JUPITER, Vol. 3 (2008), ISSN 1661-8750
Verlag am Goetheanum, Dornach/Switzerland

Mathematische Denkübungen zum Symmetriebegriff[3]

Renatus Ziegler

Zusammenfassung. Dieser Aufsatz entfaltet einige Beispiele für reines Denken im Rahmen der Mathematik. Die Inhalte eines solchen Denkens sind Gesetze jenseits des Entstehens und Vergehens. Das Verhältnis von invarianter Struktur einerseits und Formverwandlung oder Veränderung andererseits kann man anhand des mathematischen Begriffs des Symmetrie studieren. Das gibt Anlass für einen kleinen Ausflug in die Gruppenthepeorie.
Keywords. Reines Denken, Kreisbegriff, Invarianz, Symmetrie, Gruppe

Vorbemerkungen

An einigen mathematischen Begriffsbildungen soll gezeigt werden, daß es beim Aufsuchen von Symmetrien um *invariante Strukturen* geht, das heißt um Eigenschaften, die nicht der Veränderung unterliegen. Jeder — nicht notwendigerweise in der Zeit und im Raum erfolgenden — Veränderung liegt ein Transformations*prinzip* zugrunde, das sich selbst nicht verändert. Dieses konkrete Prinzip ist eine im Fluß der Veränderung invariante Struktur. Vom Standpunkt des erkennenden Subjekts aus braucht man ein solches Prinzip als begrifflichen Gesichtspunkt, um überhaupt Veränderungen feststellen zu können.

Auf diese Weise gefundene Prinzipien oder Strukturen gehören einem Bereich an, der prinzipiell jenseits aller Veränderung, und damit jenseits des Entstehens und Vergehens, liegt. Man kann vom Reich der *Ideen* oder *Gesetze* sprechen. Insofern diese im menschlichen Denken anwesend sind, spricht man auch von *Begriffen.* Damit sind nicht Worte oder sprachliche Ausdrücke gemeint, welche auf Begriffe hinweisen und mit welchen man andere Menschen auf solche aufmerksam machen kann, sondern deren im tätigen Denken anschaubarer begrifflicher *Inhalt* oder *Bedeutung.* Im Umgang mit mathematischen Gesetzen ist die sprachunabhängige, universell-objektive Natur der Begriffsinhalte in der Regel kein Problem.

Die Fähigkeit, Ideen oder Begriffe zu entwickeln und anzuschauen, kann insbesondere durch die Mathematik gepflegt werden. Die Zielrichtung der Mathematik geht letztlich nicht auf die Darstellung einzelner Beispiele, sondern auf allgemeine Prinzipien. Sie kann deshalb zur Ausbildung des von allen spezifischen Sinneselementen entblößten *reinen Denkens* dienen, eines Vermögens zur Erfassung von Gesetzmässigkeiten.

---

[3]Bearbeiteter Auszug aus [3].

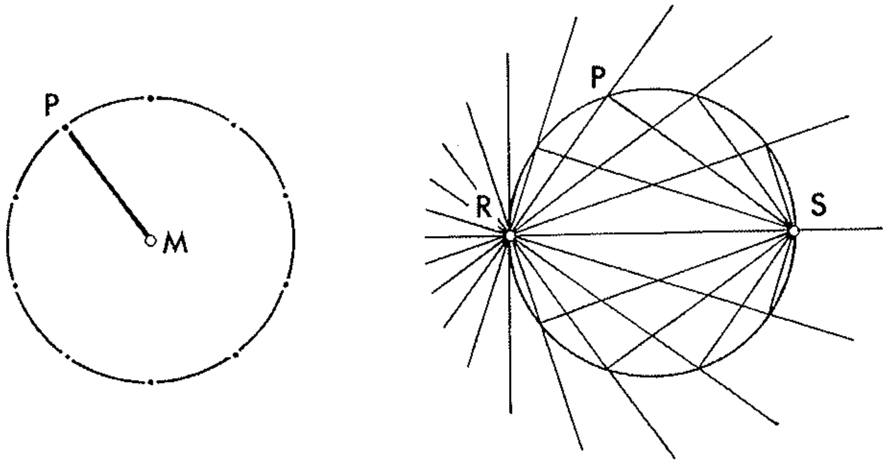

Abbildung 18: Abstandsdefinition (links) und Rechtwinkeldefinition (rechts) des Kreises.

