nullmenge. Für die Auswahlmengen gibt es keine entsprechende Konstruktion. Nimmt man den psychologischen Tatbestand hinzu, daß Konstruktionen notwendigerweise in einem zeitlichen Nacheinander ablaufen, scheint es problematisch, einfach anzunehmen, daß für überabzählbare Mengen eine Auswahlmenge gefunden oder konstruiert werden könne. Diese Schwierigkeiten verschwinden nur, wenn man die Bestimmung der Auswahlmenge nicht an eine konstruktive Hintereinander-Ausführung bindet, sondern eine Simultanauswahl zuläßt oder eine Wohlordnung der Mengen annimmt. Letzteres wäre natürlich eine *petitio principii*, da das Wohlordnungstheorem zum Auswahlaxiom äquivalent ist.

Im Rahmen der ideenrealistischen Anschauung wie sie hier vertreten wird (siehe Einführung, Abschnitt 1), sind die Mengen schon da, müssen also nicht erst konstruiert, sondern einfach eindeutig und widerspruchsfrei bestimmt werden. Dies gilt insbesondere für die Auswahlmengen. Folglich treten hier die oben diskutierten Probleme nicht auf, da ein in zeitlicher Folge ablaufendes Wählen für die Bestimmung einer Auswahlmenge nicht

notwendig ist. In vielen Fällen taucht bei solchen Überlegungen nur deshalb eine Schwierigkeit auf, weil «Auswahl» ein «bildhafter» Ausdruck ist, der einen zeitlichen Prozeß oder eine konkrete Konstruktion zu suggerieren scheint. – Interessant in diesem Zusammenhang ist ein Aufsatz von Paul Bernays *Über den Platonismus in der Mathematik* [1935], in dem er das Auswahlaxiom «ableitet» aus einem beschränkten Ideenrealismus.

Im Rahmen der Finsler-Mengenlehre ist das Auswahlaxiom (AC) für zirkelfreie Mengen beweisbar (Theorem II.16), aber nicht allgemeingültig für die vollständige Finsler-Mengenlehre (Theorem I.25). Dieser Sachverhalt stimmt überein mit der Überzeugung vieler Mathematiker, daß das Prinzip in vielen Bereichen der Mathematik gilt, jedoch nicht den Anspruch auf universelle Gültigkeit haben kann. Aus der Finsler-Mengenlehre ergibt sich auf natürliche Weise, daß das übliche Vorgehen, wo meist von ZF + AC ausgegangen wird, sinnvoll ist. Finsler konnte darüber hinaus jedoch genauer angeben, in welchem Bereich AC insbesondere nicht gilt, nämlich im Bereich der zirkelhaften Mengen. In der Finsler-Mengenlehre kommt schließlich deutlich zum Ausdruck, wie die Bereiche, in welchen das Auswahlaxiom gilt oder nicht gilt, miteinander zusammenhängen.

II.5 Spezielle zirkelfreie und zirkelhafte Mengen

Wir betrachten einige besondere zirkelfreie und zirkelhafte Mengen.

Theorem II.18 *Die Klasse C aller zirkelfreien Mengen ist eine unendliche zirkelhafte Menge.*

Beweis: Sei $f: C \to C$ definiert durch $f(M) = \{M\}$. Dann ist f eine Bijektion auf eine echte Teilmenge von C. Die Einermenge existiert als Folge des Paarmengenprinzips für zirkelfreie Mengen (Theorem II.11) und es gibt sicher ein Element in M, das nicht im Bild $f[M]$ liegt, nämlich die Nullmenge $\varnothing$. Die Menge C ist zirkelhaft wegen Theorem II.4.

Aus Theorem II.18 folgt die Existenz einer unendlichen Menge zirkelfreier Mengen, die aber selbst zirkelhaft ist. Eine unendliche Menge zirkelfreier Mengen, die selbst *nicht* zirkelhaft ist, ist die Menge der natürlichen Zahlmengen.

Theorem II.19 *Die Klasse der natürlichen Zahlmengen ist eine unendliche zirkelfreie Menge.*

Beweis: Man betrachte die natürlichen Zahlmengen

$$0 :\equiv \varnothing,\ 1 :\equiv \{\varnothing\},\ 2 :\equiv \{1\},\ 3 :\equiv \{2\},\ \dots,\ n+1 :\equiv \{n\},\ \dots .$$

Sie sind offensichtlich zirkelfrei. Aus dem Paarmengenprinzip und dem Prinzip der Bestimmtheit folgt, daß jede natürliche Zahlmenge n tatsächlich einen Nachfolger $\{n, n\} = \{n\}$ hat. Die Klasse der natürlichen Zahlmengen

$$\mathbf{N} = [0, 1, 2, \dots, n, \dots]$$

ist daher unendlich, da es eine Bijektion f der natürlichen Zahlmengen auf eine Teilmenge ihrer selbst gibt mit $f(n) = \{n\}$, bei der die Nullmenge sicher nicht in der Bildmenge von f liegt. Als Klasse von zirkelfreien Mengen ist die Klasse aller natürlichen Zahlmengen sicher eine Menge (Theorem II.3). Sie ist zirkelfrei, da sie erstens nicht in ihrer transitiven Hülle enthalten ist (alle natürlichen Zahlmengen enthalten jeweils nur ein Element) und

zweitens alle Begriffe und deren Beziehungen, die zur Definition der natürlichen Zahlmengen und ihrer Klasse verwendet werden, nicht vom Begriff zirkelfrei abhängen.

Theorem II.20 (a) *Die Mächtigkeit der Potenzmenge Pot(C) der Menge aller zirkelfreien Mengen C ist größer als die Mächtigkeit von C: Pot(C)* $\succ$ *C.*
(b) *Die Mächtigkeit der Allmenge A ist größer als die Mächtigkeit der Menge C aller zirkelfreien Menge: A* $\succ$ *C.*
(c) *Die Mächtigkeit der Menge C aller zirkelfreien Mengen ist größer als die Mächtigkeit jeder zirkelfreien Menge F: C* $\succ$ *F.*
(d) *Für jede zirkelfreie Menge F ist die Mächtigkeit der Potenzmenge Pot(F) größer als die Mächtigkeit der Menge F: Pot(F)* $\succ$ *F.*

Beweis: (a) Wir nehmen an, es gäbe eine surjektive Abbildung $f\colon C \to Pot(C)$ und definieren die auf C eingeschränkte «Diagonalmenge»

$$z = \{x \mid x \in C \text{ und } x \notin f(x)\} \subset C.$$

Dies ist offenbar eine Klasse von zirkelfreien Mengen, also nach Theorem II.3 eine Menge. Die Menge z kann aber nicht zum Bild $f[C]$ gehören. Denn nehmen wir an, daß $f(y) = z$, dann gilt $y \in z$ genau dann, wenn $y \notin f(y)$ mit $f(y) = z$. Aus diesem Widerspruch folgt, daß es keine surjektive Abbildung $f\colon C \to Pot(C)$ geben kann. Also ist $Pot(C) \succ C$. – (b) und (c) werden analog wie (a) bewiesen. – (d) Beweis mit Hilfe des Aussonderungsprinzips (Theorem II.10) gemäß dem ZF-Beweis von Abschnitt I.10.1.

Aus den Theoremen II.18 und II.20 folgt unmittelbar

Theorem II.21 *Es existieren unendliche Mengen mit absolut verschiedenen Mächtigkeiten.*

Die im folgenden Theorem konstruierten Mengen gehen auf Mirimanoff zurück. Sie heissen deshalb auch *Mirimanoff-Mengen.*

Theorem II.22 *Es gibt zirkelfreie, unfundierte Mengen. Solche Mengen können die Nullmenge in ihrer transitiven Hülle enthalten, müssen dies aber nicht.*

Beweis: Man betrachte die abzählbar vielen Mengen $M_0, M_1, M_2, \ldots$, die durch die Bestimmung festgelegt sind, daß die natürliche Zahlmenge n und die Menge M_{n+1} für jedes n die Beziehung $\in$ genau zu der Menge M_n besitzen sollen, sodaß

$$M_n = \{n, M_{n+1}\}.$$

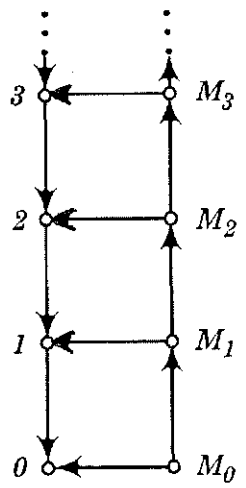
Die aus den Mengen $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ bestehende Klasse genügt den Axiomen **I** und **II** und es ist kein Element in seiner eigenen transitiven Hülle enthalten. Da alle diese Mengen vom Begriff zirkelfrei unabhängig sind, so ist die Menge $\{M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots\}$ zirkelfrei und zudem nicht fundiert, denn es gilt (Figur II.1):

$$\ldots \in M_n \in \ldots \in M_2 \in M_1 \in M_0.$$

Die transitive Hülle dieser Menge ist die zirkelfreie und fundierte Menge

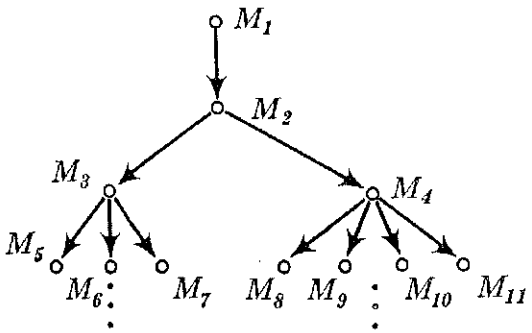
$$\{0, 1, 2, \ldots n, \ldots, M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots\},$$

die jedoch eine unfundierte Teilmenge besitzt.



