ELEMENTE DER NATURWISSENSCHAFT

Zeitschrift

herausgegeben von der Naturwissenschaftlichen Sektion am Goetheanum, Dornach

Diese Zeitschrift setzt sich die Förderung der *Bildekräfte-Forschung* zum Ziel, wie sie Rudolf Steiner aus der anthroposophischen Geisteswissenschaft heraus und in Fortführung der Vorarbeiten von Goethe begründet hat. Rudolf Steiner hat eine solche geistgemässe Naturwissenschaft als ein Hauptziel der gegenwärtigen Kultur bezeichnet. Diese neue Naturwissenschaft ist aus ihren Elementen heraus neu zu entwickeln und darzustellen.

Zu diesem Zwecke veröffentlicht diese Zeitschrift neben Abhandlungen auch kurze Mitteilungen, Berichte und Literaturhinweise aus den Gebieten der gesamten Naturwissenschaften.

Inhalt

Mathematik als Geisteswissenschaft

Philosophische Untersuchungen zur Bedeutung der Mathematik in Anknüpfung an Plato, Goethe und Steiner

Renatus Ziegler

Mathematics is an important factor for all scientific advances and technical implementations today. In spite of this, mathematics seems to play no real rôle in the striving of the individual for conscious insight into his or her relationship to the sensible and/or supersensible world. In addition, recent ideas in the philosophy of mathematics, mostly materialistic in nature, do not take into account the Platonic tradition of using mathematical thinking as a guide to spiritual development.

In this essay we develop the notion of mathematical intuition and show how this brings concrete insight into the thinking process in general as well as into the specific usefulness of mathematical thinking in approaching the spiritual science of anthroposophy.

Einleitung und Überblick

Die Mathematik gehört zu den notwendigen Bedingungen der modernen Zivilisation. Es gibt fast keinen Lebensbereich mehr, in welchem die Mathematik nicht vermittels der wissenschaftlichen und technischen Errungenschaften eine mehr oder weniger bedeutsame Rolle spielt. Sogar bis hinein in den Alltag der universitären Geisteswissenschaften beansprucht sie einen immer größeren Platz.[1] Charakteristisch dafür ist, daß mathematische Begriffe auf außerhalb der Mathematik gelegene Bereiche *angewendet* werden, ohne daß man sich in jedem Falle über die tiefere Natur der Mathematik detailliert Rechenschaft ablegt.

Gerade weil die Mathematik zu einem fast alles durchdringenden Instrument des wissenschaftlich-technischen Fortschrittes geworden ist, ist eine Besinnung auf ihre innere Natur, auf ihre Möglichkeiten und Grenzen, eine Notwendigkeit der Zeit. Es stellt sich etwa die für das allgemeine Kulturleben bedeutsame Frage, ob es bisher wenig berücksichtigte Umgangsweisen mit der Mathematik gibt, die neben der Ausgestaltung der reinen Mathematik sowie der Erweiterung des Anwendungsbereiches mathematischer Modelle gepflegt werden können. Die Mathematik dient – und diente – bisher weitgehend dem privaten oder institutionellen Erkenntnisgewinn, oder sie wird erlernt als unabdingbarer Wissensinhalt zur Bewältigung der Erfordernisse des modernen Berufslebens; schließlich wird sie vor allem als Instrument des zivilisatorischen Fortschritts eingesetzt. Falls die Mathematik nicht nur nützlich sein, sondern ihr eine reale Bedeutung für die Vertiefung der *Kultur* und der *Bildung* des Menschen zukommen soll, muß noch nach anderen Wegen ihrer Pflege gesucht werden.

Zur Darstellung eines solchen ungewohnten Zugangs zur Mathematik soll an *Plato* und *Goethe* angeknüpft werden.[2] Diese dienen allerdings nur als Ausgangspunkt einer Untersuchung, die an sich unabhängig von dieser Anknüpfung ist.

Für *Plato* war die Mathematik ein Mittel zur Umlenkung der Seele von der Anschauung der Sinnendinge zur Gewahrwerdung des göttlichen Urgrundes des Daseins. Die Mathematik selbst könne keinen Aufschluß geben über das Göttliche, sie könne aber die Seele auf dessen Schau (theoria) vorbereiten. – Läßt sich mit dieser Auffassung heute noch etwas anfangen? Sind *Platos* Aussagen bloß im Sinne eines Mythos zu verstehen, oder haben sie noch – oder wieder – eine reale Verankerung in den heutigen Erlebnismöglichkeiten des Menschen?

An *Plato* anknüpfend sah *Goethe* in der reinen Mathematik in erster Linie ein Schulungsinstrument, das den Menschen zur Exaktheit und methodischen Sicherheit im Erkennen führt. Keine andere Wissenschaft führe zu einer so vollkommenen methodischen und inhaltlichen Gewißheit wie die Mathematik. Dabei war sich *Goethe* bewußt, daß es beim Erkennen der Welt nicht nur allein auf eine *Anwendung* mathematischer Inhalte ankommt, sondern auf eine Praktizierung der *mathematischen Methode*. Die gründliche Beschäftigung mit Mathematik führt nach *Goethe* (1792) außerdem zu Erfahrungen «einer höheren Art», die mit der Ausbildung eines Organs verbunden ist, dessen Objektbereich nicht der materiellen Welt angehört.

Ich möchte hier insbesondere zeigen, daß sowohl *Platos* wie *Goethes* Gesichtspunkte in einen konkreten Zusammenhang mit modernen Auffassungen der Mathematik gebracht werden können. Dazu soll zunächst an den Symmetriebegriff angeknüpft werden, der in der reinen Mathematik, in der klassischen und modernen Physik, in den übrigen Naturwissenschaften sowie in der Philosophie eine hervorragende Rolle spielt.

An mathematischen Beispielen soll gezeigt werden, daß es beim Aufsuchen von Symmetrien um *invariante Strukturen* geht, das heißt um Eigenschaften, die nicht der Veränderung unterliegen. Jeder – nicht notwendigerweise im Raum und in der Zeit erfolgenden – Veränderung liegt ein Transformations*prinzip* zugrunde, das sich selbst nicht verändert. Dieses Prinzip ist eine im Fluß der Veränderung invariante Struktur, eben das konkrete Prinzip, gemäß dem die Art des Ablaufs der Veränderung bestimmt ist. Vom Standpunkt des erkennenden Subjekts aus braucht man ein solches Prinzip als begrifflichen Gesichtspunkt, um überhaupt Veränderungen feststellen zu können.

Auf diese Weise gefundene Prinzipien oder Strukturen gehören einem Bereich an, der, wie ich zeigen werde, prinzipiell jenseits aller Veränderung steht. Man kann hier vom Reich der *Ideen* oder *Gesetze* sprechen.[3] In diesem Sinne ist Mathematik dem Bereich der Geisteswissenschaften zugehörig, da sie sich mit Inhalten beschäftigt, die nur vermöge der denkenden Tätigkeit des menschlichen Geistes zur Erscheinung

kommen. Dieser Bereich ist dem Reich der Urbilder im Sinne von *Plato* verwandt. Die *Plato*schen Urbilder haben jedoch eine weitere Eigenschaft: sie sind in der Natur *wirksame* Ideen.

Dieser Unterschied zwischen einer im individuellen Denken anwesenden Idee (Begriff) und einem in der Natur tätig-schaffenden, wirksamen Urbild taucht im Mittelalter unter den Bezeichnungen *universale post rem* und *universale in re* auf. Davon wird noch das für sich selbst bestehende und auf sich selbst beruhende *universale ante rem* unterschieden, das seine Wirksamkeit nicht auf etwas außerhalb seiner selbst Liegendes entfaltet. Nominalisten lehnen zumindest die Existenz von in den Erscheinungen wirkenden Universalien ab, oft sogar auch die universell-objektive Natur der Ideen. Ideenrealisten sind hingegen der Ansicht, daß den Ideen nicht nur eine *objektive Existenz*, sondern auch eine *immanente Wirksamkeit* oder *Wirklichkeit* zukommt.[4]

Im Umgang mit mathematischen Gesetzen ist einem deren universell-objektive Natur meist kein Problem. Es gibt aber auch eine sachgemäße Möglichkeit, die *wirksame* Natur der Idee, das heißt die konkrete Wirk-Konstitution des Urbildes oder Wesens, nachzuweisen, indem vom aktuellen Vollzug mathematischer Gedanken ausgegangen wird. Damit kann die Mathematik zum Ausgangspunkt einer Wissenschaft des *aktuellen*, tätigen Geistes werden, in Ergänzung zur traditionellen Geisteswissenschaft, die eine Wissenschaft von den in der Vergangenheit entstandenen, post-aktuellen *Produkten* des Geistes ist. Diese Wissenschaft des aktuellen Geistes muß sich *methodisch* an das von *Goethe* Geforderte halten, dabei aber den Objektbereich auf nicht mehr den gewöhnlichen Sinnen zugängliche Erfahrungsinhalte, von denen schon *Plato* spricht, erweitern. Dies ist insbesondere das Anliegen der von *Rudolf Steiner* entwickelten anthroposophischen Geisteswissenschaft.

