JUPITER, Vol. 2 (2007), ISSN 1661-8750
Verlag am Goetheanum, Dornach/Switzerland

Rudolf Steiner und die Berechnung der Unendlichkeit

Renatus Ziegler

Zusammenfassung. Gemäss eigenem Zeugnis spielte für Rudolf Steiners eigenen geistigen Entwicklungsgang die synthetische projektive Geometrie eine herausragende Rolle. Demgemäss legte er grossen Wert darauf, dass die Exaktheit und Wirklichkeitsgemässheit der durch diese Geometrie nahegelegten Raumanschauung sich bis in die Berechenbarkeit unendlich ferner Elemente nachweisen lässt. Mit elementaren Mitteln wird dieser Sachverhalt hier dargestellt.
Keywords. Rudolf Steiner, synthetische projektive Geometrie, unendlich ferne Elemente, Berechenbarkeit, homogene Koordinaten.

Einführung

Rudolf Steiner spricht öfters über die Tatsache, dass Geraden in der projektiven Geometrie (oder neueren synthetischen Geometrie, wie sich Steiner manchmal ausdrückt) sich nicht ins Unendliche «verlaufen», sondern in sich geschlossene Gebilde sind, die jeweils nur *einen* anschaulich unendlich fernen Punkt, auch Fernpunkt genannt, besitzen.

> «Und so kann man schon auch sprechen davon, dass da draussen, wenn man genügend weit hinausdenkt, man wieder zurückdenken muss, nicht einfach den endlosen Raum annehmen darf, der eine Phantasterei ist, noch dazu eine Phantasterei, die man nicht fassen kann. Vielleicht werden sich einige von Ihnen erinnern, wie ich in der Beschreibung meines Lebensganges im letzten Kapitel, das vorige Woche erschienen ist, gesagt habe, dass es auf mich einen ganz besonders bedeutsamen Eindruck gemacht hat, wie ich beim Anhören der synthetischen neueren Geometrie zunächst von der Geometrie darauf hingewiesen worden bin, dass eine Gerade nicht so gedacht werden darf, dass sie da ins Endlose hinausgeht und niemals aufhört, sondern dass die Gerade, die da hinausgeht, von der anderen Seite wahrhaftig zurückkommt. Die Geometrie drückt das so aus: Die Synthese, der unendlich ferne Punkt nach rechts ist derselbe wie der unendlich ferne Punkt nach links. Das kann man ausrechnen. Das ist nicht etwa nach der blossen Analogie, dass, wenn man einen Kreis hat und von hier ausgeht, man da wieder zurückkommt, dass, wenn der Halbbogen eine Unendlichkeit hat, er eine Gerade wäre. Das ist nicht so; das wäre eine Analogie, auf die derjenige, der exakt denken kann, nichts gibt.

Das, was auf mich einen Eindruck machte, das war nicht diese triviale Analogie, sondern das wirklich rechnungsgemässe Nachweisenkönnen, dass der unendlich ferne Punkt von der einen Seite links derselbe ist wie der, der hier rechts eine Unendlichkeit ist, dass also wirklich jemand, der hier anfängt zu laufen und immerfort nach der Linie läuft, nicht ins Endlose läuft, sondern dass, wenn man nur die richtige Zeit abläuft, er einem von der anderen Seite wieder entgegenkommt. Das sieht für alles physische Denken grotesk aus. In dem Augenblicke, wo man das physische Denken ablegt, ist es eben auch eine Realität, weil die Welt nicht endlos ist, sondern so wie sie als physische Welt vorliegt, begrenzt ist. So dass man sagen kann: Man geht an die Grenze des Ätherischen, wenn man vom Pflanzlichen und von dem spricht, was im Menschen ätherisch ist. — Man muss aber herausgehen aus allem dem, was da im Raume überhaupt ist, wenn man das Tierische und im Menschen das Astralische erklären will. Da muss man in der Zeit spazierengehen, da muss man über das Gleichzeitige hinweggehen. Da muss man also vorschreiten in der Zeit.» [6, S. 25-26]