Figur II.1

Es gibt auch zirkelfreie unfundierte Mengen, bei denen die Nullmenge $\varnothing$ nicht in der transitiven Hülle enthalten ist. Eine solche aus zirkelfreien Elementen gebildete Menge $\{M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots\}$ ist in Figur II.2 dargestellt. Jede der Mengen M_n hat hier n Elemente. Damit ist Theorem II.22 bewiesen.



Figur II.2

Nicht jede fundierte Menge ist zirkelfrei, denn es gilt

Theorem II.23 *Es gibt fundierte Menegn, die zirkelhaft sind.*

Beweis: Die zirkelhafte Menge C aller zirkelfreien Mengen und die zirkelhafte Menge E aller zirkelfreien Ordinalzahlen (siehe Theorem II.27(c)) sind fundiert, denn sie enthalten die Nullmenge.

Theorem II.24 (a) *Die Klasse K_t aller transitiven Mengen ist eine nicht-transitive Menge mit $K_t \notin K_t$.*
(b) *Die Klasse K_{nt} aller nicht-transitiven Mengen ist eine nicht-transitive Menge mit $K_{nt} \in K_{nt}$.*
(c) *Die Klasse K_{tz} aller transitiven zirkelfreien Mengen ist eine nicht-transitive zirkelhafte Menge mit $K_{tz} \notin K_{tz}$.*
(d) *Die Klasse K_{ntz} aller nicht-transitiven zirkelfreien Mengen ist eine nicht-transitive zirkelhafte Menge mit $K_{ntz} \notin K_{ntz}$.*

Beweis: Für die Beweise von (a) und (b) genügt es, die eindeutige Bestimmtheit der $\in$-Beziehung der jeweiligen Mengen zu sich selbst zu untersuchen. – (a) Wir zeigen, daß K_t Mengen enthält, deren Elemente nicht transitiv sind, also kann nicht $K_t \in K_t$ sein. Zum Beispiel ist die (zirkelfreie) Menge $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$ transitiv, aber deren Element $\{\{0\}\}$ nicht. Nun ist $\{\{0\}\} = 2 \in \{0, 1, 2\} \in K_t$, aber $2 \notin K_t$. – (b) Die Menge $\{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$ ist eine nicht-transitive (zirkelfreie) Menge, denn es ist $\mathbf{1} \in \mathbf{2}$, aber $\mathbf{1} \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$, also ist $\{\mathbf{0}, \mathbf{2}\} \in K_{nt}$. Weiter ist $\mathbf{1} \notin K_{nt}$, daher ist K_{nt} nicht-transitiv, also $K_{nt} \in K_{nt}$. – (c) Mit Theorem II.3 folgt, daß K_{tz} eine Menge ist. Mit dem Gegenbeispiel von (a) folgt, daß sie nicht transitiv sein kann, also nicht in ihrer transitiven Hülle enthalten sein kann. Da ihre Definition wesentlich vom Begriff zirkelfrei abhängt, ist sie trotzdem zirkelhaft. – (d) Mit Theorem II.3 folgt, daß K_{ntz} eine Menge ist. Sie kann nicht zirkelfrei sein, sonst würde sie sich selbst enthalten. Sie ist also zirkelhaft, und es ist $K_{ntz} \notin K_{ntz}$. Mit dem Gegenbeispiel von (b) folgt, daß K_{ntz} nicht-transitiv ist.

Theorem II.25 (a) *Wenn die Menge M zirkelfrei ist, so ist $TC(M)$ eine zirkelfreie Menge.*
(b) *Wenn die Menge M transitiv ist, so ist $TC(M)$ eine Menge und es ist $TC(M) \in TC(M)$ nur dann, wenn $M \in M$.*
(c) *Es sei A die Allmenge und C die Menge aller zirkelfreien Mengen. Dann ist*

(i) $TC(K_t) = A$.
(ii) $TC(K_{nt}) = A$.
(iii) $TC(K_{tz}) = C$.
(iv) $TC(K_{ntz}) = C$.

(d) *Für $M \in \Sigma^*$ ist $TC(M)$ eine Menge.*

Beweis: (a) Alle Elemente von $TC(M)$ sind zirkelfrei, ebenso die Definition von $TC(M)$, also ist dies eine zirkelfreie Menge gemäß Theorem II.5. – (b) Wenn M transitiv ist, so ist $M = TC(M)$. Daraus folgt, daß $TC(M) \in TC(M)$ nur dann, wenn $M \in M$. – (c) (i) Die Inklusion $TC(K_t) \subset A$ ist trivial. Wenn $M \in A \in K_t \subset TC(K_t)$, so ist $M \in TC(K_t)$, denn $TC(K_t)$ ist eine transitive Klasse. Daraus ergibt sich $TC(K_t) = A$ und $TC(K_t)$ ist sogar eine Menge, die sich selbst enthält. (ii) Die Inklusion $TC(K_{nt}) \subset A$ ist trivial. Sei nun $M \in A$; für $M \neq \emptyset$ ist $\{M\}$ nicht transitiv. Aus $M \in \{M\} \in TC(K_{nt})$ folgt $M \in TC(K_{nt})$ und $\emptyset$ ist ohnehin in $TC(K_{nt})$. Daher ist $A \subset TC(K_{nt})$; und folglich ist $A = TC(K_{nt})$. (iii) Die Inklusion $TC(K_{tz}) \subset C$ ist trivial. Sei $M \in C$, dann ist $TC(\{M\}) \in K_{tz}$. Nun ist $M \in TC(\{M\}) \in TC(K_{tz})$, also $M \in TC(K_{tz})$; daher ist $TC(K_{tz}) = C$. (iv) Die Inklusion $TC(K_{ntz}) \subset C$ ist trivial. Sei $M \in C$, dann gilt für $M \neq \emptyset$ sicher $\{M\} \in K_{ntz}$. Aus $M \in \{M\} \in TC(K_{ntz})$ folgt $M \in TC(K_{ntz})$; weiter ist auch $\emptyset \in TC(K_{ntz})$. Also ist $TC(K_{ntz}) = C$. – (d) Offenbar sind die Elemente von $TC(M)$ nicht in ihrer eigenen transitiven Hülle enthalten, insbesondere ist $TC(M) \notin TC(TC(M)) = TC(M)$.

Bemerkung: Es ist nicht bekannt, ob $TC(M)$ für *jede* Menge M eine Menge ist.

Theorem II.26 (a) *Die Potenzmenge $Pot(K_t)$ der Menge K_t aller transitiven Mengen ist nicht transitiv: $Pot(K_t) \in K_{nt}$.*
(b) *Die Potenzmenge $Pot(K_{nt})$ der Menge K_{nt} aller nicht-transitiven Mengen ist nicht-transitiv: $Pot(K_{nt}) \in K_{nt}$.*

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $Pot(K_t)$ und $Pot(K_{nt})$ keine transitiven Menge sind. – (a) Da $\{0, 1, 2\}$ transitiv ist, gilt $\{0, 1, 2\} \in \{\{0, 1, 2\}\} \in Pot(K_t)$ aber $\{0, 1, 2\} \notin Pot(K_t)$. Denn $2 = \{\{0\}\}$ ist nicht transitiv, also ist $\{0, 1, 2\} \not\subset K_t$ und damit ist $Pot(K_t)$ nicht transitiv. – (b) Die Zahlmenge $2 = \{\{0\}\}$ ist nicht transitiv, also ist $2 \in \{2\} \in Pot(K_{nt})$, aber $2 \notin Pot(K_{nt})$. Denn $1 = \{0\}$ ist transitiv, also ist $\{1\} = 2 \not\subset K_{nt}$. Hieraus folgt, daß $Pot(K_{nt})$ nicht transitiv ist.