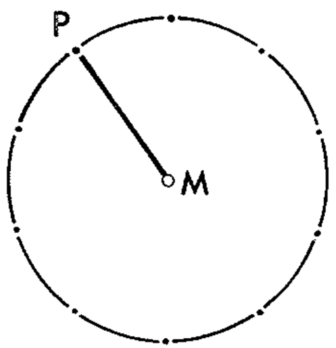
1. Plato: Mathematik zwischen Urbild und Abbild

Plato unterscheidet in der Natur die Gegenstände und Prozesse von den lebendigen Prinzipien, welche diese hervorbringen, gestalten und aufrecht erhalten. Ersteres sind die gewordenen, der Veränderung unterliegenden *Abbilder*, letzteres die ewig seienden und sich selbst gleich bleibenden, schaffenden Prinzipien, die *Urbilder*.[5] Dieser Differenzierung nach *Erkenntnisgegenständen* entspricht eine Unterscheidung von *Erkenntnisweisen*. Abbilder treten für das menschliche Bewußtsein in Form fertig gegebener konkreter Vorstellungen oder Meinungen (doxa) auf, während sich die Urbilder der lebendigen Vernunfterkenntnis, der Ideenschau (theoria), erschließen. Zwischen diesen beiden Erfahrungsarten ist die *Verstandeserkenntnis* angesiedelt, die sich mit den Gegenständen der Wissenschaft, den abstrakten Begriffen und Ideen, auseinandersetzt. Insbesondere gehört das mathematische Denken diesem Bereich an. Die Mathematik teilt mit den übrigen Wissenschaften die Eigenschaft, daß sie letztlich von Voraussetzungen (Postulaten, Axiomen) ausgeht, die mit ihren eigenen Mitteln nicht abgeleitet (bewiesen) werden können.

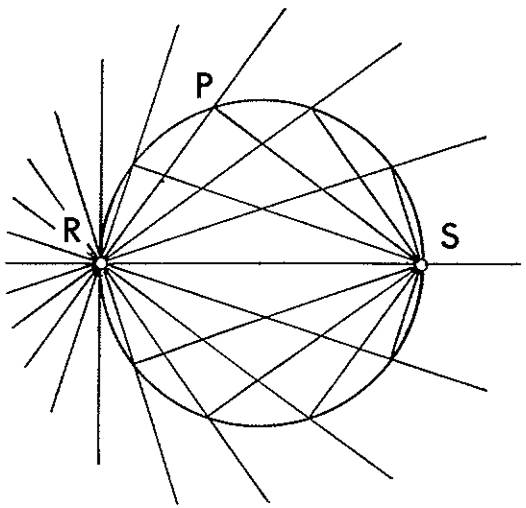
Die Gegenstände der Mathematik sind jedoch keine Abbilder, da sich die mathematischen Begriffe nicht mit den spezifischen Gegebenheiten von *Einzel*gegenständen befassen, sondern mit Strukturen, denen ganze Klassen von Gegenständen zugehören. So geht es etwa bei der Bestimmung des Kreisbegriffs nicht darum, den Ort des Mittelpunktes oder die Länge des Radius' irgendeines speziellen Kreises in diesen Begriff mitaufzunehmen, sondern ein allgemeines Prinzip herauszuschälen, das *allen* Kreisen zugrunde liegt. Ein solches Prinzip kann dann zwar allen Kreisen zukommen, ist aber nicht das einzige, welches diese Eigenschaft hat. So sind etwa die folgenden Definitionen eines Kreises zueinander dergestalt äquivalent, daß jeder Kreis im Sinne der einen Definition auch ein Kreis im Sinne der anderen Definition ist und umgekehrt:

Abstandsdefinition des Kreises:
Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte P in einer Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene denselben Abstand haben (Figur 1).

Rechtwinkeldefinition des Kreises:
Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Lotfußpunkte P der Lote aus einem Punkt S einer Ebene auf diejenigen Geraden dieser Ebene, die durch einen Punkt $R \neq S$ gehen (Figur 2).

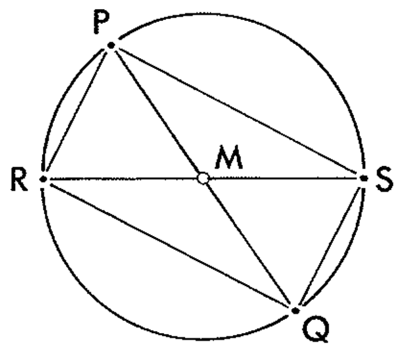


Figur 1



Figur 2

Der Äquivalenzbeweis ergibt sich unmittelbar aus den in Figur 3 in einem speziellen Fall dargestellten Eigenschaften eines in einen Kreis eingeschriebenen Rechtecks. Seien **K** ein Kreis im Sinne der Abstandsdefinition und P, Q und R, S Paare von auf **K** gegenüber liegenden Punkten. Dann ist $|RM| = |MS| = |MP| = |MQ|$. Das Viereck $RPSQ$ ist rechtwinklig, da die Teildreiecke gleichschenklig sind. Folglich ist **K** ein Kreis im Sinne der Rechtwinkeldefinition. Ist andererseits **K** ein Kreis im letzteren Sinne, so wähle man M auf RS derart, daß $|RM| = |MS| = r$; der Punkt Q sei der Lotfußpunkt der Parallelen zu PS durch R. Dann ist das Viereck $RPSQ$ rechtwinklig und folglich gilt $|PM| = r$ für alle Lotfußpunkte P.



Figur 3

Ein Mathematiker kann noch manch andere dazu äquivalente Definitionen des Kreises finden und eröffnet dadurch mannigfaltige Einblicke in die Einordnung des Kreisprinzips in das Gefüge geometrischer Begriffszusammenhänge. Die höhere Einheit all dieser Kreisprinzipien, das allgemeine Strukturprinzip oder *Gesetz des Kreises*, das allen diesen Einzelprinzipien (Definitionen) zugrunde liegt, ist selbst nicht unmittelbar Gegenstand der Mathematik. Es wird von ihr vorausgesetzt und tritt in ihr nur durch spezielle Begriffszusammenhänge vermittelt auf. Das Gesetz des Kreises erscheint in der Mathematik immer in bereits konkretisierten Bezügen, etwa zu bestimmten Begriffen der Geometrie wie Abstand, rechter Winkel usw., auf der Grundlage der ebenfalls vorausgesetzten Axiome.

In diesem Sinne sind die Gegenstände der Mathematik keine allein in sich selbst begründeten und nur durch sich selbst bestehenden Urbilder. Sie beruhen einerseits auf den vorausgesetzten Axiomen und reflektieren andererseits den speziellen begrifflichen Kontext der Bestandteile der jeweiligen Definitionen.

Vom in sich ruhenden ideellen *Gehalt* der *Plato*schen Urbilder, dem allen Abbildern übergeordneten Strukturprinzip, ist deren bewegende und schaffende reelle *Wirksamkeit* zu unterscheiden, welche konkrete Abbilder tätig hervorbringt und ihrem Dasein reell, also nicht nur ideell, zugrunde liegt. Die Schulung des Philosophen im Sinne des «Staates» (7. Buch) hat die Vorbereitung zum erkennenden Ergreifen der schaffenden Urbilder zum Ziel. Anhand einer Schulung in den «mathematischen Wissenschaften» (Arithmetik, Geometrie, Harmonielehre und Astronomie) soll die Seele des Philosophen auf die Schau der Urbilder eingestimmt werden. Wie *Plato* im «Siebten Brief» (342a 344b) ausführt, sind diese Wissenschaften nicht unmittelbar geeignet zur Erfassung der höchsten Erkenntnisgegenstände, der schaffenden Urbilder. Die Beschäftigung mit ihnen bereitet aber den Boden, bildet die Fähigkeit, um ihrer schaffenden Qualität ansichtig werden zu können.

Plato hat diesen Weg nicht im Detail schriftlich niedergelegt (Problem der «ungeschriebenen Lehre»), da er darauf vertraute, daß diejenigen Menschen, die das Problem der Erkenntnis der Urbilder durchschauen, auch ihren Weg zu diesen finden werden.

2. *Goethe: Größe und Grenze der Mathematik*

Was bei *Plato* angedeutet ist, wird von *Goethe* deutlich ausgesprochen: das Erfassen von Naturgesetzen erfordert ein eigenes Organ, eine Art «höhere Erfahrung in der Erfahrung».[6] Damit erweitert *Goethe* das Gebiet der Phänomenologie auf bisher ausgeschlossene Bereiche. Als Erfahrung oder Phänomen gilt nun nicht mehr nur das durch die Sinne Erfaßte, sondern auch das durch das Denken Hervorgebrachte. Letzteres liegt für *Goethe* nicht außerhalb der Natur, sondern innerhalb derselben. Einsicht in das gesetzmäßige Wirken der Natur kann durch eine sorgfältige gedankliche Auseinandersetzung mit den Phänomenen erlangt werden, das heißt durch die Entwicklung von Ideen, die das in aller Mannigfaltigkeit der natürlichen Erscheinungen und der durch den Menschen durchgeführten Versuchsreihen Gleichbleibende, in sich Ruhende darstellen. Diese Ideen sind die universellen Prinzipien, welche alle individuellen Erscheinungen strukturieren.