In diesem Sinne ist Mathematik dem Bereich der Geisteswissenschaften zugehörig, da sie sich mit Inhalten beschäftigt, die nur vermöge der denkenden Tätigkeit des menschlichen Geistes zur Erscheinung kommen.

Kreisbegriff

Die Gegenstände der Mathematik sind also mathematische Begriffe, die sich nicht mit den spezifischen Gegebenheiten von *Einzel*gegenständen befassen, sondern mit Gesetzmässigkeiten, denen ganze Klassen von Gegenständen zugehören. So geht es bei der Bestimmung des Kreisbegriffs nicht darum, den Ort des Mittelpunktes oder die Länge des Radius' irgendeines speziellen Kreises in diesen Begriff mitaufzunehmen, sondern darum, ein allgemeines Prinzip denkend hervorzubringen, das *allen* Kreisen zugrunde liegt. Ein solches Prinzip kann dann zwar allen Kreisen zukommen, ist aber nicht das einzige, welches diese Eigenschaft hat. So sind etwa die folgenden Definitionen eines Kreises zueinander dergestalt äquivalent, daß jeder Kreis im Sinne der einen Definition auch ein Kreis im Sinne der anderen Definition ist und umgekehrt:

Abstandsdefinition des Kreises:

Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte P in einer Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene denselben Abstand haben (Abb. 18 links).

Rechtwinkeldefinition des Kreises:

Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Lotfußpunkte P der Lote aus einem Punkt S einer Ebene auf diejenigen Geraden dieser Ebene, die durch einen Punkt $R \neq S$ gehen (Abb. 18 rechts).

Der Äquivalenzbeweis ergibt sich anhand der in Abbildung 19 in einem speziellen Fall dargestellten Eigenschaften eines in einen Kreis eingeschriebenen Rechtecks. Seien **K** ein Kreis im Sinne der Abstandsdefinition und P, Q und R, S Paare von auf **K** gegenüber liegenden Punkten. Dann ist gemäss Definition $|RM| = |MS| = |MP| = |MQ|$. Dass das Viereck $RPSQ$ rechtwinklig ist ergibt sich aus der Tatsache, dass alle Teildreiecke gleichschenklig sind. Folglich ist **K** ein Kreis im Sinne der Rechtwinkeldefinition. — Ist andererseits **K** ein Kreis im letzteren Sinne und P ein Punkt dieses Kreises, so wähle man M auf RS derart, daß $|RM| = |MS| = r$. Der Punkt Q sei der Lotfußpunkt der Parallele zu PS durch R. Dann ist das Viereck $RPSQ$ gemäss Definition rechtwinklig, und folglich gilt $|PM| = r$ für alle Lotfußpunkte P.