Theorem II.27 (a) *Die Klasse der endlichen Ordinalzahlen ist eine zirkelfreie und abzählbare unendliche Ordinalzahl: $\omega \equiv \omega_0$.*
(b) *Die Klasse der endlichen und abzählbaren Ordinalzahlen ist eine zirkelfreie und nicht abzählbare Ordinalzahl: ω_1.*
(c) *Die Klasse aller zirkelfreien Ordinalzahlen ist die erste zirkelhafte Ordinalzahl: E.*
(d) *Die Klasse Ω aller Ordinalzahlen ist keine Menge.*
(e) *Die Klasse aller Ordinalzahlen, welche einen Nachfolger haben, ist die letzte und größte zirkelhafte Ordinalzahl: O.*

Beweis: (a) Zusammen mit Theorem II.14 bleibt nur noch die Unendlichkeit der Menge ω zu zeigen. Dies folgt aber aus der Unendlichkeit jeder induktiven Menge vermöge der Bijektion $f(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$ von ω auf eine Teilmenge ihrer selbst, bei der die Nullmenge nicht in der Bildmenge $f[\omega]$ liegt. Die Menge ω ist eine Ordinalzahl, denn sie ist transitiv und wohlgeordnet. – (b) Wir betrachten die kleinste abzählbare Ordinalzahl ω und die Folge aller ihrer abzählbaren Nachfolger $\omega + \mathbf{1}$, $\omega + \mathbf{2}$, ... , wobei

$$\omega + (\mathbf{n} + \mathbf{1}) :\equiv (\omega + \mathbf{n}) \cup \{\omega + \mathbf{n}\}.$$

Wir betrachten die Menge $\omega_1 :\equiv \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \omega, \omega + \mathbf{1}, \omega + \mathbf{2}, \ldots, \omega\cdot\mathbf{2}, \omega\cdot\mathbf{3}, \ldots, \omega^{\mathbf{2}}, \ldots\}$ der endlichen und abzählbaren Ordinalzahlen. Wäre diese Menge eine abzählbare Ordinalzahl, so wäre ihr Nachfolger $\omega_1 \cup \{\omega_1\}$ ebenfalls eine abzählbare Ordinalzahl, im Widerspruch zur Definition von ω_1 als die Menge *aller* abzählbaren Ordinalzahlen. Aufgrund ihrer Definition ist ω_1 sicher zirkelfrei und transitiv. – (c) Die Klasse E aller zirkelfreien Ordinalzahlen ist wohlbestimmt und transitiv. Sie kann keine zirkelfreie Menge sein, denn sonst müßte sie sich selbst enthalten. Also ist sie eine zirkelhafte Menge und nicht in ihrer transitiven Hülle enthalten. Damit ist sie zugleich fundiert und wohlgeordnet, also eine zirkelhafte Ordinalzahl. Sie ist die erste zirkelhafte Ordinalzahl, da alle ihre Vorgänger nach Definition zirkelfrei sind. – (d) Theorem I.23. – (e) Aus Theorem I.24 ergibt sich, daß die Klasse aller Ordinalzahlen, welche einen Nachfolger haben, eine Menge, genauer die größte oder letzte Ordinalzahl O ist. Diese Menge enthält sich selbst nicht und ist nicht in ihrer transitiven Hülle enthalten, ist jedoch trotzdem zirkelhaft. Denn wenn sie zirkelfrei wäre, so hätte sie gemäß Theorem II.12 (Vereinigungsmengenprinzip) einen Nachfolger.

II.6 Kardinalzahlen

Die natürlichen Zahlen haben zwei wichtige Aspekte, wenn es um ihr Verhältnis zu sich selbst oder zu anderen mathematischen Objekten geht, nämlich die Anzahl und die Ordnung. Die *Anzahl* kommt in Betracht, wenn es um die Frage geht: wieviele Elemente x einer bestimmten Eigenschaft aus einer Menge von mathematischen Objekten gibt es? Zum Beispiel hat die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ vier Elemente und die Menge $\{x \mid x^2 - 13x + 22 = 0\}$ zwei Elemente und damit gleichviele Elemente wie $\{a, b\}$ wenn $a \neq b$. Die *Ordnung* kommt in Betracht, wenn es um die Frage geht: das wievielte Element in einer wohlbestimmten Folge von mathematischen Objekten ist das Element x? Zum Beispiel ist 13 die 6. Primzahl oder 16 ist die 3. Potenz der Zahl 2 oder die natürliche Zahlmenge $3 = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ entsteht durch die dreimalige Anwendung der Einerklassen-Operation $\{\ \}$ auf die Nullmenge $\varnothing$.

Die Kardinalzahlen und die Ordinalzahlen sind Verallgemeinerungen des Anzahl- bzw. Ordnungsaspektes in den Bereich des Transfiniten oder Unendlichen.

Wir geben im folgenden einige Hinweise auf die Behandlung von Kardinalzahlen in der Finsler-Mengenlehre, ohne in irgendeinem Sinne Vollständigkeit anzustreben, weder bei den Definitionen noch bei den Ableitungen der Eigenschaften. Es handelt sich weitgehend um Standardmaterial der modernen Mengenlehre, insbesondere um den Hintergrund für den Beweis der Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl (Theorem II.29).

Der Begriff der Mächtigkeit kann unbeschränkt auf alle Mengen angewendet werden, da er sich nur auf den Begriff der bijektiven Funktion stützt. Dies legt folgende Definition nahe:

Definition Eine *Kardinalzahl* einer Menge X ist ein mathematisches Objekt $|X|$, sodaß

$$|X| = |Y| \text{ genau dann, wenn } X \approx Y.$$

Für die endlichen Ordinalzahlen ist dann einfach $|\mathbf{n}| = \mathbf{n}$. Für Bereiche von Mengen, bei welchen das Auswahlprinzip gilt, wie im Bereich C aller zirkelfreien Mengen, können wir die folgende Definition benützen, da die Wohlordnung mit dem Auswahlprinzip äquivalent ist.

Definition Die *Kardinalzahl* $|X|$ einer Menge X ist bestimmt durch

$$|X| = \bigcap\{\alpha \mid \alpha \approx X \text{ und } \alpha \text{ Ordinalzahl}\}.$$

Die Alephs $\aleph$ formen die *Standardkardinalzahlen* aus den ordinalen Anfangszahlen gemäß

$$\aleph_\alpha :\equiv |\omega_\alpha|.$$

In C hat jede Menge M ein Aleph $\aleph_\alpha$, da das Auswahlprinzip die Vergleichbarkeit aller Mengen impliziert sowie die Tatsache, daß jede Menge M gleichmächtig ist zu einer ordinalen Anfangszahl ω_α, das heißt $M \approx \omega_\alpha$. In C gilt auch $|\omega_\alpha| = \omega_\alpha$.

Definition *Ordnung* $<$ der Kardinalzahlen:

$$|X| \leq |Y| \text{ genau dann, wenn } X \preceq Y,$$

$$|X| < |Y| \text{ genau dann, wenn } X \prec Y.$$

Man kann im Unendlichen rechnen, fast wie mit den gewöhnlichen Zahlen, wenn man die Operationen festlegt durch:

$$|X| + |Y| \quad :\equiv |X \times \{\mathbf{0}\} \cup Y \times \{\mathbf{1}\}|,$$

$$|X| \cdot |Y| \quad :\equiv |X \times Y|,$$

$$|X|^{|Y|} \quad :\equiv |X^Y|.$$

Dabei ist $X^Y = \{f \mid f\colon Y \to X\}$. Mit diesen Definitionen können wir das Theorem von Cantor folgendermaßen formulieren:

Theorem von Cantor $|X| < 2^{|X|} = |Pot(X)|$.

Mit der Gültigkeit des Auswahlprinzips können auch unendliche Summen und Produkte gebildet werden:

$$\textstyle\sum_{i \in I} |X_i| \quad :\equiv |\bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}|,$$

$$\textstyle\prod_{i \in I} |X_i| \quad :\equiv |\prod_{i \in I} X_i|.$$

In der Praxis beschränken wir uns auf die Menge C aller zirkelfreien Mengen, wenn wir von Kardinalzahlen sprechen. Außerhalb C ist es nur in beschränktem Umfange möglich, in sinnvoller Weise Kardinalzahlen einzuführen (sowohl E wie O sind zirkelhafte Ordinalzahlen, siehe Abschnitt II.5). Anschaulich ist klar, daß es schwierig ist, einen Anzahlbegriff einzuführen für Mengen ohne Wohlordnung, das heißt in Klassen, für welche das Auswahlprinzip nicht allgemeingültig ist.

II.7 Unerreichbare Kardinalzahlen

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff der unerreichbaren Kardinalzahl und beweisen, daß die Kardinalzahl κ der ersten zirkelhaften Ordinalzahl E, $\kappa = |E| = E$, eine unerreichbare Kardinalzahl ist.

Definition Die *Kofinalität* $cf(\alpha)$ einer Ordinalzahl α ist die kleinste Limesordinalzahl β derart, daß es eine monoton wachsende β-Folge $\langle \alpha_\xi < \alpha \mid \xi < \beta \rangle$ gibt mit $lim_{\xi \to \beta}\, \alpha_\xi = \alpha$.

Definition Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *regulär*, wenn $cf(\kappa) = \kappa$, und *singulär*, wenn $cf(\kappa) < \kappa$.

Zum Beispiel sind $\aleph_0$ und alle $\aleph_{\alpha+1}$ regulär, $\aleph_\omega$ ist singulär. Die singuläre Kardinalzahl $\aleph_\omega$ ist eine *singuläre Limeskardinalzahl*. Reguläre Limeskardinalzahlen heißen auch *schwach unerreichbare* Kardinalzahlen.

In der ZF-Mengenlehre sind die großen Kardinalzahlen, insbesondere die unerreichbaren, von weitreichender Bedeutung. Jech [1978], p. 22, schreibt sogar dazu: «Most of set theory is practically the study of infinite cardinals.» Ein großer Teil der modernen Forschung der letzten Jahrzehnte im Bereich der Mengenlehre beschäftigte und beschäftigt sich mit verschiedenen Typen von großen Kardinalzahlen (siehe dazu etwa Kanamori [1994]).

Definition Eine Kardinalzahl κ heißt (stark) *unerreichbar*, wenn gilt:
(i) κ ist regulär, das heißt $cf(\kappa) = \kappa$,
(ii) für alle Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ ist $2^\lambda < \kappa$.

Der Name «unerreichbar» stammt davon her, daß κ nicht erreichbar ist mit den üblichen Operationen der ZF-Prinzipien, insbesondere nicht mit der Potenzoperation, denn für unerreichbare Kardinalzahlen κ gilt: aus $\lambda < \kappa$ folgt $2^\lambda < \kappa$.