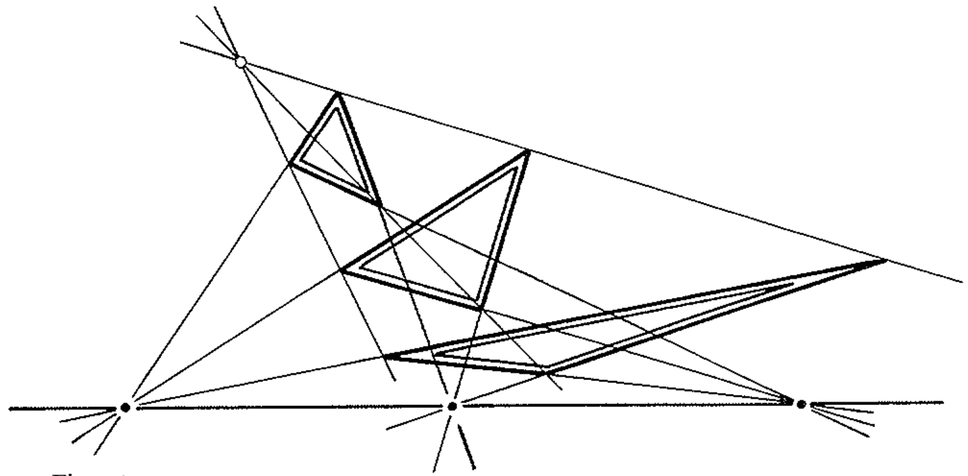
Die Fähigkeit, Ideen zu entwickeln und anzuschauen, kann insbesondere durch die Mathematik gepflegt werden. Denn die Zielrichtung der Mathematik geht letztlich nicht auf die Darstellung einzelner Beispiele, sondern auf allgemeine Prinzipien. Sie kann deshalb zur Ausbildung des von allen spezifischen Sinneselementen entblößten *reinen Anschauens* dienen, eines Vermögens, das zur Erfassung von Naturgesetzen notwendig ist. Andererseits dient die Beschäftigung mit Mathematik, wie *Goethe* im Aufsatz «Der Versuch als Vermittler von Objekt und Subjekt» (1792) ausführt, zur Aneignung einer methodischen Disziplin, die eine solide Grundlage für die Naturerkenntnis darstellt. Bezüglich dieser beiden Bereiche kommt der Beschäftigung mit Mathematik nach *Goethe* eine hohe Bedeutung zu. Seine oft zitierte Zurückhaltung bezüglich der Mathematik bezieht sich auf die Anwendung mathematischer Inhalte und nicht auf diese selbst oder die mathematische Methode. Einer Anwendung mathematischer Inhalte auf Prozesse der Natur steht *Goethe* jedoch nicht prinzipiell ablehnend gegenüber. Er hat sie sich sogar zur Ergänzung seiner eigenen Forschungen gewünscht. Er stellt jedoch auf diesem Felde manchen Mißbrauch fest, und insbesondere eine damit einhergehende Verengung des Blicks auf quantitative Relationen unter Vernachlässigung qualitativer Aspekte.

In *Goethes* Verständnis hat die mathematische Methode in erster Linie die Aufgabe, als Instrument der klaren Strukturierung des wissenschaftlichen Denkens zu dienen, um die gegenüber der Erscheinungswelt invarianten Strukturen oder Ideen in überschaubarer und deutlich gegliederter Form auszuarbeiten. Gemäß *Goethes* Auffassung haben diese Strukturen selbst Erfahrbarkeitscharakter. Hier läßt sich nun im Anschluß an *Goethe* (ohne daß *Goethe* dies in einer solchen Form meines Wissens explizit geäußert hätte) fragen, ob Ideen bloß relativ zur übrigen Erfahrung invariant sind und mit der übrigen Erfahrung dennoch die Eigenschaft der Veränderlichkeit teilen oder ob sie in ihrem Wesen auch relativ zum individuellen Bewußtsein invariant sind. Es stellt sich das Problem, ob die «höhere Erfahrung in der Erfahrung» auch in derselben exakten und auf Erfahrung gegründeten Weise, wie es die mathematische sowie die phänomenologische Methode in ihrer Anwendung auf die Naturgegenstände erfordern, untersucht werden kann und ob die sie konstituierenden invarianten Eigenschaften aufgefunden werden können.

3. *Symmetrie und Invarianz*

In diesem Abschnitt soll unmittelbar auf die Mathematik und die dabei ausgeübte Tätigkeit geschaut werden. Es soll also nicht an irgendwelche überlieferten Anschauungen *über* die Mathematik angeknüpft werden, sondern die entsprechenden Einsichten sollen aus dem Umgang mit Mathematik selbst entwickelt werden.

In den Auseinandersetzungen um den Symmetriebegriff in den Wissenschaften zeigt sich, daß es schwierig ist, die verschiedenen Bedeutungen von «Symmetrie» unter einen einheitlichen Gesichtspunkt zu bringen. Es lassen sich aber zwei Aspekte herausschälen, die bei fast allen Ansätzen zur Aufklärung der Bedeutung des Symmetriebegriffes aufzufinden sind. Einerseits handelt es sich um die von der Mathematik nahegelegte Auffassung von Symmetrie als *Invarianz* bezüglich gewisser Transformationen oder Veränderungen und andererseits um die praktische Bedeutung der *Symmetriebrechung* oder Asymmetrie.[7] Letztere erweist sich bei genauerem Hinsehen als Ausdruck einer höheren Symmetrie oder Harmonie; dabei werden die untergeordneten Symmetrien im allgemeinen durch eine die übergeordnete Symmetrie invariant lassende Transformation «gebrochen» oder «gestört».



Figur 4

Wir betrachten ein elementares Beispiel. Das Strukturprinzip des Dreiecks beinhaltet drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, sowie deren Verbindungsstrecken. Als Unterstrukturen unterscheiden wir weiter spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke: Entweder sind alle Winkel kleiner als 90°, oder ein Winkel ist genau 90° oder größer als 90°. Jedes einzelne Dreieck hat Eigenschaften, die durch diese Strukturen erfaßt sind. Es besitzt aber auch solche Eigenschaften, die den genannten Strukturen nicht unmittelbar angehören, wie die Lage sowie die genaue Größe der Strecken und Winkel. Das ist charakteristisch für das Verhältnis eines Objektes (oder Gegenstandes) zu seiner Struktur: ersteres hat zusätzliche, akzidentelle Eigenschaften, die durch die Struktur, die seine wesentlichen Eigenschaften beinhaltet, nicht umfaßt werden, die es aber gerade als einzelnes Objekt auszeichnen.

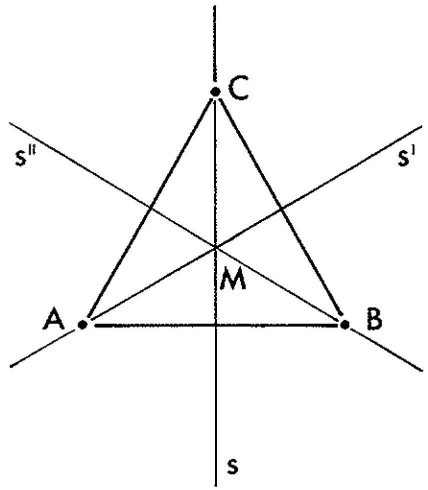
Die Symmetrietransformationen von Objekten mit einer bestimmten, die wesentlichen Eigenschaften umfassenden Struktur bestehen aus denjenigen Veränderungen dieser Objekte, die nur die für diese Struktur akzidentellen Eigenschaften betreffen. Legen wir in unserem Beispiel als primäre Strukturmerkmale die obige Klassifikation der Dreiecke zugrunde, so sind die einzigen in Frage kommenden Symmetrietransformationen die euklidischen Kongruenztransformationen und Ähnlichkeiten. Eine Transformation, welche ein rechtwinkliges in ein stumpfwinkliges oder spitzwinkliges Dreieck überführt, ist dann bezüglich *dieser* Strukturmerkmale eine Symmetriebrechung (Figur 4 zeigt eine solche Transformation, eine Perspektivität oder zentrale Kollineation), da sie eine Veränderung von im Sinne dieser Struktur wesentlichen Eigenschaften zur Folge hat. Vom Gesichtspunkt der Struktur des Dreiecks überhaupt sind aber auch derartige Transformationen Symmetrien, da sie das Dreieck als solches invariant lassen.

Man beachte, daß die genannten Veränderungen oder Transformationen in keinem Falle eine Struktur als solche betreffen, sondern immer nur Objekte oder Gegenstände, die unter diese Struktur fallen, also Erscheinungen von ihr sind. Auch bei einer Symmetriebrechung wird nicht die untergeordnete *Struktur* zerbrochen, sondern die unter die Struktur fallenden *Objekte* werden verändert.