Die Stelle aus «Mein Lebensgang», auf die sich Steiner bezieht, lautet:

«Ein ausschlaggebendes Erlebnis kam mir damals geradezu von der mathematischen Seite. Die Vorstellung des Raumes bot mir die grössten inneren Schwierigkeiten. Er liess sich als das allseitig ins Unendliche laufende Leere, als das er den damals herrschenden naturwissenschaftlichen Theorien zugrunde lag, nicht in überschaubarer Art denken. Durch die neuere (synthetische) Geometrie, die ich durch Vorlesungen und im Privatstudium kennen lernte, trat vor meine Seele die Anschauung, dass eine Linie, die nach rechts in das Unendliche verlängert wird, von links wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkommt. Der nach rechts liegende unendlich ferne Punkt ist derselbe wie der nach links liegende unendlich ferne.

Mir kam vor, dass man mit solchen Vorstellungen der neueren Geometrie den sonst in Leere starrenden Raum begrifflich erfassen könne. Die wie eine Kreislinie in sich selbst zurückkehrende gerade Linie empfand ich wie eine Offenbarung. Ich ging aus der Vorlesung, in der mir das zuerst vor die Seele getreten ist, hinweg, wie wenn eine Zentnerlast von mir gefallen wäre. Ein befreiendes Gefühl kam über mich. Wieder kam mir, wie in meinen ganz jungen Knabenjahren, von der Geometrie etwas Beglückendes.» [7, S. 64]

Weitere ähnliche Stellen findet man unter dem Stichwort «Geometrie, projektive» zitiert in dem Sammelband [2].

Voraussetzungen

Ich gehe in dieser Skizze davon aus, dass die elementaren Grundlagen der synthetischen projektiven Geometrie bekannt sind, das heisst insbesondere der Begriff der in sich geschlossenen projektiven Geraden, wie er sich aus einer synthetisch-konstruktiven Betrachtungsweise ergibt. Dabei wird deutlich, dass die innere Anordnung der Punkte auf einer projektiven Geraden strukturgleich ist mit der inneren Anordnung der Punkte eines Kreises. Die Eigenschaften eines in die euklidische Ebene eingebetteten Kreises sind allerdings nicht äquivalent zu den Eigenschaften einer in die projektive Ebene eingebetteten Geraden. Denn eine euklidische Gerade kann einen euklidischen Kreis in zwei Punkten schneiden, ihn in einem Punkt berühren oder meiden. Eine projektive Gerade dagegen trifft sich mit jeder anderen projektiven Geraden in genau einem Punkt.

Falls der Leserin oder dem Leser diese Dinge nicht bekannt sind, muss ich sie oder ihn auf die Literatur verweisen, da leicht zugängliche schriftliche Darstellungen dieses mathematischen Gebietes bereits existieren (siehe etwa [4, Kapitel 4], [5, Kapitel 3]; [9, Kapitel 3]: hier findet sich eine ausführliche, auch philosophisch-anthroposophische Aspekte miteinbeziehende Betrachtung des Problems der mathematischen Unendlichkeit.)

Ich konzentriere mich im folgenden auf den im obigen Zitat hervorgehobenen *rechnungsmässigen* Aspekt des Nachweises der Eindeutigkeit des Fernpunktes einer projektiven Geraden. Im weiteren beschränke ich mich auf die projektive *Ebene*, da die Verhältnisse im Raum nicht wesentlich anders liegen. Die Rechnung ist so ausgearbeitet, wie sie etwa auch zu Steiners Zeiten hätte durchgeführt werden können.

Euklidische Koordinaten

Elementare Koordinatensysteme für die Ebene haben ganz allgemein die Aufgabe, die relativen Lagebeziehungen (nicht notwendigerweise auch die Massbeziehungen — das ist ein Besonderheit der euklidischen Koordinaten) von Punkten und Geraden so zu repräsentieren, dass jedem Punkt genau eine Koordinate und jeder Geraden genau eine lineare Gleichung zukommt und letztlich alle geometrischen Beziehungen zwischen Mengen von Punkten und Mengen von Geraden durch Koordinatengleichungen in eindeutiger Weise ausgedrückt werden können.