Für schwach unerreichbare Kardinalzahlen gibt es auch folgende zur oben erwähnten Definition äquivalente Definition (dabei ist λ^+ der Nachfolger von λ):

Definition Eine Kardinalzahl κ heißt *schwach unerreichbar*, wenn gilt:
(i) κ ist regulär, das heißt $cf(\kappa) = \kappa$,
(ii) für alle Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ ist $\lambda^+ < \kappa$.

Daraus ergibt sich leicht, daß jede (stark) unerreichbare Kardinalzahl auch schwach unerreichbar ist.

Zum besseren Verständnis der Kofinalität unerreichbarer Kardinalzahlen kann das folgende Theorem über singuläre Kardinalzahlen dienen. Es besagt, daß eine singuläre Kardinalzahl in weniger kleinere Stücke zerlegt werden kann. Offenbar ist dies dann für reguläre Kardinalzahlen nicht möglich.

Theorem II.28 *Eine unendliche Kardinalzahl κ ist singulär genau dann, wenn es eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ und eine Klasse $[S_\xi \mid \xi < \lambda]$ von Teilmengen von κ gibt, sodaß $|S_\xi| < \kappa$ für jedes $\xi < \lambda$ und $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$. (Die kleinste Kardinalzahl λ, welche dieser Forderung genügt, ist gerade die Kofinalität $cf(\kappa)$ von κ.)*

Beweis: Jech [1978], pp. 27–28.

Jetzt schauen wir uns die zirkelhafte Menge aller zirkelfreien Ordinalzahlen an, das heißt die erste zirkelhafte Ordinalzahl E (siehe Theorem II.27(c)).

Theorem II.29 *Die erste zirkelhafte Ordinalzahl E ist eine unerreichbare Kardinalzahl.*

Beweis: Es sei $\kappa = |E| = \bigcap\{\alpha \mid \alpha \approx E\} = E$. (i) κ ist unendlich und kann nicht singulär sein, da jede Vereinigung $\bigcup\{ S_\xi \mid \xi < \lambda < \kappa\}$ mit $|S_\xi| < \kappa$ zirkelfrei sein muß und κ selbst zirkelhaft ist. Daher ist κ regulär. (ii) Sei nun $\lambda < \kappa$. Dann ist $Pot(\lambda)$ eine zirkelfreie Menge; sie ist gleichmächtig mit einer zirkelfreien Ordinalzahl, also eine zirkelfreie Kardinalzahl. Deswegen muß $2^\lambda = |Pot(\lambda)| < \kappa$ sein, da κ die erste zirkelfhafte Kardinalzahl ist. Aus (i) und (ii) ergibt sich, daß κ unerreichbar ist.

In der ZF-Mengenlehre kann die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen nicht bewiesen werden. Sogar die relative Widerspruchsfreiheit der Annahme, es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl κ, ist unbeweisbar (siehe dazu Jech [1978], § 10). Solche Zahlen sind deshalb für die ZF-Mengenlehre tatsächlich nicht erreichbar (außer durch zusätzliche Axiome) und scheinen wie einem sehr weit entfernten «Niemandsland» anzugehören.

In der Finsler-Mengenlehre dagegen handelt es sich bei der ersten zirkelhaften Ordinalzahl um eine absolut (das heißt nicht nur bezüglich irgendwelcher Konstruktionen) unerreichbare Kardinalzahl, die jedoch zum Bereich aller Mengen dazugehört. Es offenbart sich hier am Rande des Bereichs der zirkelfreien Mengen ein in sich strukturiertes Gebiet von zirkelhaften Mengen, zu welchen zum Beispiel die Menge $\kappa = E$ gehört.

II.8 Cantor-Mengenlehre

In Anbetracht von Finslers Intention, die Cantorsche Mengenlehre zu begründen und zu rechtfertigen, wollen wir die Beschränkung der Finsler Mengenlehre auf die zirkelfreien und fundierten Mengen *Cantor-Mengenlehre* nennen.

Theorem II.30 *Die Klasse aller zirkelfreien und fundierten Mengen ist eine zirkelhafte und fundierte Menge, die sich selbst nicht enthält.*

Beweis: Die Klasse F aller zirkelfreien und fundierten Mengen ist eindeutig bestimmt. Als Menge aufgefaßt, kann sie jedoch nicht zirkelfrei sein, denn sonst enthielte sie sich selbst, wäre damit unfundiert, im Widerspruch zu ihrer Definition. Als zirkelhafte Menge enthält F somit sich selbst nicht. Wäre die Menge F unfundiert, so müßte sie entweder eine in ihrer eigenen transitiven Hülle enthaltene Menge enthalten oder eine zirkelfreie unfundierte Menge. Beides ist jedoch nicht möglich.

Ein Axiomensystem für die Cantor-Mengenlehre kann durch geeignete Ergänzung der Axiome der Finsler-Mengenlehre aufgestellt werden.

Axiome der Cantor-Mengenlehre:

Axiom I (Bestimmtheit) *Für jede Menge ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die Beziehung* $\ni$ *hat.*

Axiom II (Identität) *Mengen sind immer dann identisch, wenn die Annahme ihrer Identität nicht zu einem Widerspruch führt.*

Axiom C (Cantor-Bedingung) *Mengen sind zirkelfrei und fundiert.*

Axiom $\mathbf{III_C}$ (Vollständigkeit) *Ein mathematisches Objekt ist eine Menge immer dann, wenn die Annahme, es sei eine Menge, nicht zu einem Widerspruch mit den Axiomen* ***I, II*** *und* ***C*** *führt.*

Wie aus Abschnitt II.3 hervorgeht, können alle ZF-Prinzipien aus den Axiomen **I**, **II**, **C** und $\mathbf{III_C}$ der Cantor-Mengenlehre abgeleitet werden. Damit erbt die Cantor-Mengenlehre als Teilsystem der Finsler-Mengenlehre die Widerspruchsfreiheit. Das Axiomensystem ist wegen Theorem I.16, das sich leicht auf die Axiome **I**, **II**, **C** und $\mathbf{III_C}$ übertragen läßt, monomorph und damit vollständig.

Die Annahme der Existenz einer «Cantor-Allmenge» führt in der Cantor-Mengenlehre auf Schwierigkeiten. Zum Beispiel gibt das Aussonderungsprinzip für die Eigenschaft «x ist Menge und x enthält sich nicht als Element» zur paradoxen Russellschen Menge Anlaß und das auf die Menge aller zirkelfreien und fundierten Mengen angewendete Theorem von Cantor produziert eine Menge von höherer Mächtigkeit als diese selbst. Im weiteren müßte die «Cantor-Allmenge» sich selbst als Element enthaltenden, und wäre damit eine unfundierte (und zirkelhafte) Menge. Diese Schwierigkeiten sind nicht verwunderlich, denn gemäß Theorem II.30 ist die «Cantor-Allmenge» zirkelhaft, gehört also nicht zu den Mengen der Cantor-Mengenlehre.

Theorem I.13 läßt sich ebenfalls auf die Axiome der Cantor-Mengenlehre übertragen, falls man die Gruppe der Axiome **I**, **II** durch die Axiomengruppe **I**, **II**, **C** ersetzt und somit eine zu $\mathbf{III_C}$ äquivalente Tatsache erhält. Hiermit werden auch die Überlegungen zur

prinzipiellen Nicht-Symbolisierbarkeit der Finsler-Mengenlehre auf die Cantor-Mengenlehre übertragbar, wenn man die Bedingungen der Fundiertheit und Zirkelfreiheit hinzufügt.

Theorem II.31 *Die Klasse der zirkelfreien und fundierten Mengen erfüllt die ZF-Prinzipien.*

Beweis: Abschnitt II.3.

Da es nur *eine* das Axiomensystem **I**, **II**, **C** und $\mathbf{III_C}$ erfüllende Klasse von Mengen gibt, kann es hier kein Theorem nach der Art des absteigenden (oder aufsteigenden) Theorems von Löwenheim-Skolem geben, wonach es zu jedem in der Prädikatenlogik erster Stufe symbolisierten Axiomensystem ein Modell mit nur abzählbar vielen Elementen gibt. Dieser Tatsache steht außerdem die Nicht-Symbolisierbarkeit der Axiome **I**, **II**, **C** und $\mathbf{III_C}$ im Wege wie auch die wegen Theorem II.27(b) überabzählbare Unendlichkeit der Klasse aller zirkelfreien fundierten Mengen. Es gibt demzufolge im Rahmen der Axiome **I**, **II**, **C** und $\mathbf{III_C}$ der Cantor-Mengenlehre keine nichtintendierten (abzählbaren) Nichtstandardmodelle, das heißt keine elementar äquivalenten, zueinander nicht-isomorphen Modelle.

Damit gibt es in der Cantor-Mengenlehre absolut unterschiedliche unendliche Mächtigkeiten und nicht bloß relative unterschiedene (abzählbare) Mächtigkeiten, deren Verschiedenheit nur durch die Nicht-Symbolisierbarkeit der entsprechenden Bijektionen garantiert ist (Skolemsches Paradoxon).

II.9 Mengen-Darstellungen natürlicher Zahlen

Die natürlichen Zahlmengen bilden *eine* Mengen-Darstellung natürlicher Zahlen. Wir zeigen dies, indem wir die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlmengen sowie die endlichen Ordinalzahlen nachweisen.