Transformationen einer Menge X, das heißt umkehrbar eindeutige Beziehungen zwischen den Elementen von X, bilden im allgemeinen eine Gruppe. Eine *Gruppe G* ist eine Menge G von Elementen mit einer Verknüpfung («Multiplikation»), die zwei Elementen g_1, g_2 aus G eindeutig ein Element g_1g_2 aus G zuordnet, so daß folgende Eigenschaften gelten:

(1) Assoziativität: $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$;
(2) Existenz der Identität: Es gibt genau ein Element e in G, so daß $eg = ge = g$ für alle g in G;
(3) Existenz des Inversen: Für jedes Element g in G gibt es genau ein Element g^{-1} in G, so daß $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Ein Beispiel einer endlichen Gruppe, das heißt einer Gruppe mit endlich vielen Elementen, ist gegeben durch die Gruppe S der Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Diese Symmetrien verändern ein beliebiges solches Dreieck nur in seiner Lage, nicht aber in seiner Struktur.



Figur 5

Seien s, s', s'' die Spiegelungen an den drei Symmetrieachsen eines gleichseitigen Dreiecks und r die Drehung im Gegenuhrzeigersinn um 120° um den Mittelpunkt M (Figur 5). Die Zusammensetzung rs soll bedeuten, daß zuerst r und dann s angewendet wird. Offenbar gilt dann $s' = rs$ und $s'' = r^2s$, wo $r^2 = rr$ eine zweimalige Anwendung von r bedeutet. Führen wir noch die identische, alles gleichlassende Operation e ein, so ergeben sich als Elemente der Gruppe: $S = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$. Dabei gilt $sr = r^2s$ sowie $r^3 = e$ und $s^2 = e$. Mit diesen Relationen läßt sich die Tabelle aller Beziehungen der Elemente untereinander berechnen (*Cayley*sche Gruppentafel):

	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

Mit wenigen Überlegungen läßt sich anschaubar machen, daß diese Gruppe strukturgleich (isomorph) zur Gruppe P der Transformationen oder *Permutationen* (Umordnungen) einer endlichen Menge aus drei Elementen ist. Nehmen wir für die drei verschiedenen Elemente zum Beispiel die ersten drei natürlichen Zahlen 1, 2 und 3, so lassen sich diese auf sechs verschiedene Arten anordnen:

$$\{1, 2, 3\},\ \{2, 3, 1\},\ \{3, 1, 2\},$$
$$\{2, 1, 3\},\ \{1, 3, 2\},\ \{3, 2, 1\}.$$

Uns interessieren diejenigen Operationen, das heißt Transformationen oder Umordnungen (Permutationen), aus denen man aus {1, 2, 3} alle übrigen Anordnungen ableiten kann. Durch die Operation ρ der zyklischen Vertauschung, das heißt durch den Übergang $1\rightarrow2$, $2\rightarrow3$, $3\rightarrow1$, erhält man aus {1, 2, 3} die Anordnung {2, 3, 1}. Den Übergang von {1, 2, 3} nach {3, 1, 2} erhält man dann durch zweimalige Anwendung von ρ, also durch $\rho\rho = \rho^2$. Die Anordnungen {2, 1, 3}, {1, 3, 2} und {3, 2, 1} entstehen aus {1, 2, 3} durch Festhalten eines Elementes und Vertauschen der beiden übrigen Elemente, also durch die Operationen

$$\begin{array}{llll} \sigma: & 1\rightarrow2, & 2\rightarrow1, & 3\rightarrow3; \\ \sigma': & 2\rightarrow3, & 3\rightarrow2, & 1\rightarrow1; \\ \sigma'': & 1\rightarrow3, & 3\rightarrow1, & 2\rightarrow2. \end{array}$$

Versteht man unter der Multiplikation $\rho\sigma$ die Hintereinanderausführung der Operationen ρ und σ, so ergibt sich, wie man leicht nachrechnet: $\sigma' = \rho\sigma$, $\sigma'' = \rho^2\sigma$. Außerdem gilt $\sigma\rho = \rho^2\sigma$ sowie $\rho^3 = \varepsilon$ und $\sigma^2 = \varepsilon$, wobei ε die identische Operation mit $1\rightarrow1$, $2\rightarrow2$, $3\rightarrow3$ bedeutet. Damit ergibt sich als Menge der Elemente der Gruppe der Operationen (Permutationen): $P = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$. Aus den abgeleiteten Relationen ergibt sich weiter die Tabelle aller Beziehungen der Gruppenelemente, das heißt der Permutationen, untereinander:

	ε	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ε	ε	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	ε	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	ε	ρ	$\rho^2\sigma$	σ	$\rho\sigma$
σ	σ	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	ε	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^2\sigma$	σ	ε	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^2	ρ	ε

Ein vergleichender Blick auf die Symmetrietransformationen *r*, *s* und *e* des gleichseitigen Dreiecks sowie die Tabelle der zugehörigen Relationen der Gruppentafel zeigt, daß diesen Operationen tatsächlich dieselbe Verknüpfungsstruktur zugehört wie den Umordnungsoperationen ρ, σ und ε einer Menge von drei Elementen {1, 2, 3}.

Daraus folgt, daß es sich bei diesen beiden konkreten Gruppen um Realisierungen eines und desselben Strukturprinzips, einer sogenannten *abstrakten Gruppe*, handelt. In dieser wird nur die spezielle Verknüpfungsstruktur, nicht aber die konkrete Natur der Elemente beachtet. Davon zu unterscheiden ist zusätzlich das schon weiter oben angegebene *allgemeine Gruppengesetz*, das allen speziellen abstrakten Gruppen als gemeinsames Strukturprinzip zugrunde liegt.

Der Bereich, innerhalb welchem sich eine Veränderung abspielt, ist also in jedem Fall der Objektbereich der Transformationen, das heißt die Menge *X*, auf der die Transformationen operieren. In den obigen Beispielen waren das ein gleichseitiges

Dreieck, das heißt eine Teilmenge der Elemente der Ebene, sowie eine Menge aus drei Elementen {1, 2, 3}. Jeder in einem bestimmten Sinne gesetzmäßigen Veränderung eines (nicht notwendigerweise endlichen) Elementenbereiches, das heißt einer bestimmten Transformation, liegt also einerseits etwas Strukturelles zugrunde, was durch diese Transformation nicht verändert wird, invariant bleibt; andererseits schließen sich alle Transformationen dieser Art im allgemeinen zu einer konkreten Gruppe zusammen, die selbst ein allen Transformationen übergeordnetes Strukturprinzip darstellt. Diesem Strukturprinzip ist dann wiederum die abstrakte Gruppe übergeordnet und derselben das allgemeine Gruppengesetz.

4. Universeller Inhalt und individuelle Erlebbarkeit mathematischer Gesetze

Wie kann etwas im individuellen Bewußtsein Erlebtes einen universellen, von diesem Bewußtsein unabhängigen Charakter haben? Dies ist das Hauptproblem, das es für den Nachweis der objektiven Existenz mathematischer Gesetze zu lösen gilt.[8] Zu seiner Lösung sind direkte und indirekte Verfahren vorgeschlagen worden.[9] Beim *indirekten Verfahren* geht es um den Nachweis, daß ohne die Annahme der Realität mathematischer Gesetze eine sinnvolle, elegante und dem naiven Menschenverstand möglichst plausible Wissenschaft nicht möglich wäre. Solche *Unentbehrlichkeitsargumente* führen letztlich zum *hypothetischen* Realismus, also einer Art Mythos über die Realität der genannten Entitäten, der sich *in diesem Sinne* nicht von anderen Mythen, Legenden oder Glaubensbekenntnissen unterscheidet.[10]

Bei den *direkten Verfahren* zum Nachweis der Realität mathematischer Gesetze geht es um die Analyse der umittelbaren Erfahrungsweise dieser Gesetze. Diese Erfahrung gehört dem Bereich des individuellen Bewußtseins an, ist also nur durch Introspektion zugänglich und wird deshalb von vielen Autoren von vornherein als suspekt, unklar oder unwissenschaftlich abgelehnt. Aus dem scheinbaren Scheitern aller Versuche, anhand der Introspektion zu objektiven Ergebnissen – im Gegensatz zu «subjektiven Erleuchtungen»[11] – zu kommen, wird heute fast nur noch das indirekte Verfahren wissenschaftlich ernst genommen. Mit diesem Essay soll darauf hingewiesen werden, daß die Möglichkeiten des direkten Verfahrens keineswegs erschöpft und hinreichend untersucht sind – abgesehen von der Tatsache, daß sich ein konsequentes wissenschaftliches Bewußtsein mit dem bloßen, wenn auch rational begründeten Glauben an einen Mythos nie zufrieden geben kann und darf.

Bevor der positive Nachweis der Realität mathematischer Begriffe in Angriff genommen werden kann, müssen einige Vorurteile aus dem Wege geräumt werden.

Erstes Vorurteil: Die Inhalte sowie die Verfahrensweisen des mathematischen Denkens entstammen der Konvention. – Die Ursprünge von Konventionen sind notwendigerweise nicht konventioneller Natur: Eine erstmalig aufgestellte «Konvention» kann keiner Übereinkunft entstammen, da sie zunächst niemandem außer dem sie aufstellenden Subjekt bekannt ist. Ist diesem eine Konvention aufstellenden Subjekt aber ein unkonventioneller Zugang zum Denken möglich, so ist nicht einzusehen, warum dies nicht auch für andere Subjekte möglich sein sollte. Im weiteren setzen ausgesprochene oder anderweitig mitgeteilte sowie unausgesprochene Vereinbarungen zwischen Menschen die individuelle Einsicht oder Zustimmung in den Sinn der Vereinbarung voraus, falls man es bei der Übertragung von Konventionen nicht bloß mit blindem Glauben oder Gehorsam zu tun hat.