Ich gehe von der euklidischen Geometrie und ihrem rechtwinkligen Koordinatensystem aus (Abbildung 3). Dem streng genommen nicht zur euklidischen Geometrie gehörenden anschaulich unendlich fernen Punkt der x-Achse kann man die Koordinaten $(\infty, 0)$ geben, wobei aber rechnungsmässig zwischen dem «linken» Punkt $(\overset{-}{\cancel{+}}\infty, 0)$ und dem «rechten» Punkt $(+\infty, 0)$ unterschieden werden muss. Es ergibt sich also auf diese Weise keine eindeutige Darstellung des Fernpunktes der x-Achse im Rahmen der euklidischen Koordinatengeometrie. Entsprechendes gilt für die y-Achse. Für die Darstellung des Fernpunktes der 1. Symmetrieachse mit der Gleichung $y = x$ ergeben sich zwei Möglichkeiten: $(+\infty, +\infty)$ und $(-\infty, -\infty)$. Zusammen mit den Punkten $(+\infty, -\infty)$ und $(-\infty, +\infty)$ auf der Geraden $y = -x$ sind alle Möglichkeiten der Darstellung unendlich ferner Punkte von Geraden durch den Koordinatenursprung $(0, 0)$ bereits erschöpft. Folglich gibt es für die Fernpunkte von Geraden durch den Punkt $(0, 0)$ mit der allgemeinen Gleichung $y = mx$, m eine beliebige reelle Zahl, nur endlich viele Möglichkeiten. Das euklidische Koordinatensystem ist also nicht in der Lage, die unendlich vielen untereinander verschiedenen Fernpunkte aller Geraden durch den Ursprung (die ein Geradenbüschel bilden) zum Ausdruck zu bringen.

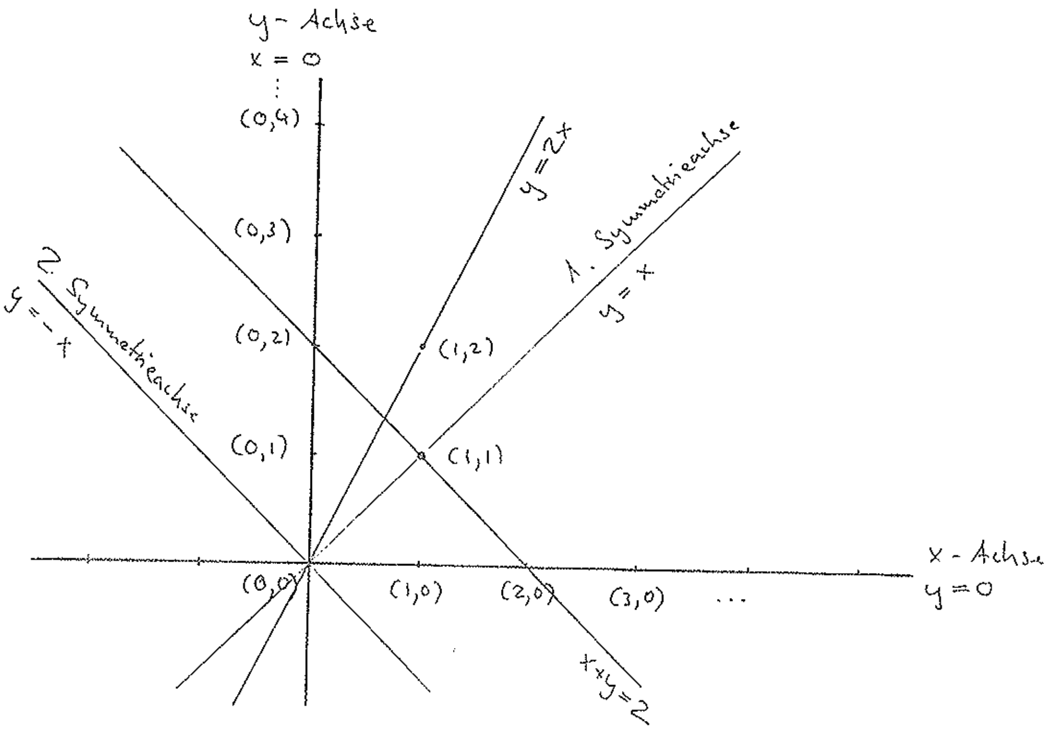

Abbildung 3: Euklidisches Koordinatensystem (x,y): inhomogene Koordinaten für die euklidische Ebene.