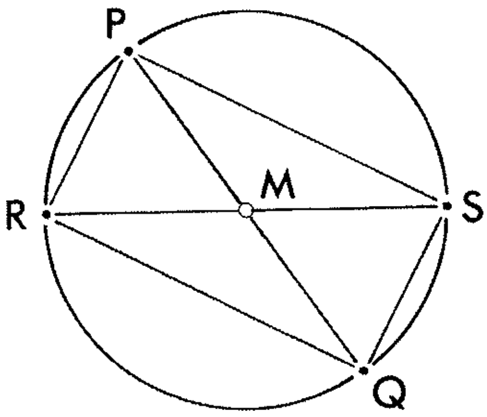

Abbildung 19: Zum Äquivalenzbeweis der beiden Kreisdefinitionen

Es gibt noch manch andere dazu äquivalente Definitionen des Kreises. Diese eröffnen mannigfaltige Einblicke in die Einordnung des Kreisprinzips in das Gefüge geometrischer Begriffszusammenhänge. Die höhere Einheit all dieser Kreisprinzipien, das allgemeine Strukturprinzip oder *Gesetz des Kreises*, das allen diesen Einzelprinzipien (Definitionen) zugrunde liegt, ist selbst nicht unmittelbar Gegenstand der Mathematik. Es wird von ihr vorausgesetzt und tritt in ihr nur durch spezielle Begriffszusammenhänge vermittelt auf. Das Gesetz des Kreises erscheint in der Mathematik immer in bereits konkretisierten Bezügen, etwa zu bestimmten Begriffen der Geometrie wie Abstand, rechter Winkel usw., auf der Grundlage der ebenfalls vorausgesetzten Axiome der euklidischen Geometrie.[4]

In diesem Sinne sind die Gegenstände der Mathematik keine allein in sich selbst begründeten und nur durch sich selbst bestehenden Gesetzmässigkeiten. Sie beruhen einerseits auf den vorausgesetzten Axiomen und reflektieren andererseits den speziellen begrifflichen Kontext der Bestandteile der jeweiligen Definitionen.

Symmetrie und Invarianz

In den Auseinandersetzungen um den Symmetriebegriff in den Wissenschaften zeigt sich, daß es schwierig ist, verschiedene Bedeutungen von «Symmetrie» unter einen einheitlichen Gesichtspunkt zu bringen. Es lassen sich aber zwei Aspekte herausschälen, die bei

[4]Für weitere Eigenschaften des Kreises im Umfeld der nichteuklidischen und konformen Geometrie, siehe [4].

fast allen Ansätzen zur Aufklärung der Bedeutung von «Symmetrie» aufzufinden sind. Einerseits handelt es sich um die von der Mathematik nahegelegte Auffassung von Symmetrie als *Invarianz* bezüglich gewissen Gruppen von Transformationen oder Veränderungen und andererseits um die praktische Bedeutung der *Symmetriebrechung* oder Asymmetrie.[5] Letztere erweist sich bei genauerem Hinsehen als Erscheinung einer höheren Symmetrie oder Harmonie; dabei werden die untergeordneten Symmetrien im allgemeinen durch eine die übergeordnete Symmetrie invariant lassende Transformation «gebrochen» oder «gestört».

Dreiecksverwandlungen

Es soll ein elementares Beispiel betrachtet werden. Die Gesetzmässigkeit des Dreiecks umfasst drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, sowie deren Verbindungsstrecken. Als untergeordnete Gesetze werden weiter spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterschieden: Entweder sind alle Winkel kleiner als 90°, oder ein Winkel ist genau 90° oder größer als 90°. Jedes einzelne Dreieck hat Eigenschaften, die durch diese Gesetze erfaßt sind. Es besitzt aber auch solche Eigenschaften, die den genannten Gesetzen nicht explizit angehören, wie die Lage sowie die genaue Größe der Strecken und Winkel. Das ist charakteristisch für das Verhältnis eines Objektes (oder Gegenstandes) zu seinem Gesetz: Ersteres hat zusätzliche, spezifische Eigenschaften, die durch das Gesetz, das seine allgemeinen Eigenschaften beinhaltet, nicht explizit umfaßt werden, die es aber gerade als einzelnes Objekt auszeichnen.