Zweites Vorurteil: Die subjektive Erfahrung des mathematischen Denkens (Introspektion, Intuition, Erleuchtung usw.) ist außersprachlicher Natur; sie liegt also außerhalb der Wissenschaft. – Hier handelt es sich um eine Verwechslung von Denken und Kommunikation, das heißt um eine Verwechslung von Denkinhalt und sprachlicher Darstellung oder mündlichem Ausdruck dieses Inhaltes. Um zu denken, muß man weder mit sich selber sprechen noch in irgendeiner anderen Weise mit sich selbst kommunizieren. Außerdem kann die Bedeutung sprachlicher Ausdrücke letztlich nicht einer Sprache entnommen werden: die Untersuchung der Bedeutung endet immer bei der *individuellen* Einsicht in die Bedeutung (umgangs-)sprachlicher Ausdrücke.[12] Wäre somit Außersprachliches nicht exakt erfaßbar, so wäre letztlich der Quell des Wissens der wissenschaftlichen Untersuchung entzogen und somit Wissenschaft nur durch außerwissenschaftliche Erfahrungen begründbar.

Drittes Vorurteil: Die Erfahrung des mathematischen Denkens gehört ausschließlich dem Subjekt an. Sie hat keinerlei über das Subjekt hinausgehende Bedeutung. – Die Bestimmung des subjektiven Charakters der Erfahrung des mathematischen Denkens geschieht durch dieses Subjekt selbst und ergibt sich aus der Erfahrung der Eigentätigkeit, die mit dieser Erfahrung verknüpft ist, sowie der Tatsache, daß nur ich selbst unmittelbar erlebe, was ich denke, und kein anderer unmittelbar an meinem (sprachlosen) Denken teil hat. Dies besagt aber nur, daß sowohl die Tätigkeit wie das Bewußtsein über den gedachten Inhalt dem Subjekt angehören; daraus ergibt sich jedoch nichts über die Konstitution des Inhaltes.

Hier besteht oft eine weitere Voreingenommenheit:

Viertes Vorurteil: Das Subjekt erzeugt die Inhalte des mathematischen Denkens. – Für diese Hypothese ist bisher keinerlei *unmittelbar* am mathematischen Denken getätigte Beobachtung angeführt worden. Alle scheinbar für diese Hypothese sprechenden Phänomene betreffen das Bewußtsein der Inhalte, nicht aber diese selbst.

Fünftes Vorurteil: Die Inhalte des mathematischen Denkens sind bestimmt durch die Struktur des psycho-physiologischen kognitiven Apparates. – Zur unmittelbaren Bestätigung dieser These müßte gezeigt werden, daß zur Begründung und Ableitung mathematischer Gesetze *notwendigerweise* explizit die Strukturprinzipien des kognitiven Apparates herbeigezogen werden müssen. Es gibt jedoch keine in der unmittelbaren Erfahrung des mathematischen *Denkens* (*nicht*: der formal-symbolischen Darstellung dieses Denkens) liegenden Anhaltspunkte für eine solche *prinzipielle* Unvollständigkeit oder Abhängigkeit der Mathematik. Im weiteren betreffen alle Argumente für die Abhängigkeit mathematischer Denkinhalte von der Struktur des kognitiven Apparates das *Bewußtsein von* den Inhalten, nicht aber diese *Inhalte* selbst. Schließlich kann auf die prinzipielle Unvereinbarkeit und Verschiedenheit der Bewußtseinsinhalte des mathematischen Denkens von den anhand der Untersuchung des kognitiven Apparates gewonnenen Beobachtungsresultaten hingewiesen werden.[13] Zur besseren Einsicht in die hier verwendeten Argumentationsstrukturen führen wir die Unterscheidung von eigentlichen und uneigentlichen Hypothesen ein.

Eine Hypothese (Modell, Theorie, Struktur) bezüglich eines Tatsachenbereiches heiße *uneigentlich*, wenn es unmittelbar innerhalb dieses Bereiches liegende Beobachtungen gibt, welche die Hypothese rechtfertigen. Es dürfen nicht bloß Schlußfolgerungen zur Bestätigung der Hypothese vorliegen. Ein klassisches Beispiel für eine uneigentliche Hypothese ist folgende Feststellung: Bei einem mit kleiner Auslenkung (Amplitude) frei schwingenden Pendel ist die Schwingungsdauer nur abhängig von der Länge des Pendels.

Eine Hypothese bezüglich eines Tatsachenbereiches heiße *eigentlich*, wenn es keine unmittelbaren Beobachtungen innerhalb dieses Bereiches gibt, welche die Hypothese rechtfertigen. Es liegen nur Schlußverfahren vor, die aus dem vorliegenden Tatsachenmaterial die Existenz von etwas nicht selbst zu diesem Material Gehörigem nahelegen. Als Beispiel kann jedes *indirekte* Verfahren zur Bestätigung des Realismus herangezogen werden.

In der folgenden Untersuchung wird streng darauf geachtet, ob es sich um eigentliche oder uneigentliche Hypothesen handelt. Dies ist von fundamentaler Bedeutung, da es sich nicht um die Untersuchung irgendeines beliebigen Objektes handelt, sondern um etwas, das bei aller wissenschaftlichen Tätigkeit eine grundlegende Rolle spielt: um das Denken, insbesondere in seiner strengen Form des mathematischen Denkens.

Die Naturwissenschaften, insbesondere die Physik, bedienen sich wesentlich mathematischer Gesetze. Wollen sich diese nicht den Vorwürfen der Willkür und der Inkonsequenz aussetzen, muß die Erfahrungsweise des mathematischen Denkens selbst innerhalb des Bereiches der Wissenschaft angesiedelt werden. Im Sinne der *naturalisierten Erkenntnistheorie*[14] bedeutet dies, daß diese Erfahrung auf naturwissenschaftlich erfaßbare, insbesondere physiologische Prozesse zurückgeführt werden soll. Bei genauerem Hinsehen erweist sich dies als *eigentliche* Hypothese, da nichts *innerhalb* des mathematischen Denkens selbst Erlebbares sie bestätigt. Man beachte in diesem Zusammenhang auch die Diskussion des fünften Vorurteils.[15]

Es liegt somit nahe, die dem mathematischen Denken (und damit dem Denken überhaupt) zukommende eigenständige Erfahrungsweise näher zu untersuchen. In Anknüpfung an *Gödel* (1947/64) und *Steiner* (1894/1918) wollen wir die dem mathematischen Denken eigene Einsichtsweise mathematische *Intuition* nennen. Indem wir diesen Ausdruck gebrauchen, orientieren wir uns aber nicht von vornherein in jedem Falle an den Einzelheiten der *Gödel*schen oder *Steiner*schen Definition, sondern entwickeln im nächsten Abschnitt anhand von Erfahrungen am mathematischen Denken selbst genauer, was wir hier darunter verstehen wollen.[16]

5. *Mathematische Intuition*

Die mathematische Intuition muß zunächst vom *Einfall* abgegrenzt werden. Bei letzterem ist dem denkenden Subjekt ein Inhalt gegeben, ohne daß es selbst *unmittelbar* zum Gegebensein dieses Inhaltes durch seine bewußte Tätigkeit beiträgt. Solche Einfälle spielen im Leben eines Mathematikers gewiß eine große Rolle, kommen aber «zufällig» und unterstehen nicht der Kontrolle des individuellen Bewußtseins. Einem fruchtbaren Einfall geht jedoch in der Regel eine intensive Beschäftigung mit mathematischen Inhalten in der «Nachbarschaft» des Inhaltes des Einfalls voraus. Im weiteren schließt sich an den Einfall die eigentliche Beweis-Arbeit: das konkrete Einorden und detaillierte In-Beziehung-Setzen des Einfallsinhaltes mit schon bekannten Inhalten, etwa Axiomen, und aus denselben abgeleiteten Sätzen.

Unter *mathematischer Intuition* sollen hier nur diejenigen Phasen einer solchen Arbeit verstanden werden, bei welchen der Mathematiker eine vollkommene Klarheit und Übersicht hinsichtlich seines Tuns hat, wo er genau weiß, wovon er ausgegangen ist und wie er zu den Inhalten gelangt ist, über die er gerade denkt. Dies bedeutet keine Abwertung andersartiger Phasen des mathematischen Denkens (Heuristik, Einfälle, Analogien, Spiele, usw.), sondern weist diesen einen vorbereitenden, jedoch keinen bestimmenden Charakter für die schließliche intuitive Einsicht zu.

Die mathematische Intuition ist an zwei Bedingungen gebunden: die eine betrifft die Reinheit des denkend hervorgebrachten Inhalts und die andere die Art und Weise des Hervorbringens. Unter Reinheit des Inhalts verstehen wir die vollkommene Loslösung des mathematischen Denkens von konkreten Beispielen aus der sinnlichen Anschauungswelt. So geht es etwa bei dem in Abschnitt 1 diskutierten Fall nicht um irgendwelche irgendwo erscheinenden Kreise, sondern um die *alle* Kreise konstituierenden, gesetzmäßigen Prinzipien.