Homogene projektive Koordinaten

Zur Darstellung der Lageverhältnisse von Punkten und Geraden gemäss der projektiven Geometrie kann man von sogenannten *homogenen Koordinaten* ausgehen (Abbildung 4). Entsprechend der Erweiterung der euklidischen Ebene mit ihren euklidischen Punkten und Geraden durch die Fernelemente (Fernpunkte auf der Ferngeraden) zur projektiven Ebene mit projektiven Punkten und projektiven Geraden können homogene Koordinaten als eine Art projektive Erweiterung der rechtwinkligen euklidischen Koordinaten eingeführt werden. Anstatt zweier Komponenten (x,y) für die Koordinaten eines Punktes verwendet man drei Komponenten (u,v,w), die folgendermassen mit den ursprünglichen euklidischen Koordinaten zusammenhängen:

$$x = \frac{u}{w} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{v}{w}. \tag{1}$$

Daraus ergibt sich, dass für jede konstante reelle Zahl k für die Darstellung homogener Koordinaten gilt:

$$(ku, kv, kw) \equiv (u, v, w). \tag{2}$$

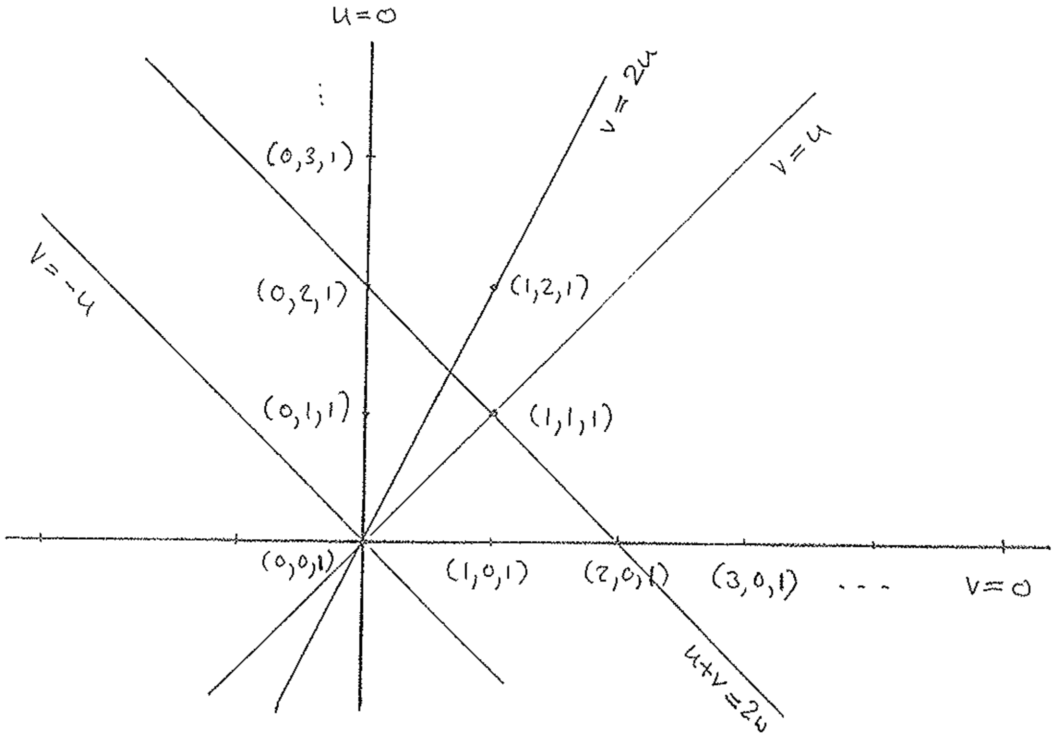

Abbildung 4: Homogenes Koordinatensystem (u, v, w) für die projektive Ebene.