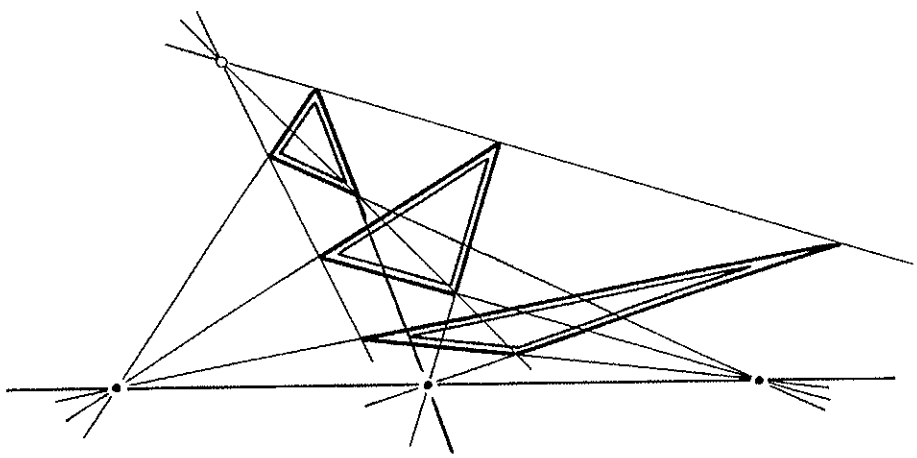

Abbildung 20: Dreiecksverwandlung

Die Symmetrietransformationen von Objekten mit einem bestimmten, die allgemeinen Eigenschaften umfassenden Gesetz bestehen aus denjenigen Veränderungen dieser Objekte, die durch dieses Gesetz nicht spezfisch bestimmte Eigenschaften betreffen. Legt man in obigem Beispiel als primäre kennzeichnende Merkmale des Gesetzes von Dreiecken die obige Klassifikation der Dreiecke zugrunde, so sind die einzigen in Frage kommenden Symmetrietransformationen die euklidischen Kongruenztransformationen und

[5] Siehe dazu etwa [2] oder [1].

die Ähnlichkeiten. Eine Transformation, welche ein rechtwinkliges in ein stumpfwinkliges oder spitzwinkliges Dreieck überführt, ist dann bezüglich *dieser* Merkmale eine Symmetriebrechung (Abbildung 20 zeigt eine solche Transformation: eine Perspektivität oder zentrale Kollineation), da sie eine Veränderung von durch dieses Gesetz bestimmten Eigenschaften zur Folge hat. Vom Gesichtspunkt des *allgemeinen* Gesetzes des Dreiecks sind aber auch derartige Transformationen Symmetrien, da sie das Dreieck als solches invariant lassen.

Transformationsgruppen

Man beachte, daß die bei der Dreiecksverwandlung genannten Veränderungen oder Transformationen in keinem Falle ein Gesetz als solches betreffen, sondern immer nur Objekte oder Gegenstände, die unter dieses Gesetz fallen, also Erscheinungen von diesem sind. Auch bei einer Symmetriebrechung wird nicht das übergeordnete *Gesetz* «zerbrochen», sondern die unter das Gesetz fallenden *Objekte* werden verändert.

Für die weitere Untersuchung muss der Begriff der Transformationsgruppe eingeführt werden. Zunächst wird definiert: *Transformationen* einer Menge X (hier: eine Menge von geometrischen Objekten) sind umkehrbar eindeutige Beziehungen zwischen den Elementen von X. Transformationen bilden im allgemeinen eine Gruppe in folgendem Sinne.

Eine *Gruppe* Σ ist eine Menge G von Elementen (hier: Transformationen) mit einer Verknüpfung («Multiplikation»), die zwei beliebigen Elementen g_1, g_2 aus G eindeutig wieder ein Element $g_1 g_2$ («Multiplikation von g_1 mit g_2») aus G zuordnet, so daß folgende Eigenschaften gelten:

(1) *Assoziativität:* $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3 = g_1 g_2 g_3$;

(2) *Existenz der Identität:* Es gibt genau ein Element e in G, so daß $eg = ge = g$ für alle g in G;

(3) *Existenz des Inversen:* Für jedes Element g in G gibt es genau ein Element g^{-1} in G, so daß $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks

Ein Beispiel einer endlichen Gruppe, das heißt einer Gruppe mit endlich vielen Elementen, ist gegeben durch die Gruppe Σ aller Kongruenz-Transformationen eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit festem Mittelpunkt M. Diese Symmetrietransformationen, oder kurz Symmetrien, verändern ein beliebiges solches Dreieck nur in seiner Lage, nicht aber in seiner Gesetzmässigkeit.