Was die Art und Weise des Hervorbringens betrifft, so ist der Grad der Überschaubarkeit und die Klarheit der Einsicht in die innere Notwendigkeit eines Gedankeninhaltes abhängig vom Grad der subjektiven Beteiligung am Denkprozeß. Nur dasjenige, was man selbst zum Dasein, zur Erscheinung bringt, kann man vollkommen durchschauen. Alles ohne eigene Tätigkeit dem Subjekt Gegebene ist dem aufmerksamen Subjekt zunächst ein Problem. In der mathematischen Intuition ist dem denkenden Subjekt kein Inhalt gegeben, ohne daß es ihn selbst hervorgebracht hätte. Dies bedeutet jedoch nicht, daß das mathematische Denken seine Inhalte selbst erzeugt (siehe voriger Abschnitt); vielmehr ist es nicht nur bei jedem Schritt des Geschehens dabei, sondern *vollzieht* diese Schritte autonom.

Innerhalb der mathematischen Intuition können zwei Erlebnisbereiche voneinander unterschieden werden: Der eine betrifft die Tätigkeit des Subjektes (siehe folgender Abschnitt) und der andere die Konstitution des Inhaltes.

Im Prozeß der mathematischen Intuition lassen sich an den *Inhalten des mathematischen Denkens*, das heißt an den mathematischen Begriffsinhalten, hier auch Gesetze genannt, drei Eigenschaften unterscheiden, die für die Beurteilung der Konstitution, der ontologischen Beschaffenheit derselben, eine fundamentale Rolle spielen. Auf eine dieser Eigenschaften wurde schon weiter oben aufmerksam gemacht: die innere *Notwendigkeit* und vollkommene *Durchschaubarkeit* (siehe Abschnitt 1 und 3). Eine weitere betrifft die *Unveränderbarkeit* der Gesetze durch das denkende Subjekt. Die Gesetze bieten einem entsprechenden Versuch (passiven) Widerstand und lassen sich in ihrem Inhalt weder verändern noch willkürlich mit anderen Gesetzen verknüpfen. Bildlich gesprochen wird das mathematische Denken bei Aufrechterhaltung des Intuitionszustandes durch die Gesetze «geführt» – ähnlich wie die bewußt tastende

Hand eines Menschen auf einem Marmor-Relief. Das Relief drängt sich der Hand nicht auf, läßt sich aber auch durch diese nicht verändern. Eine scheinbar gelungene Veränderung eines Gesetzes führt entweder zu einem anderen Gesetz oder betrifft bloß das konkrete Verhältnis des Subjektes zum gedachten Inhalt. Sogenannte Begriffserweiterungen oder begriffliche Verallgemeinerungen (zum Beispiel des Gesetzes der Multiplikation) sind keine Veränderungen eines Begriffes als solchem, sondern Ausdruck einer veränderten Perspektive des denkenden Subjektes zum entsprechenden Gesetzesbereich.

In der mathematischen Intuition zeigt sich der eigenständige, auf sich selbst beruhende Charakter mathematischer Gesetze. Sie sind also im Sinne von Abschnitt 3 Invarianten der Operationen des individuellen mathematischen Denkens.[17] Den durch das individuelle Subjekt ausgeführten Operationen liegt ein ihnen übergeordnetes Strukturprinzip zugrunde, nämlich das universelle Prinzip der mathematischen Intuition, das zwar jeder Mathematiker verwendet, das aber keinem privat angehört.

Hier stellt sich die Frage, ob mathematische Gesetze nicht nur relativ zum denkenden Subjekt invariant, sondern überhaupt (absolute) Invarianten sind, also nicht nur unveränderbar, sondern unveränderlich. Die *Unveränderlichkeit* von Gesetzen bedeutet, daß deren Inhalt weder durch andere Wesen noch durch sich selbst einer Veränderung unterworfen werden kann. Die Unveränderlichkeit von Gesetzen impliziert deren Unveränderbarkeit, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Zunächst muß festgehalten werden, daß kein erfahrbarer, also nicht nur eigentlich hypothetischer Grund für die Annahme der Veränderlichkeit mathematischer Gesetze vorliegt. Was sich ändert, ist höchstens die Einstellung zu oder das Bewußtsein von diesen Gesetzen, nicht aber diese selbst.

Der psychologisch verständliche Widerstand gegen die Unveränderlichkeit der Gesetze richtet sich nicht in erster Linie gegen mathematische Gesetze, sondern gegen die Annahme von unveränderlichen Gesetzen überhaupt. Dies scheint sich durch die sogenannte Alltagserfahrung zu bestätigen. Man macht sich dabei aber nicht genügend klar, daß die Annahme einer prinzipiellen Veränderlichkeit aller Gesetze die Konsequenz hätte, daß es ein oder mehrere «Supergesetze» geben müßte, welche sich nicht verändern und die bei jeder konkret nachweisbaren Veränderung invariant bleibenden Strukturen (Invarianten) darstellen. Denn angenommen, das Gesetz A geht in das Gesetz B über, also A ändert sich derart, daß es zu B wird, so stellt sich das Problem, aufgrund welcher Eigenschaft B als aus A hervorgegangen bestimmt werden kann. Dies ist nur möglich, wenn es eine für A und B wesentliche Eigenschaft C gibt, wodurch B als etwas mit A noch in irgendeiner Weise Verwandtes erkannt werden kann. Dazu muß aber die Gesetzmäßigkeit C relativ zum Übergang von A in B eine invariante Eigenschaft darstellen, kann also keiner Veränderung unterliegen. Das Prinzip C ist somit unveränderlich, und A und B gehören demzufolge nicht dem Gesetzesbereich an.

Es könnte eingewendet werden, daß es sich hier nur um einen Nachweis der *relativen* Unveränderlichkeit handelt, nicht aber um einen solchen der absoluten Unveränderlichkeit. Das ist aber nicht der Fall, denn die hinter diesem Einwand stehende

Behauptung, alles sei relativ, ist selbst im absoluten Sinne aufzufassen, folglich in sich widersprüchlich.

Daraus ergibt sich, daß der Bereich der Veränderung nicht im Gesetzesbereich anzusiedeln ist, sondern im Erscheinungsbereich, das heißt dem Ort, wo die Gesetze wirken, operieren. Die Situation ist hier analog zum Verhältnis der abstrakten Gruppe zu den Elementen eines ihrer möglichen Transformationsbereiche: die Operationen der Gruppe betreffen nur diese Elemente oder Mengen davon (siehe Abschnitt 3). – Manchmal wird hier eingewendet, es gäbe doch auch «flexible» oder «lebendige» Begriffe. Damit kann nach den obigen Ausführungen nicht eine Selbstveränderlichkeit der Begriffe gemeint sein, sondern eine flexible oder lebendige Perspektive des denkenden Subjektes relativ zu in sich bestimmten, unveränderlichen Gesetzesinhalten.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß es nicht in der Natur des Prinzips der mathematischen Intuition liegt, daß es nur auf mathematische Inhalte angewendet werden kann. Es kann nicht von vornherein ausgeschlossen werden, daß auch andere, außerhalb des Gebietes der Mathematik liegende Begriffe in der *Form* der mathematischen Intuition zur Erscheinung gebracht werden können.

6. Gesetze als wirksame Prinzipien

Im vorangehenden Abschnitt wurde auf zwei Erlebnisbereiche im Prozeß der mathematischen Intuition hingewiesen: Der eine umfaßt die Tätigkeit des Subjekts und der andere die Konstitution des Inhalts. Wir wenden uns nun der *Tätigkeit* zu. Zunächst gilt im Prozeß der mathematischen Intuition der Fokus der Aufmerksamkeit dem gedachten Inhalt. Dazu kann aber auch ein deutliches Bewußtsein über die Tätigkeit treten. Damit wird der Übergang vom *naiven* zum *kritischen* Denken möglich: Im kritischen Denken ist man sich der Gesetze seines Tuns bewußt, während man im naiven Denken zwar gemäß dieser Gesetze tätig, die Aufmerksamkeit aber ausschließlich den gedachten Inhalten gewidmet ist. Mit kritischem Denken ist also nicht allein gemeint, daß man das Gesetz des Denkens zum *Inhalt* des Denken erhebt. Dies ist zwar als Vorbereitung notwendig, aber für das aktuelle kritische Denken nicht hinreichend.

Ist man einmal anhand der Beobachtungen am Denken auf dieses Gesetz aufmerksam geworden und hat es deutlich im Denken erfaßt, dann kann man es in weiteren Akten bewußt dem aktuellen Denken zugrunde legen. Diese aktuelle Handhabung des Denkgesetzes hinsichtlich der gedachten Inhalte ist kritisches Denken. Insbesondere soll ab jetzt unter *mathematischer Intuition* nur noch ein solches kritisches mathematisches Denken verstanden werden.