Dies bedeutet, dass die homogenen Koordinaten eines Punktes mit einem beliebigen konstanten reellen Faktor multipliziert werden können und dabei immer denselben Punkt repräsentieren.

Beispiel: Die homogenen Koordinaten $(2,-1,1)$ und $(-6,3,-3)$ stellen denselben Punkt dar mit $k=-3$.

Man kann deshalb zum Beispiel festsetzen, dass $w=1$ ist für alle Darstellungen von Punkten in homogenen Koordinaten. Ist bei irgendwelchen gegebenen Koordinaten $w \neq 1$, so dividiere man u, v, w durch w und erhält dann Koordinaten in der Form $(u/w, v/w, 1)$.

Während die euklidischen Koordinaten die euklidischen Punkte und Geraden einer euklidischen Ebene umkehrbar eindeutig repräsentieren (und deshalb ihr Versagen für die anschaulich unendlich fernen Punkte kein Problem darstellt, da diese gar keine euklidischen Punkte sind), repräsentieren die homogenen Koordinaten in umkehrbar eindeutiger Weise alle Elemente der projektiven Ebene.

Beispiele

Punktkoordinaten:

Punkt	euklidische Koordinaten	homogene Koordinaten
Ursprung	$(0,0)$	$(0,0,1)$
Einheitspunkt der x-Achse	$(1,0)$	$(1,0,1)$
Einheitspunkt der y-Achse	$(0,1)$	$(0,1,1)$
Einheitspunkt	$(1,1)$	$(1,1,1)$

Gleichungen von Geraden:

Gerade	Gleichung in euklidischen Koordinaten	Gleichung in homogenen Koordinaten
x-Achse	$y=0$	$v=0$
y-Achse	$x=0$	$u=0$
1. Symmetrieachse	$y=x$	$v=u$
2. Symmetrieachse	$y=-x$	$v=-u$
	$y=2x$	$v=2u$
	$x+y=2$	$u+v=2w$

Darstellung unendlich ferner Elemente

Falls der Wert von w gegen Null geht ($w \to 0$), so geht wegen der Beziehung (1) sowohl x wie y gegen $\pm\infty$, je nachdem, ob die Werte von x bzw. y nun positiv oder negativ sind. Daraus ergibt sich für die (x,y)-Koordinatendarstellung die weiter oben geschilderte Situation bezüglich der unendlich fernen Punkte von Geraden durch den Ursprung.

Betrachtet man diese Situation aber vom Gesichtspunkt der homogenen Koordinaten aus, so ergeben sich für $w=0$ unendlich viele Punkte mit den Koordinaten $(u,v,0)$. Dies sind nun genau die Punkte der *Ferngeraden*, das heisst der anschaulich unendlich fernen Geraden der projektiven Ebene.

Unendlich ferne Punkte von Geraden:

Gerade	Gleichung in homogenen Koordinaten	Koordinaten des unendlich fernen Punktes
x-Achse	$v=0$	$(1,0,0)$
y-Achse	$u=0$	$(0,1,0)$
1. Symmetrieachse	$v=u$	$(1,1,0)$
2. Symmetrieachse	$v=-u$	$(1,-1,0)$
	$v=2u$	$(1,2,0)$
	$u+v=2w$	$(1,-1,0)$

Die unendlich fernen Punkte dieser Geraden sind jeweils eindeutig bestimmt als Schnittpunkte der jeweiligen Geraden mit der Ferngeraden (unendlich ferne Gerade), der die