Definition *Natürliche Zahlmengen.*

(i) $0 :\equiv \emptyset$ ist eine natürliche Zahlmenge.

(ii) Wenn n eine natürliche Zahlmenge ist, so ist auch ihr Nachfolger $n + 1 :\equiv \{n\}$ eine natürliche Zahlmenge.

(iii) Es gibt keine weiteren natürlichen Zahlmengen.

Im Abschnitt II.5 (Theorem II.19) haben wir gezeigt, daß die natürlichen Zahlmengen zirkelfreie Mengen sind, und daß die Klasse **N** der natürlichen Zahlmengen eine zirkelfreie unendliche Menge ist. Diese Mengen sind offenbar auch fundiert.

Die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen lauten folgendermaßen:

P1 Die natürliche Zahl 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

P2 Sind die Nachfolger zweier natürlicher Zahlen gleich, so sind sie selbst gleich.

P3 (*Axiom der vollständigen Induktion*) Für jede Eigenschaft φ von natürlichen Zahlen gilt: Hat 0 die Eigenschaft φ und hat für jede natürliche Zahl n, welche die Eigenschaft φ hat, auch der Nachfolger die Eigenschaft φ, so hat jede natürliche Zahl die Eigenschaft φ.

Theorem II.32 *Für die natürlichen Zahlmengen gelten die Peano-Axiome.*

Beweis: Aus dem Axiom der Bestimmtheit folgt sofort die Gültigkeit der Axiome **P1** und **P2**, denn aus $\{n\} = 0$ folgt, daß n keine Menge sein kann, denn die Nullmenge 0 hat keine Elemente, und aus $\{m\} = \{n\}$ folgt $m = n$. Im weiteren gilt auch **P3**, denn sei $M = [n \in \mathbf{N} \mid \varphi(n)]$ die Klasse aller natürlichen Zahlmengen n mit der Eigenschaft φ. Wegen des Aussonderungsprinzips (Theorem II.10) ist dies eine Menge. Falls nun 0 zu dieser Menge gehört, und mit jeder natürlichen Zahlmenge n auch deren Nachfolger $n + 1$, so muß gemäß Definition der natürlichen Zahlmengen die Menge **N** der natürlichen Zahlmengen gleich M sein, da M keine anderen Mengen enthalten kann.

Auf entsprechende Weise kann man die endlichen Ordinalzahlen definieren:

Definition *Endliche Ordinalzahlen.*

(i) $\mathbf{0} :\equiv \varnothing$ ist eine endliche Ordinalzahl.

(ii) Wenn $\mathbf{n}$ eine endliche Ordinalzahl ist, so ist auch ihr Nachfolger $\mathbf{n} + 1 :\equiv \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$ eine endliche Ordinalzahl.

(iii) Es gibt keine weiteren endlichen Ordinalzahlen.

Im Abschnitt II.3 (Theorem II.14) haben wir gezeigt, daß die endlichen Ordinalzahlen zirkelfrei sind und die Klasse der endlichen Ordinalzahlen eine zirkelfreie Menge ist, die wegen Theorem II.27(a) unendlich ist. Alle diese Mengen sind auch fundiert.

Theorem II.33 *Für die endlichen Ordinalzahlen gelten die Peano-Axiome.*

Beweis: Aus dem Axiom der Bestimmtheit folgt sofort die Gültigkeit des Axioms **P1**, denn aus $\mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\} = \bigcup\{\mathbf{n}, \{\mathbf{n}\}\} = \mathbf{0}$ folgt, daß $\mathbf{n}$ keine Menge sein kann, denn die Nullmenge $\mathbf{0}$ hat keine Elemente. Im weiteren gilt auch **P3**, denn sei $M = [\mathbf{n} \mid \varphi(\mathbf{n})]$ die Klasse aller endlichen Ordinalzahlen $\mathbf{n}$ mit der Eigenschaft φ. Wegen des Aussonderungsprinzips (Theorem II.10) ist dies eine Menge. Falls nun $\mathbf{0}$ zu dieser Menge gehört, und mit jeder endlichen Ordinalzahl $\mathbf{n}$ auch deren Nachfolger $\mathbf{n} + 1$, so muß gemäß Definition der endlichen Ordinalzahlen die Menge ω der endlichen Ordinalzahlen identisch mit M sein, da M keine anderen Mengen enthalten kann. Der Beweis von **P2**, das heißt, daß aus $\mathbf{m} \cup \{\mathbf{m}\} = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$ folgt $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, ist etwas aufwendiger und kann etwa Halmos [1968], Kapitel 12, entnommen werden.

Damit haben wir zwei verschiedene Mengen-Darstellungen der durch die Peano-Axiome festgelegten natürlichen Zahlen gewonnen. Für eine Philosophie der Mathematik auf der Grundlage des Ideenrealismus stellt dies kein Problem dar, denn die natürlichen Zahlen sind als solche wohlbestimmt und nicht mit ihren Mengen-Darstellungen zu verwechseln.

Auf dieser Grundlage lassen sich in der üblichen Weise Addition, Multiplikation und die Ordnung der Mengen-Darstellungen natürlicher Zahlen (als endliche Ordinalzahlen) definieren und darauf aufbauend die Paar-Darstellung der ganzen Zahlen über den natürlichen Zahlen und weiter die Paar-Darstellung rationaler Zahlen über den ganzen Zahlen. Schließlich werden die Mengen-Darstellungen der reellen Zahlen zum Beispiel definiert durch Cauchy-Folgen oder Dedekind-Schnitte über den rationalen Zahlen.

RÜCKBLICK UND AUSBLICK: MATHEMATIK UND MENGENLEHRE

1. Hierarchien von Mengenlehren

Die Finsler-Mengenlehre wurde hier soweit entwickelt, wie es zur widerspruchsfreien Begründung der Ordinal- und Kardinalzahlentheorie notwendig ist. Die weitere Entwicklung der Theorie der zirkelfreien und fundierten Mengen – der Cantor-Mengenlehre – kann im wesentlichen an die Tradition der nicht-axiomatischen Mengenlehre anknüpfen sowie an die Entwicklung der modernen ZF-Mengenlehre. Viele Theoreme der letzteren können ohne weiteres übernommen werden.

Mit der Untersuchung zirkelhafter Mengen im allgemeinen muß Neuland betreten werden. Sie bilden eine echte Erweiterung der üblichen ZF-Mengenlehre und gehen weit über die kumulative Hierarchie hinaus, wie etwa die unerreichbaren Kardinalzahlen. Über diesen Bereich ist bisher sehr wenig bekannt. Mit einer entwickelten Theorie zirkelhafter Mengen hat man eine Theorie sehr großer Mengen sowie ein Instrument, mit welchem Eigenschaften solcher Mengen (wie die verschiedenen Axiome für große Kardinalzahlen) strukturiert und entschieden werden können. Denn im Rahmen der Finsler-Mengenlehre gibt es keine prinzipiell unentscheidbaren Propositionen.

Für die genaue Erfassung des Systems der zirkelfreien Mengen sind insbesondere diejenigen zirkelhaften Mengen interessant, welche als Elemente nur zirkelfreie Mengen haben. Sie bilden gewissermaßen die Grenze des mehr oder weniger überschaubaren Bereichs der zirkelfreien Mengen zum Bereich der zirkelhaften Mengen. Auch hier sind erst wenig Ergebnisse bekannt, wie etwa die Zirkelhaftigkeit der Menge aller zirkelfreien Mengen, sowie die Zirkelhaftigkeit und Unerreichbarkeit der Menge aller zirkelfreien Ordinalzahlen.

Der Bereich der zirkelfreien unfundierten Mengen, die sogenannte «kleine Finsler-Mengenlehre» hat bereits einige Bearbeitung erfahren, insbesondere für endliche und erblich-endliche Mengen (siehe Booth [1996b]) sowie auch durch eine allgemeine Theorie im Rahmen eines logischen Kalküls (siehe Aczel [1988]). Auch hier befindet man sich in einem die übliche ZF-Mengenlehre weit über- und unterschreitenden Bereich von Mengen, der noch viel unbearbeitetes Terrain bietet sowie weitere Einsichten zur genaueren Eingrenzung der Cantor-Mengenlehre bereit hält.

2. Mengenlehre und Begründungsfragen der Mathematik

Die Finsler-Mengenlehre und ihr Teilgebiet der Cantor-Mengenlehre erheben nicht den Anspruch, eine Begründung oder ein Fundament für die gesamte Mathematik zu liefern. Sie bilden ein eigenes Gebiet innerhalb des Gedankenbereiches der Mathematik, nämlich das Gebiet der gesetzmäßigen Beziehungen *von reinen* Mengen. Sie ist zwar ein in vielen Bereichen der Mathematik wichtiges, ja unentbehrliches Darstellungs- und Hilfsmittel, hat jedoch in erster Linie eine selbständige Bedeutung. Obwohl praktisch alle mathematischen Objekte als Mengen dargestellt werden können, ist es insbesondere nicht sinnvoll, die in ihr

oder durch sie zum Ausdruck gebrachten *Begriffsinhalte* durch deren Mengen-Darstellungen zu ersetzen.