Seien s, s', s'' die Kongruenztransformationen der Spiegelungen an den drei Symmetrieachsen eines gleichseitigen Dreiecks und r die Kongruenztransformation der Drehung im Gegenuhrzeigersinn um 120° um den Mittelpunkt M (Abbildung 21). Die Zusammensetzung rs soll bedeuten, daß zuerst r und dann s angewendet wird. Offenbar gilt dann $s' = rs$ und $s'' = r^2 s$, wo $r^2 = rr$ eine zweimalige Anwendung von r bedeutet. Führt man

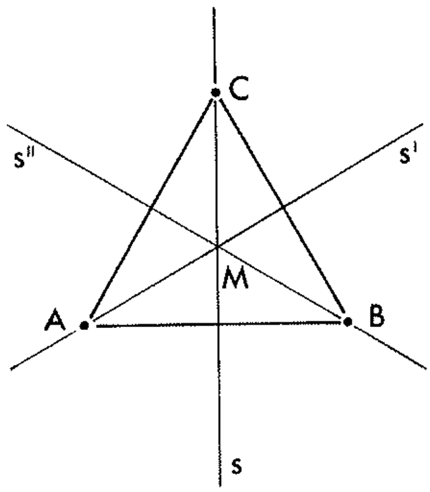

Abbildung 21: Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks

noch die identische, alles gleichlassende Operation e ein, so ergeben sich als Elemente der Gruppe: $S = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$. Dabei gilt $sr = r^2s$ sowie $r^3 = e$ und $s^2 = e$. Mit diesen Relationen läßt sich die Tabelle 1 aller Beziehungen der Elemente untereinander berechnen (Cayleysche Gruppentafel):

	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

Tabelle 1: Gruppentafel für die Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks.

Permutationen von drei Elementen

Mit wenigen Überlegungen läßt sich anschaubar machen, daß diese Gruppe strukturgleich (isomorph) ist zur Gruppe **P** aller Transformationen, oder *Permutationen* (Umordnungen), einer endlichen Menge aus drei Elementen. Nimmt man für die drei verschiedenen Elemente zum Beispiel die ersten drei natürlichen Zahlen 1, 2 und 3, so lassen sich diese auf sechs verschiedene Arten anordnen:

$$\{1,2,3\}, \quad \{2,3,1\}, \quad \{3,1,2\},$$
$$\{2,1,3\}, \quad \{1,3,2\}, \quad \{3,2,1\}.$$

Hier interessieren diejenigen Operationen, das heißt Transformationen oder Umordnungen (Permutationen), aus denen man aus $\{1,2,3\}$ alle übrigen Anordnungen ableiten kann. Durch die Operation ρ der zyklischen Vertauschung, das heißt durch den Übergang $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, erhält man aus $\{1, 2, 3\}$ die Anordnung $\{2, 3, 1\}$. Den Übergang von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{3, 1, 2\}$ erhält man dann durch zweimalige Anwendung von ρ, also durch $\rho\rho=\rho^2$. Die Anordnungen $\{2, 1, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ und $\{3, 2, 1\}$ entstehen aus $\{1, 2, 3\}$ durch Festhalten eines Elementes und Vertauschen der beiden übrigen Elemente, also durch die Operationen

$$\begin{array}{llll} \sigma: & 1 \to 2, & 2 \to 1, & 3 \to 3; \\ \sigma': & 2 \to 3, & 3 \to 2, & 1 \to 1; \\ \sigma'': & 1 \to 3, & 3 \to 1, & 2 \to 2. \end{array}$$