Gleichung $w = 0$ zugeordnet ist. Folglich sind die Koordinaten der unendlich fernen Punkte der oben angeführten sechs Geraden gleich den eindeutig bestimmten homogenen Lösungstripeln für die folgenden sechs homogenen Gleichungssysteme in den Unbekannten u, v, w:

$$\begin{array}{cccccc} v = 0 & u = 0 & v = u & v = -u & v = 2u & u + v = 2w \\ w = 0 & w = 0 & w = 0 & w = 0 & w = 0 & w = 0 \end{array}$$

Man muss dabei beachten, dass wegen (2) zum Beispiel die homogenen Koordinaten $(1,0,0)$ und $(-1,0,0)$ denselben Punkt, nämlich den unendlich fernen Punkt der u-Achse darstellen (Abbildung 4); ebenso stellen die Koordinaten $(1,1,0)$ und $(-1,-1,0)$ beide denselben unendlich fernen Punkt dar, nämlich den der 1. Symmetrieachse. Damit verschwinden die im euklidischen Falle aufgetretenen Schwierigkeiten der eindeutigen Darstellbarkeit unendlich ferner Punkte: es gibt zu jedem Punkt der Ferngeraden $w = 0$ genau ein homogenes Koordinatentripel $(u, v, 0) \equiv (ku, kv, 0)$.

Daraus ergibt sich, dass jeder Geraden der projektiven Ebene mit der homogenen Gleichung $au + bv + w = 0$ genau ein unendlich ferner Punkt als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ferngeraden mit der Gleichung $w = 0$ zukommt. Rechnerisch ist dies eine Folge der eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Gleichungssystems für die Koordinaten (u, v, w):

$$\begin{aligned} au + bv + w &= 0, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich genau ein unendlich ferner Punkt mit den homogenen Koordinaten $(b, -a, 0)$.

Ich hoffe, dass ich mit diesen wenigen Angaben etwas zum Verständnis des angeführten Steiner-Zitats beitragen konnte. Als ergänzende Lektüre kann ich das Buch von [1, Kapitel 5] empfehlen. Für weiterführende Aspekte zur projektiven Koordinatengeometrie muss ich auf das für Mathematiker geschriebene und deshalb nicht leicht lesbare Buch von [3, Kapitel II 8 und II 9] verweisen. Für eine eingehendere Analyse der Beziehung von Skalen, Massbestimmungen und Koordinaten im Zusammenhang der projektiven Geometrie verweise ich auf [8].

Literaturverzeichnis

[1] BERNHARD, ARNOLD: *Projektive Geometrie.* Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1984.

[2] KILTHAU, URSULA und GEORG SCHRADER (Herausgeber): *Rudolf Steiner zur Mathematik.* Pädagogische Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen, Stuttgart, 1994.

[3] LOCHER, LOUIS: *Projektive Geometrie.* Verlag am Goetheanum, Dornach, ^{2}1980.

[4] LOCHER, LOUIS: *Urphänomene der Geometrie.* Verlag am Goetheanum, Dornach, ^{2}1980.

[5] LOCHER, LOUIS: *Raum und Gegenraum.* Verlag am Goetheanum, Dornach, ^{3}1988.

[6] STEINER, RUDOLF: *Esoterische Betrachtungen karmischer Zusammenhänge*, Band 1. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, ^{8}1994. Vortrag vom 16. Februar 1924, GA 235.

[7] STEINER, RUDOLF: *Mein Lebensgang.* Rudolf Steiner Verlag, Dornach, ^{9}2000. GA 28.

[8] ZIEGLER, RENATUS: *Skalen und Projektivitäten.* In: OSTHEIMER, CHRISTIAN und RENATUS ZIEGLER (Herausgeber): *Skalen und Wegkurven*, Band 19 der Reihe *Mathematisch-Astronomische Blätter – Neue Folge*, Seiten 5–53. Verlag am Goetheanum, Dornach, 1996.

[9] ZIEGLER, RENATUS: *Mathematik und Geisteswissenschaft.* Verlag am Goetheanum, Dornach, ^{2}2000.

Dr. Renatus Ziegler,
Hügelweg 29,
CH 4143 Dornach,
Schweiz

E-Mail: ziegler@hiscia.ch

Erhalten: Oktober 2006