Vom Gesichtspunkt des Ideenrealismus aus ist die Ersetzung oder Eliminierung mathematischer Begriffe durch ihre Mengen-Darstellungen nicht sinnvoll, sogar widerspruchsvoll, da die mathematischen Begriffe einen in sich selbst bestimmten Inhalt haben, der von jeder Darstellung und jedem Ausdruck dieses Inhaltes deutlich unterscheidbar ist. Dies gilt insbesondere für mathematische Grundbegriffe wie Funktion, Zahl, Gruppe, topologischer Raum, Ordnung, Körper, Ring, etc.

In diesem Sinne wird zum Beispiel der Funktionsbegriff für die Finsler-Mengenlehre vorausgesetzt und nicht durch sie erst begründet oder gesichert. Er beinhaltet eine *begriffliche Zuordnung* (oder eine Beziehung, Relation) eines Bereichs A unterscheidbarer, aber nicht näher bestimmter mathematischer Objekte a zu einem zweiten solchen Bereich B von Objekten b sodaß *jedem* a aus A *ein* b aus B entspricht. Hier liegt der Grund, weshalb in der Finsler-Mengenlehre im Umkreis des Axioms **II** ohne weitere Schwierigkeiten der Begriff der Isomorphie verwendet werden kann.

Selbstverständlich besitzt die Mengendarstellung mathematischer Objekte ihre eigene Eleganz und Geschlossenheit. Sie offenbart einen Zusammenhang dieser Objekte untereinander, der sich anderweitig vielleicht nur schwer erschließt. Es zeigt sich dann jedoch nur ein ausgewählter Aspekt und die Mengenlehre erscheint wie eine Art Korsett, in das alles hineingepreßt wird. So sehen in der Mengenlehre alle natürlichen Zahlen im wesentlichen gleich aus, obwohl sie verschiedene qualitative Eigenschaften (wie Teilbarkeit etc.) haben. Zudem hat die sich in der Mengendarstellung zeigende Einheit der Mathematik ihre Ursache nicht in dieser Darstellung. Vielmehr ist die Einheit der mathematischen Begriffe und deren sachgemäßer Zusammenhang untereinander die Vorbedingung ihrer einheitlichen Erscheinungsweise im Kleid der Mengenlehre.

Falls man unter einer philosophischen Begründung der Mathematik den Bezug und die Einordnung des mathematischen Denkens und der mathematischen Begriffe in das Gebiet des Denkens bzw. der Ideen überhaupt versteht, so bedarf die Mengenlehre, wie jedes andere Gebiet der Mathematik, einer eigenen philosophischen Begründung. Diese wird im wesentlichen darin bestehen, den Übergang von der intensionalen zur extensionalen Auffassung der Lehre von den Begriffsinhalten sowie der Lehre von den Begriffsumfängen ins Auge zu fassen. Dies bedeutet konkreter, daß der Übergang von der (nicht-symbolisierten) Propositions- und Prädikatenlogik zur Klassenlogik bis hin zur Mathematisierung (genauer: nicht-symbolische Axiomatisierung) von Klassen und Mengen untersucht werden muß. Dabei wird es für den hier vertretenen Ansatz entscheidend sein, die Prädikatenlogik in sachgemäßer Weise mit einer Denklehre in ideenrealistischem Sinne zu verbinden.

Da die Mengenlehre für die übrige Mathematik keinen begründenden Charakter hat, ist allerdings mit ihrer philosophischen Begründung noch keine solche Begründung anderer Gebiete der Mathematik oder gar der Mathematik als Ganzes geleistet.

Dies sind jedoch Aufgaben einer umfassenden *Philosophie der Mathematik auf ideenrealistischer Grundlage* und überschreitet den Rahmen der vorliegenden mathematischen Untersuchung.

ANHANG:
OFFENE PROBLEME DER FINSLER-MENGENLEHRE

Beweise oder widerlege:

- Die Mächtigkeit jeder zirkelhaften Menge aus zirkelfreien Elementen ist größer als die Mächtigkeit jeder zirkelfreien Menge.
- Für jede Menge M ist die transitive Hülle $TC(M)$ eine Menge (siehe Theorem II.25).
- Die Allmenge A ist die einzige Menge X mit $X = Pot(X)$.
- Die zirkelhafte Menge O aller Ordinalzahlen mit einem Nachfolger ist eine unerreichbare Kardinalzahl.
- *Kontinuumshypothese*: Jede unendliche Teilmenge der reellen Zahlen **R** hat entweder die Mächtigkeit von **R** oder von **N**. (Dies ist im Rahmen der zirkelfreien Mengen, wegen der Gültigkeit des Auswahlprinzips, äquivalent zu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.)
- Das Axiom der abhängigen Auswahl (dependent choice, DC) ist allgemeingültig.
- Jede Menge, die Element einer Klasse ist, welche die ZF-Prinzipien von Abschnitt I.8 erfüllt, ist zirkelfrei.
- Alle in ZF äquivalenten Formen des Auswahlprinzips (AC) sind auch äquivalent in der Finsler-Mengenlehre (bzw. im Teilbereich der Cantor-Mengenlehre).

Probleme und Fragen:

- Finde Mengen außer der J-Menge, die gemäß Theorem I.14 existieren können, aber nicht müssen.
- Finde weitere zirkelhafte Ordinalzahlen zwischen E und O.
- Finde weitere unerreichbare Kardinalzahlen.
- Gibt es meßbare, kompakte, superkompakte, etc. Kardinalzahlen?
- Können in der Finsler-Mengenlehre Kardinalzahlen nur mit dem Fundierungsprinzip, ohne Verwendung des Auswahlprinzips, definiert werden?
- Welche zirkelhaften Mengen haben eine Kardinalzahl?
- Welche zirkelhaften Mengen haben eine Auswahlmenge?
- Welche zirkelhaften Mengen haben eine Vereinigungsmenge?
- Wie sieht die kumulative Hierarchie aus, wenn man die J-Menge hinzufügt und bezüglich aller erlaubten Mengen-Operationen abschließt?

LITERATURVERZEICHNIS

Aczel, Peter [1988], *Non-Well-Founded Sets*. Stanford: Center for the Study of Language and Information (CSLI lecture notes; No. 14).

Ackermann, Wilhelm [1956], Zur Axiomatik der Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, Band 131, S. 336–345.

Bachmann, Heinz [1967], *Transfinite Zahlen*. Berlin-Heidelberg: Springer (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 1).

Baer, Reinhold [1928], Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift*, Band 27, S. 536–539.

Bakker, Arthur [1995], *Ultrapowers without the Axiom of Choice*. (Diplomarbeit, Universität von Amsterdam).

Barwise, Jon / Moss, Larry [1991], Hypersets. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 13, No. 4, pp. 31–41.

Bernays, Paul [1970], Über den Platonismus in der Mathematik. In *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, S. 62–78.

Booth, David [1996a], Introduction to Foundational Part. In Booth/Ziegler [1996], pp. 85–102.

– [1996b], Introduction to Combinatorial Part. In Booth/Ziegler [1996], pp. 213–214.

– [1996c], The Combinatorics of Non-Well-Founded Sets. In Booth/Ziegler [1996], pp. 215–240.

Booth, David / Ziegler, Renatus [1996], *Finsler Set Theory: Platonism and Circularity*. Basel: Birkhäuser.

Breger, Herbert [1992], A Restoration that Failed: Paul Finsler's Theory of Sets. In: D. Gillies (ed.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Clarendon, pp. 249–264.

Burckhardt, Johann Jakob [1938], Zur Neubegründung der Mengenlehre. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Band 48, S. 146–165.

– [1939], Zur Neubegründung der Mengenlehre. Folge. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Band 49, S. 146–155.

Dedekind, Richard [1918], *Was sind und was sollen die Zahlen*? Braunschweig: Vieweg (4th ed.).

Devlin, Keith [1993], Non-Well-Founded Set Theory. In *The Joy of Sets*, Fundamentals of Contemporary Set Theory, New York: Springer, pp. 143–184.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter [1994], *Einführung in die Mengenlehre*. Mannheim: Bibliographisches Institut (3. Auflage).

Ebbinghaus, Heinz-Dieter / Flum, Jörg / Thomas, Wolfgang [1992], *Einführung in die mathematische Logik*. Mannheim: Bibliographisches Institut (3. Auflage).

Finsler, Paul [1975], *Aufsätze zur Mengenlehre* (hrsg. von G. Unger). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Fraenkel, Abraham / Bar-Hillel, Yehoshua / Levy, Azriel [1973], *Foundations of set theory*. Amsterdam/New York/Oxford: North Holland (2nd edition).

Gödel, Kurt [1995], *Unpublished Philosophical Essays* (ed. by Francisco A. Rodriguez-Consuegra). Basel: Birkhäuser.

Hallett, Michael [1984], *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon (Oxford Logic Guides, Vol. 10).

Halmos, Paul R. [1968], *Naive Mengenlehre*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht (Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, Band 6)

Jech, Thomas [1978], *Set Theory*. New York: Academic Press (Pure and Applied Mathematics).

Kanamori, Akihiro [1994], *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Berlin-Heidelberg: Springer (Perspectives in Mathematical Logic).

Kreisel, Georg [1954], (Review). *Mathematical Reviews*, Vol. 15, p. 670.

Kunen, Kenneth [1980], *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam: North-Holland (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 102).

Läuchli, Hans [1962], Auswahlaxiom in der Algebra. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 37, S. 1–18.