Versteht man unter der Multiplikation $\rho\sigma$ die Hintereinanderausführung der Operationen ρ und σ in dieser Reihenfolge, so ergibt sich, wie man leicht nachrechnet: $\sigma' = \rho\sigma$, $\sigma'' = \rho^2\sigma$. Außerdem gilt $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ sowie $\rho^3 = \varepsilon$ und $\sigma^2 = \varepsilon$, wobei ε die identische Operation mit $1 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 3$ bedeutet. Damit ergibt sich als Menge der Elemente der Gruppe der Operationen (Permutationen): $P = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$. Mit den abgeleiteten Relationen ergibt sich weiter die Tabelle 2 aller Beziehungen der Gruppenelemente, das heißt der Permutationen, untereinander:

	ε	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ε	ε	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	ε	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	ε	ρ	$\rho^2\sigma$	σ	$\rho\sigma$
σ	σ	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	ε	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^2\sigma$	ρ	ε	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^2	ρ	ε

Tabelle 2: Gruppentafel für die Permutationen dreier Elemente

Abstrakte Gruppen

Ein vergleichender Blick auf die Symmetrietransformationen r, s und e des gleichseitigen Dreiecks mit festem Mittelpunkt sowie die Tabelle 1 der zugehörigen Relationen der Gruppentafel zeigt, daß diesen Operationen tatsächlich dasselbe Verknüpfungsgesetz zugehört wie den Umordnungsoperationen ρ, σ und ε einer Menge von drei Elementen $\{1, 2, 3\}$ in der Tabelle 2.

Daraus folgt, daß es sich bei diesen beiden konkreten Gruppen Σ und $\mathbf{P}$ um Realisierungen einer und derselben Gesetzmässigkeit, einer sogenannten *abstrakten Gruppe*, handelt. In dieser wird nur die spezielle Verknüpfungsstruktur, nicht aber die konkrete Natur der Elemente beachtet. Davon zu unterscheiden ist zusätzlich das schon weiter oben angegebene *allgemeine Gruppengesetz*, das allen speziellen abstrakten Gruppen als gemeinsames Prinzip zugrunde liegt.

Der Bereich, innerhalb welchem sich eine Veränderung abspielt, ist also in jedem Fall der Objektbereich der Transformationen, das heißt die Menge X, auf der die Transformationen operieren. In den obigen Beispielen waren das ein gleichseitiges Dreieck mit festem Mittelpunkt das heißt eine Teilmenge der Elemente der Ebene sowie eine Menge aus drei Elementen $\{1, 2, 3\}$. Jeder in einem bestimmten Sinne gesetzmäßigen Veränderung eines (nicht notwendigerweise endlichen) Elementenbereiches, das heißt einer bestimmten Transformation, liegt also einerseits etwas Prinzipielles zugrunde, was durch diese Transformation nicht verändert wird, invariant bleibt; andererseits schließen sich alle Transformationen dieser Art im allgemeinen zu einer konkreten Gruppe zusammen, die selbst ein allen Transformationen übergeordnetes Prinzip darstellt. Diesem Prinzip ist dann wiederum die abstrakte Gruppe übergeordnet und derselben das allgemeine Gruppengesetz.

Literaturverzeichnis

[1] MAINZER, K.: *Symmetrien der Natur. Ein Handbuch zur Natur- und Wissenschaftsphilosophie.* de Gruyter, Berlin, 1988.

[2] WILLE, R. (Herausgeber): *Symmetrie in Geistes- und Naturwissenschaft.* Springer, Berlin und Heidelberg, 1988.

[3] ZIEGLER, RENATUS: *Mathematik als Geisteswissenschaft: Philosophische Untersuchungen zur Bedeutung der Mathematik in Anknüpfung an Plato, Goethe und Steiner.* Elemente der Naturwissenschaft, 64:1–21, 1996.

[4] ZIEGLER, RENATUS: *Mathematik und Geisteswissenschaft.* Verlag am Goetheanum, 2. Auflage, 2000.

Dr. Renatus Ziegler,
Blauensteinerstrasse 10,
CH 4053 Basel,
Schweiz

E-Mail: ziegler@hiscia.ch

Erhalten: Oktober 2006