Worin besteht das Gesetz des Denkens? Es enthält die Forderung, daß nur diejenigen Begriffsinhalte als Denkinhalt betrachtet werden, welche bewußt-tätig vom denkenden Subjekt zur Erscheinung gebracht werden. Dies betrifft sowohl die Komponenten einer Begriffsverknüpfung wie diese selbst. Den in der Form der mathematischen Intuition dabei auftretenden reinen Gesetzen kommt keinerlei Eigenaktivität zu, sie sind vollkommen passiv und haben trotz alledem ein Eigensein, was sich in ihrer Unveränderbarkeit und Unveränderlichkeit ausdrückt (siehe Abschnitt 5). Die Invarianz dieser Intuitionsinhalte begründet die in sich bestimmte und keiner Willkür unterworfene Konstitution des Denkens (siehe Abschnitt 1 und 3). Wird diese Tatsache nicht ernstgenommen, so kann das Denken in der Form der mathematischen Intuition als ein zugleich phantasievoll-kreativer und vollkommen in sich notwendiger Prozeß nicht in seiner eigentlichen Natur erkannt werden.

Im Gegensatz zu den Inhalten des mathematischen Intuitionsprozesses ist das Prinzip, gemäß dem dieses Geschehen verläuft, aktuell-tätig, wirksam. Denn durch und gemäß diesem wirksamen Prinzip werden die Inhalte des Denkens hervorgebracht und aufeinander bezogen.

Der Seinszustand des kritisch gehandhabten Denkprinzips ist also ein wesentlich anderer als derjenige der dadurch hervorgebrachten Begriffsinhalte. Ersterer ist tätig-wirksam, letztere sind passiv-widerständig.

Damit haben wir ein tätig-wirksames Prinzip gefunden, das nicht der sinnlichen Erfahrungswelt angehört. Denn wenn sich in dieser Tätigkeit kein *unmittelbar* erfahrbarer Hinweis auf eine solche Abhängigkeit findet, so besteht kein Anlaß, eine solche zu postulieren es sei denn im Sinne einer eigentlichen Hypothese. Im weiteren erscheint in dieser Tätigkeit nichts der Sinneswelt Angehöriges oder aus ihr Entnommenes: Alles muß durch diese Tätigkeit selbst erst zur Erscheinung gebracht werden. Alle mir bekannten Beweise für die Abhängigkeit dieser Tätigkeit von der psycho-physiologischen Konstitution des Menschen beziehen sich auf das Bewußtsein von dieser Tätigkeit, nicht aber auf diese selbst.

Das genannte tätig-wirksame Prinzip hat eine Eigenschaft, die bisher nicht besonders hervorgehoben wurde: Es ist nicht aus sich selbst heraus tätig, sondern wird getätigt. Denn die mathematische Intuition betätigt sich nicht in uns, sondern wir betätigen sie. Mit anderen Worten: der Quell der Denktätigkeit liegt nicht innerhalb, sondern außerhalb des Denkgesetzes. Nennt man diesen Tätigkeitsquell das «Ich», so müssen dem Ich die Eigenschaften der Selbsttätigkeit sowie der Betätigung anderer Gesetze zukommen. In diesem Sinne ist das Ich als Tätigkeitsquell des Denkens ein sich selbst und anderes (insbesondere das Denken) betätigendes Prinzip. Damit ist auf ein durch sich selbst wirksames sowie andere Gesetze bewirkendes Prinzip hingewiesen.

7. Geisteswissenschaft

Die Geisteswissenschaften im traditionellen Sinne, als universitäre Disziplinen aufgefaßt, beschäftigen sich mit den *Produkten* des menschlichen Geistes. In Anknüpfung an Goethe und unter anderem an dessen Begriff einer Erfahrung «der höhern Art» (1792) entwickelt *Rudolf Steiner* (1861 1925) die anthroposophische Geisteswissenschaft.[18] Er knüpft jedoch nur in historischem Sinne an *Goethe* an und entfaltet eine durch sich selbst begründete, auf unmittelbarer Beobachtung und selbständiger Begriffsbildung beruhende systematische Darstellung dieser Wissenschaft. Dabei richtet sich diese Geisteswissenschaft in erster Linie auf den *aktuellen* Geist, das heißt auf aus sich selbst heraus tätig-wirksame geistige Prinzipien oder Wesenheiten, die zudem in der Welt tätig sind.

Im Sinne der Philosophie des Mittelalters sind die Inhalte der mathematischen Intuition *universalia post rem*, auch *universalia in mente* genannt, das heißt Erscheinungen universeller Gesetze im individuellen Denkbewußtsein des Menschen. Davon zu unterscheiden sind die in der erscheinenden Welt, insbesondere in der Natur wirksamen Prinzipien, die *universalia in re*, sowie die für sich selbst, in sich selbst (und nicht in anderem) wirksamen Prinzipien, *universalia ante rem*.

Gemäß den vorangehenden Ausführungen handelt es sich bei dem «Ich» genannten Prinzip um ein *universale in re*, nämlich um das im Denken wirksame tätige Prinzip. Damit ist die Existenz *eines* solchen Prinzips nachgewiesen und damit auch die Real-Möglichkeit (und nicht bloß Denkbarkeit im Sinne einer eigentlichen Hypothese oder Ideal-Möglichkeit) einer Wissenschaft des aktuellen Geistes, und zwar mit einer Klarheit, die nicht unter diejenige der mathematischen Intuition hinuntersinkt, sondern über diese hinausgeht. Denn es handelt sich dabei nicht um eine Art privater mystischer Erleuchtung, sondern um einen mit mathematischer Präzision von jedem Individuum, das sich darauf einlassen will, nachvollziehbaren Prozeß. Ob es andere Erlebnisse derselben Art, aber anderen Inhaltes gibt, das heißt Erlebnisse anderer wirksamer Wesenheiten in derselben Klarheit, kann aufgrund dieser Sachlage erwartet, aber nicht erzwungen werden. Jedenfalls kann eine solche Erfahrung nicht von vornherein ausgeschlossen werden, hängt aber von den Lebens- und Weltumständen ab wie bei entsprechenden Vorgängen in der Sinneswelt, wo die Erfahrung eines bestimmten Sachverhaltes, etwa einer besonderen Tierart in Afrika, nicht nur vom Menschen, sondern auch von nicht seiner Kontrolle unterliegenden Umständen bedingt ist.

Rudolf Steiners Begründung der anthroposophischen Geisteswissenschaft knüpft genau an diese Ich-Erfahrung im Rahmen der mathematischen Intuition an und macht sie zum Ausgangspunkt und Kriterium aller weiteren, in andere Bereiche vordringenden Geist-Erkenntnis.[19] Die Mathematik betrachtet er in diesem Zusammenhang als eine sachgemäße und wesentliche Vorbereitung des Erkenntnisweges der anthroposophischen Geisteswissenschaft[20] und verwirft alle Erkenntnismethoden, die unterhalb der Klarheit und Strenge der mathematischen Intuition angesiedelt sind. Es geht dabei letztlich nicht um die mathematische Intuition *mathematischer* Begriffsinhalte, sondern um in der Form der mathematischen Intuition verlaufende Erkenntnisse nicht-mathematischer Inhalte. *Steiner* verwendet schon 1894/1918 in seiner «Philosophie der Freiheit» die Bezeichnung «Intuition» für im wesentlichen denjenigen Prozeß, den wir hier mathematische Intuition genannt haben.[21] *Steiner* hat also das *Plato*sche Ideal einer Wesensschau, vorbereitet durch die Umlenkung der Seele vermöge der mathematischen Erkenntnis, im vollsten Sinne und in mathematischer Klarheit verwirklicht. Zusätzlich hat er die *Goethe*schen Forderungen nach der Strenge der mathematischen Methode, verbunden mit der Ausbildung eines höheren Organs für die nichtsinnliche Anschauung, als methodische Prinzipien der gesamten Geisteswissenschaft zugrundegelegt.

Aus dieser Darstellung kann auch entnommen werden, daß die anthroposophische

Geisteswissenschaft *Rudolf Steiners* keine Utopie oder ein unerreichbarer Mythos ist. Sie ist eine uneigentliche Hypothese, das heißt, eine von jedem Menschen, der sich auf die mathematische Intuition einlassen kann, im Prinzip nachvollziehbare Tatsache.

Ist der Mensch im Kern ein geistiges Wesen und kann gezeigt werden, daß er zu diesem Kern auch einen unmittelbaren Zugang hat, so hat dies fundamentale Konsequenzen, die in vielem die gängigen wissenschaftlichen Ansätze zumindest als ergänzungsbedürftig erscheinen lassen. Als Weg zu dieser Einsicht kann die Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Vielleicht wird dies einmal als entscheidender Kulturbeitrag der Mathematik bewertet werden können.

Für die sorgfältige Durchsicht einer vorläufigen Fassung des Manuskriptes sowie für einige Verbesserungsvorschläge danke ich insbesondere Stephan Baumgartner, Bernd Gerold, Peter Gschwind, Mario Howald, David Speiser und Georg Unger.

Dieser Aufsatz ist der Beitrag des Autors zu einer Fachtagung über «Goethe als Wissenschaftler (Goethe Szienziato)», in Castelgabbiano, Italien, 20.-22. Mai 1994. Er erschien in englischer Übersetzung durch David J. Heaf im «Newsletter of the Science Group of the Anthroposophical Society in Great Britain», Articles Supplement, Vol. 1, September 1995, S. 18-37.