Maddy, Penelope [1988a], Believing the Axioms I. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 53, pp. 481–511.

– [1988a], Believing the Axioms II. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 53, pp. 736–764.

Moore, Gregory H. [1982], *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. New York: Springer (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciendes, Vol. 8).

Quine, Willard V. O. [1980], New Foundations for Mathematical Logic. In: *From a Logical Point of View*. Cambridge: Harvard University Press (second, revised edition).

Rubin, Herman / Rubin, Jean [1963], *Equivalents of the Axiom of Choice*. Amsterdam: North-Holland.

Unger, Georg [1975], Vorwort des Herausgebers zu Paul Finslers *Aufsätze zur Mengenlehre*. In: Finsler [1975], S. XI-XVI.

– [1978], Die Rettung der natürlichen Logik. Die Leistung Paul Finslers. In: *Die Rettung des Denkens*, (Stuttgart: Freies Geistesleben 1978, 2. erweiterte Auflage 1989), S. 22–34.

Ziegler, Renatus [1992], *Mathematik und Geisteswissenschaft*. Mathematische Einführung in die Philosophie als Geisteswissenschaft in Anknüpfung an Plato, Cusanus, Goethe, Hegel und Steiner. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum.

– [1995], *Selbstreflexion. Studien zur Selbstbeziehbarkeit im Denken und Erkennen*. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum.

– [1996a], Introduction to Philosophical Part. In Booth/Ziegler [1996], pp. 3–13.

– [1996b], Prinzipielle Grenzen der Symbolisierbarkeit: Die Finslerschen Sätze. *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz*, Nr. 183, 1996, S. 18–24.

– [1996c], Mathematik als Geisteswissenschaft, *Elemente der Naturwissenschaft*, Heft 64, 1996(1), S. 1–22.

– [1996d], *Zur Natur der Zahlen*. Mathematische, logische und erkenntniswissenschaftliche Untersuchungen im Umkreis der Gesetzmäßigkeiten natürlicher Zahlen. Dornach: Mathematisch-Astronomische Sektion am Goetheanum. Unveröffentlichtes Manuskript.

INDEX

Symbole

$\ni$ 9; 12; 33
$\in$ 9; 33
$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ 9
$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots$ 9
Σ 12
Σ_M 12
$TC(M)$ 18
Σ^* 33
$\cup M$ 22
$Pot(M)$ 22
$\prec$ 25
$\approx$ 25
Ω 28
χ_{zf} 33
$cf(\alpha)$ 46

Begriffe

A (Allklasse) 11
A (Allmenge) 5; 7; 26; 29; 33; 42
  Potenzmenge 26
A (Allmenge) 24; 27
Alle 4; 19
Alle 5; 9
Antinomie 4
  Burali-Forti 7
  Russellsche 4; 36
Aussonderungsprinzip 22; 37
Aussonderungsprinzip 27
Auswahlaxiom 6; 7; 40; 41
Auswahlaxiom für Klassen 18
Auswahlfunktion 39
Auswahlprinzip 25; 38; 41
Auswahlprinzip 23; 29; 45
Axiom der vollständigen Induktion 49
Axiomatik
  klassische nicht-symbolische 3
  modellfreie 21
  symbolische 3
Axiome der Cantor-Mengenlehre 48
  Monomorphie oder Kategorizität 48
  Vollständigkeit 48
Axiome der Finsler-Mengenlehre 9
  Bestimmtheit 12
  Identität 14
  Monomorphie oder Kategorizität 21
  Unabhängigkeit 21
  Vollständigkeit 19
  Vollständigkeit 21
  Widerspruchsfreiheit 20
Axiome der Finsler-Mengenlehre 6
Axiome der ZF-Mengenlehre 22

Begriffe, reine 11
Begriffsbestimmung, zirkelhafte 5
Bernays, Paul 3
Beweistechnik 20

C (Menge aller zirkelfreien Mengen) 36; 41; 42
Cantor, Georg 3
Cantor, Georg 3
Cantor-Mengenlehre 7; 31; 48
  Axiome 48
Cantorsches Diagonalverfahren 26

Dedekind, Richard 6

E (erste zirkelhafte Ordinalzahl) 44; 47
Einerklasse 11; 24
Einermenge 24
Einsmenge 9
Entscheidbarkeit, prinzipielle 16
Ersetzungsprinzip 23; 29; 38
Ersetzungsprinzip 27
Existenz 4
Existenzprinzip 22; 37
Existenzprinzip 24
Extensionalitätsprinzip 11

Finslersche Unvollständigkeitstheoreme 31
Fraenkel, Abraham 3
Fundierungsaxiom 6

Fundierungsprinzip 23; 27; 38
Funktion 14; 24; 52
mengentheoretische Darstellung 24

Geordnetes Paar 24
Gleichmächtig 25
Gödel, Kurt 3
Gödel, Kurt 4; 5

Hegel, Georg Wilhelm Friedrich 6
Hilbert, David 3; 6

Ideenrealismus 7; 40
Ideenrealismus 3; 4; 5; 8; 9; 15; 19; 21; 52
Identitätsgesetz 17
Identitätsrelation als dreistellige Relation 15
Interpretation von zirkelfrei
Variation 34
Interpretation von zirkelfrei 33

J-Menge 10; 15; 20; 33

Kardinalzahl 25; 28; 45
Definition 45
große 5
große 51
größte 7
Ordnung 46
reguläre 46
schwach unerreichbare 47
singuläre 46
Standardkardinalzahlen 46
unerreichbare 7; 47
Kategorizität 6
Ketten, nichtabbrechende 23
Ketten, nichtabbrechende 6
Klasse
Durchschnitt 11; 18
Element 10
Teilklasse 10
transitive 12
Vereinigung 11
Vereinigung 16; 18
zirkelfreie 36
Klasse 10
Klassen 3
Klassenidentitätsprinzip 11
Klassenlogik 11
Komprehensionsprinzip 4
Konsistenzbeweis
absoluter siehe Widerspruchsfreiheit
relativer 7
Konstruierbarkeit 4; 40
Kontinuum 6
Kontinuumshypothese 5

Lemma von Zorn 40
Limitation of size 5
Logik
nicht-symbolische 3
nicht-symbolische 4; 11; 17; 52
symbolische 3; 7; 30

Mächtigkeit 25; 42
absolute 49
Mathematische Objekte 3; 14; 21
Mathematische Objekte 17
Maximalforderung 19
Maximalprinzip 5
Menge
abzählbare 25
Auswahlmenge 23; 29; 40
Auswahlmenge 40
Dedekind-unendlich 25
Definierbarkeit 34
Element 12
endliche 25
fundierte 23
große 5
identische Mengen 14
induktive 24; 25
isomorphe Mengen 14
leere 9
minimales Element 23
minimales Element 23
Potenzmenge 22
reine 9
reine 6
transitive 12; 43
transitive Hülle 18; 44
transitive und zirkelfreie 43
überabzählbare 25
unendliche 6; 7; 25
unfundierte 3
Vereinigungsmenge 22; 27
wesentlich 12; 18
wohlgeordnete 27
zirkelfreie 6
zirkelfreie 6; 33; 51
zirkelhafte 5
zirkelhafte 33
Mengendarstellungen 17
Mengenlehre
Ackermann 8
Aczel (non-well-founded sets) 8
Aczel (non-well-founded sets) 6

Neumann-Bernays-Gödel 3
New Foundations 3
Minimalprinzip 14
Mirimanoff-Mengen 42
Modelltheorie, symbolische 17; 21
Monomorphie 6

Neumann, John von 3
New Foundations 7
Nichtstandardmodelle 49
Nichtstandardmodelle 17
Nicht-Symbolisierbarkeit der Cantor-Mengenlehre 49
Nicht-Symbolisierbarkeit der Finsler-Mengenlehre 5; 30
Non-well-founded sets siehe Mengenlehre, Aczel
Nullklasse 11
Nullmenge 9; 20
Nullmenge 35; 37

O (größte zirkelhafte Ordinalzahl) 44
Ordinalzahl 12
Anfangszahlen 28
Definition 28
endliche 9; 10; 20; 25; 44; 50
endliche 35
größte 7; 27; 28
Klasse aller Ordinalzahlen 28
Kofinalität 46
Limesordinalzahl 28
Limesordinalzahl 46
Menge aller Ordinalzahlen mit
Nachfolger 7; 28
Nachfolger 28
Ordnungsrelation 28
unendliche und zirkelfreie 44
zirkelhafte 44
Ordinalzahl 7

Paarmengenprinzip 22; 37
Paarmengenprinzip 24
Peano-Axiome 49
Platonismus 3
Potenzmengenprinzip 22; 38
Potenzmengenprinzip 24
Prädikatenlogik erster Stufe siehe Logik, symbolische

Unvollständigkeit 4
Prinzip der Bestimmtheit 22; 37
Prinzip der Bestimmtheit 24

Quine, Willard van Orman 3

Relation 24
Russell, Bertrand 5
Russell-Klasse 11; 36
Russell-Klasse 9; 26; 29

Satz vom ausgeschlossenen Dritten 4
Selbstbeziehung 35
Selbstbeziehung 5
Skolem, Thoralf 3
Skolemsches Paradoxon 49

Transitive Hülle 18

Unendlichkeit, schlechte 7
Unendlichkeitsaxioms 6
Unendlichkeitsprinzip 22; 24; 38

Vereinigungsmengenprinzip 22; 29; 38
Vereinigungsmengenprinzip 27
Vollständigkeit 6; 7

Wesentlichtkeit einer Menge siehe Menge, wesentlich
Widerspruchsfreiheit 6
Widerspruchsfreiheit 4; 6; 7
Widerspruchsfreiheit impliziert Existenz 4; 19
Wohlordnung 40; 45
Wohlordnungstheorem 40

Zahlen, natürliche 10; 49
Zahlmengen, natürliche 9; 10; 20; 35; 49
Klasse aller natürlichen Zahlmengen 41
Nachfolger 41
Zahlmengen, natürliche 6
Zermelo, Ernst 3; 6; 40
ZF-Mengenlehre 3; 6; 7; 22; 47; 51
Cantorsches Theorem 26
Kumulative Hierarchie 23
ZF-Mengenlehre 34
Zirkelfehlerprinzip 5
Zyklen 23

institute for logic, language and computation

ILLC Research Reports and Technical Notes

Coding for Reports and Dissertations: *Series-Year-Number*, with LP = Logic, Philosophy and Linguistics; ML = Mathematical Logic and Foundations; CT = Computation and Complexity Theory; X = Technical Notes; DS = Dissertations. All previous ILLC-publications are available from the ILLC bureau. For prepublications before 1994, contact the bureau.

CT-95-01 Marianne Kalsbeek, Yuejun Jiang *A Vademecum of Ambivalent Logic*

CT-95-02 Leen Torenvliet, Marten Trautwein *A Note on the Complexity of Restricted Attribute-Value Grammars*

CT-95-03 Krzysztof Apt, Ingrid Luitjes *Verification of Logic Programs with Delay Declarations*

CT-95-04 Paul Vitányi *Randomness*

CT-95-05 Joeri Engelfriet *Minimal Temporal Epistemic Logic*

CT-95-06 Krzysztof Apt, Rachel Ben-Eliyahu *Meta-variables in Logic Programming, or the Praise of Ambivalent Syntax*

CT-95-07 Frans Voorbraak *Combining Unreliable Pieces of Evidence*

CT-96-01 Peter van Emde Boas *The Convenience of Tilings*

LP-95-01 Marten Trautwein *Assessing Complexity Results in Feature Theories*

LP-95-02 S.T. Baban, S. Husein *Programmable Grammar of the Kurdish Language*

LP-95-03 Kazimierz Świrydowicz *There exist exactly two Maximal Strictly Relevant Extensions of the Relevant Logic R^**

LP-95-04 Jaap van der Does, Henk Verkuyl *Quantification and Predication*

LP-95-05 Nataša Rakić *Past, Present, Future and Special Relativity*

LP-95-06 David Beaver *An Infinite Number of Monkeys*

LP-95-07 Paul Dekker *The Values of Variables in Dynamic Semantics*

LP-95-08 Jaap van der Does, Jan van Eijck *Basic Quantifier Theory*

LP-95-09 Jeroen Groenendijk, Marin Stokhof, Frank Veltman *Coreference and Modality*

LP-95-10 Jeroen Groenendijk, Martin Stokhof, Frank Veltman *Coreference and Contextually Restricted Quantification*

LP-96-01 Renate Bartsch *Understanding Understanding*

LP-96-02 David Beaver *Presupposition*

LP-96-03 Theo M.V. Janssen *Compositionality*

LP-96-04 Reinhard Muskens, Johan van Benthem, Albert Visser *Dynamics*

LP-96-05 Dick de Jongh, Makoto Kanazawa *Angluin's Theorem for Indexed Families of R.E. Sets and Applications*

LP-96-06 François Lepage, Serge Lapierre *The Functional Completeness of 4-value Monotonic Protothetics*

LP-96-07 Frans Voorbraak *Probabilistic Belief Expansion and Conditioning*

LP-96-08 John Case *The Power of Vacillation in Language Learning*

LP-96-09 Jaap van der Does, Willem Groeneveld and Frank Veltman *An Update on* Might

LP-96-10 Jelle Gerbrandy and Willem Groeneveld *Reasoning about Information Change*

LP-96-11 Renate Bartsch *Propositional Attitudes in Dynamic Conceptual Semantics*

LP-96-12 Paul Dekker *Reference and Representation*

LP-96-13 Rens Bod *Data-Oriented Language Processing: An Overview*

LP-96-14 Michiel van Lambalgen, Jaap van der Does *A Logic of Vision*

ML-95-01 Michiel van Lambalgen *Randomness and Infinity*

ML-95-02 Johan van Benthem, Giovanna D'Agostino, Angelo Montanari, Alberto Policriti *Modal Deduction in Second-Order Logic and Set Theory*

ML-95-03 Vladimir Kanovei, Michiel van Lambalgen *On a Spector Ultrapower of the Solovay Model*

ML-95-04 Hajnal Andréka, Johan van Benthem, István Németi *Back and Forth between Modal Logic and Classical Logic*

ML-95-05 Natasha Alechina, Michiel van Lambalgen *Generalized Quantification as Substructural Logic*

ML-95-06 Dick de Jongh, Albert Visser *Embeddings of Heyting Algebras (revised version of ML-93-14)*

ML-95-07 Johan van Benthem *Modal Foundations of Predicate Logic*

ML-95-08 Eric Rosen *Modal Logic over Finite Structures*

ML-95-09 Hiroakira Ono *Decidability and Finite Model Property of Substructural Logics*

ML-95-10 Alexei P. Kopylov *The Undecidability of Second Order Linear Affine Logic*

ML-96-01 Domenico Zambella *Algebraic Methods and Bounded Formulas*

ML-96-02 Domenico Zambella *On Forcing in Bounded Arithmetic*

ML-96-03 Hajnal Andréka, Johan van Benthem & István Németi *Modal Languages and Bounded Fragments of Predicate Logic*

ML-96-04 Kees Doets *Proper Classes*

ML-96-05 Søren Riis *Count(q) versus the Pigeon-Hole Principle*

ML-96-06 Angelo Montanari, Alberto Policriti *A Decidable Theory of Finitely-Layered Metric Temporal Structures*

ML-96-07 Angelo Montanari, Adriano Peron, Alberto Policriti *Decidable Theories of ω-Layered Metric Temporal Structures*

ML-96-08 Johan van Benthem, Angelo Montanari, Giovanna D'Agostino, Alberto Policriti *Modal Deduction in Second-Order Logic and Set Theory - II*

ML-96-09 Angelo Montanari, Maarten de Rijke *Decidability in Metric Temporal Logic*

ML-96-10 Vladimir Kanovei *On a Dichotomy related to Colourings of Definable Graphs in Generic Models*

ML-96-11 Domenico Zambella *Forcing in Finite Structures (revised version of ML-96-02)*

ML-96-12 Jon Barwise and Johan van Benthem *Interpolation, Preservation, and Pebble Games*

ML-96-13 Lex Hendriks *Intuitionistic Propositional Logic with only Equivalence has no Interpolation*

X-95-01 Sophie Fischer, Leen Torenvliet *The Malleability of TSP_{2Opt}*

X-96-01 Ingmar Visser *Mind Rules: a Philosophical Essay on Psychological Rules and the Rules of Psychology*

X-96-02 Arthur Bakker, Renatus Ziegler *Finsler-Mengenlehre*

DS-95-01 Jacob Brunekreef *On Modular Algebraic Protocol Specification*

DS-95-02 Andreja Prijatelj *Investigating Bounded Contraction*

DS-95-03 Maarten Marx *Algebraic Relativization and Arrow Logic*

DS-95-04 Dejuan Wang *Study on the Formal Semantics of Pictures*

DS-95-05 Frank Tip *Generation of Program Analysis Tools*

DS-95-06 Jos van Wamel *Verification Techniques for Elementary Data Types and Retransmission Protocols*

DS-95-07 Sandro Etalle *Transformation and Analysis of (Constraint) Logic Programs*

DS-95-08 Natasha Kurtonina *Frames and Labels. A Modal Analysis of Categorial Inference*

DS-95-09 G.J. Veltink *Tools for PSF*

DS-95-10 Giovanna Cepparello *Studies in Dynamic Logic*

DS-95-11 W.P.M. Meyer Viol *Instantial Logic. An Investigation into Reasoning with Instances*

DS-95-12 Szabolcs Mikulás *Taming Logics*

DS-95-13 Marianne Kalsbeek *Meta-Logics for Logic Programming*

DS-95-14 Rens Bod *Enriching Linguistics with Statistics: Performance Models of Natural Language*

DS-95-15 Marten Trautwein *Computational Pitfalls in Tractable Grammatical Formalisms*

DS-95-16 Sophie Fischer *The Solution Sets of Local Search Problems*

DS-95-17 Michiel Leezenberg *Contexts of Metaphor*

DS-95-18 Willem Groeneveld *Logical Investigations into Dynamic Semantics*

DS-95-19 Erik Aarts *Investigations in Logic, Language and Computation*

DS-95-20 Natasha Alechina *Modal Quantifiers*

DS-96-01 Lex Hendriks *Computations in Propositional Logic*

DS-96-02 Angelo Montanari *Metric and Layered Temporal Logic for Time Granularity*

DS-96-03 Martin H. van den Berg *Some Aspects of the Internal Structure of Discourse: the Dynamics of Nominal Anaphora*

DS-96-04 Jeroen Bruggeman *Formalizing Organizational Ecology*