Literatur

Benacerraf, Paul, und Putnam, Hilary (Hg.) (1983): Philosophy of Mathematics. Selected Readings. Cambridge.

Bieri, Peter (1992): Was macht Bewußtsein zu einem Rätsel? Spektrum der Wissenschaft, Oktober 1992, S. 48-56.

Dyck, Martin (1956): Goethe's Views on Pure Mathematics. Germanic Review, Bd. 32, S. 49-69.

Dyck, Martin (1958): Goethe's Thought in the Light of his Pronouncements on Applied and Misapplied Mathematics. Publications of the Modern Language Association, Bd. 73 (5.1), S. 505-515. (Deutsche Übersetzung: Goethes Verhältnis zur Mathematik, Goethe-Jahrbuch, 1961, Bd. 23, S. 49-71.)

Essler, Wilhelm K. (1990): Erkenntnis und Erleuchtung. Zeitschrift für Entwicklungspädagogik, Bd. 13, Heft 1, S. 12 16.

Gödel, Kurt (1947/64): What is Cantor's Continuum Problem? In: Benacerraf/Putnam (1983), S. 470-485.

Goethe, Johann Wolfgang (1792): Der Versuch als Vermittler von Objekt und Subjekt. In: Goethe, Die Schriften zur Naturwissenschaft (Leopoldina), Erste Abteilung, Bd. 8, Weimar 1962, S. 305-315.

Grauert, Hans (1986): Was erforschen die Mathematiker? Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Mainz, Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse, 1986, Nr. 3.

Heusser, Peter (1989): Das zentrale Dogma nach Watson und Crick und seine Widerlegung durch die moderne Genetik, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. 99, S. 1-14.

Husserl, Edmund (1911): Philosophie als strenge Wissenschaft. Logos, Bd. I, 1910/11, S. 289-341. Reprint: Frankfurt 1965.

Maddy, Penelope (1990): Realism in Mathematics. Oxford.

Mainzer, Klaus (1988): Symmetrien der Natur. Ein Handbuch zur Natur- und Wissenschaftsphilosophie. Berlin.
Mittelstraß, Jürgen (1985): Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre. Gymnasium, Bd. 92, S. 399-418.
Quine, Willard van Orman (1948): On what there is. In: Quine (1980), S. 1-19. (Deutsche Übersetzung in: Stegmüller (1978), S. 102 123.)
Quine, Willard van Orman (1951): Two dogmas of empiricism. In: Quine (1980), S. 20- 46. (Deutsche Übersetzung in: Sinnreich (1972), S. 167-194).
Quine, Willard van Orman (1969): Epistemology Naturalized. In: Ontological Relativity and Other Essays. New York/London 1969, S. 69-90.
Quine, Willard van Orman (1980): From a Logical Point of View. Cambridge (2. Aufl.).
Radbruch, Knut (1989): Mathematik in den Geisteswissenschaften. Göttingen.
Sinnreich, Johannes (Hg.) (1972): Zur Philosophie der idealen Sprache. München.
Stegmüller, Wolfgang (1978): Das Universalien-Problem. Darmstadt.
Steiner, Rudolf (1884-1897): Einleitung zu Goethes Naturwissenschaftlichen Schriften. Dornach 1987 (GA 1, 4. Aufl.).
Steiner, Rudolf (1886/1924): Grundlinien einer Erkenntnistheorie der Goetheschen Weltanschauung. Dornach 1979 (GA 2, 7. Aufl.).
Steiner, Rudolf (1894/1918): Die Philosophie der Freiheit. Dornach 1987 (GA 4, 15. Aufl.).
Steiner, Rudolf (1904): Mathematik und Okkultismus. In: Steiner (1984), S. 7-18.
Steiner, Rudolf (1908/18): Philosophie und Anthroposophie. In: Steiner (1984), S. 66-110.
Steiner, Rudolf (1911): Die psychologischen Grundlagen und die erkenntnistheoretische Stellung der Anthroposophie. In: Steiner (1984), S. 111-144.
Steiner, Rudolf (1984): Philosophie und Anthroposophie. Gesammelte Aufsätze 1904-1923. Dornach 1984 (GA 35, 2. Auflage).
Wille, Rudolf (Hg.) (1988): Symmetrie in Geistes- und Naturwissenschaft. Berlin/Heidelberg.
Ziegler, Renatus (1992): Mathematik und Geisteswissenschaft. Mathematische Einführung in die Philosophie als Geisteswissenschaft. Dornach.
Ziegler, Renatus (1993): Goethes Ideen zur Mathematik. Materialien zu Goethes Mathematikverständnis. Dornach.
Ziegler, Renatus (1995): Selbstreflexion. Studien zur Selbstbeziehbarkeit im Denken und Erkennen. Dornach.

Anmerkungen

[1] Siehe dazu *Radbruch* (1989).

[2] Für eine traditionelle Perspektive zur Mathematik, die wesentlich von unserer abweicht, siehe etwa *Grauert* (1986).

[3] Insofern diese im menschlichen Denken anwesend sind, spricht man auch von *Begriffen*. Damit sind also nicht die Worte, die sprachlichen Ausdrücke gemeint, sondern deren begriffliche *Bedeutung*.

[4] Für eine Anwendung dieser Gesichtspunkte auf die Interpretation moderner Entwicklungen in der Molekularbiologie, insbesondere in der Genetik, siehe *Heusser* (1989).

[5] *Plato*, Der Staat, 509c ff. Für eine weitergehende Diskussion von *Platos* Auffassung der Mathematik siehe etwa *Ziegler* (1992), Kapitel II, sowie *Mittelstraß* (1985).

[6] *Goethe* (1792). Eine ausführliche Darstellung der in diesem Abschnitt angedeuteten Anschauungen *Goethes* mit zahlreichen Belegen findet man in *Ziegler* (1993). Siehe auch *Dyck* (1956) und (1958) sowie *Ziegler* (1992, Kapitel VI).

[7] Siehe dazu etwa *Wille* (1988) oder *Mainzer* (1988).

[8] Um Mißverständnisse zu vermeiden, wollen wir betonen, daß hier nur Gesetze der *reinen Mathematik* gemeint sind. Es geht also nicht um das Problem der Übereinstimmung mathematischer Modelle mit einem außerhalb der Mathematik liegenden Wirklichkeitsgebiet.

[9] Eine kurzgefaßte, prägnante Übersicht zu diesem Problem und verschiedenste Lösungsversuche in der neueren, vor allem anglo-amerikanischen Philosophie, gibt *Maddy* (1990, Kapitel 1); dort finden sich auch weitere Literaturangaben.

[10] Dies hat insbesondere *Quine* (1951, S. 44f. und 1948, S. 18f.) deutlich gemacht.

[11] Siehe dazu *Essler* (1990).

[12] Die Umgangssprache ist Metasprache aller formalen Sprachen. Siehe dazu *Essler* (1990).

[13] Von den tiefgehenden, bisher nicht gelösten Problemen, das Phänomen des menschlichen Bewußtseins auf physiologische Daten zurückzuführen, handelt zum Beispiel *Bieri* (1992).

[14] Dieser Ausdruck geht auf *Quine* (1969) zurück. Siehe dazu auch *Maddy* (1990), Kapitel 1 und 2.

[15] Gegen eine Naturalisierung der Philosophie und Psychologie hat schon *Edmund Husserl* gekämpft, allerdings ohne anhaltenden Erfolg. Siehe dazu etwa *Husserl* (1911).

[16] *Gödel* versteht unter der mathematischen Intuition nicht in erster Linie ein unmittelbares Wissen, sondern eine Art Ideenbildung anhand von etwas unmittelbar Gegebenem. Ein genauere Bestimmung der Funktion sowie der Elemente dieser Intuition hat *Gödel* nicht gegeben; seine Begriffsbestimmung der Intuition wurde deshalb von verschiedenen Seiten in Frage gestellt und als unbrauchbar zur Seite geschoben.
Gödels eigene Charakterisierung ist noch dadurch verkompliziert, daß er sie in Analogie zur Sinneswahrnehmung entwickelt. Eine Diskussion verschiedener Einwände und daran anschließender naturalisierter Lösungsversuche findet man in *Maddy* (1990, Kapitel 1.3 und 2).

[17] Aus dieser Tatsache erklärt sich auch die im Prinzip unproblematische Verständigung innerhalb der internationalen Mathematiker-Gemeinschaft.

[18] Siehe dazu *Steiner* (1884 1897 und 1886/1924) sowie *Ziegler* (1993).

[19] Siehe dazu insbesondere *Steiner* (1894/1918, 1908/18, 1911).

[20] *Steiner* (1904). Siehe dazu *Ziegler* (1992), wo viele im vorliegenden Essay bloß angedeutete Gedanken ausführlich entwikelt und begründet werden. Siehe dazu auch *Ziegler* (1995).

[21] Siehe zum Beispiel *Steiner* (1894/1918, Kapitel V, S. 95 und Kapitel IX, S. 146, Kapitel X, S. 181f.).

Dr. Renatus Ziegler
Mathematisch-Astronomische Sektion
Goetheanum
4143 Dornach