Der folgende Aufsatz ist einem im Entstehen begriffenen umfangreicheren Manuskript entnommen mit dem Arbeitstitel "Zur Natur der Zahlen – Mathematische, logische und erkenntniswissenschaftliche Untersuchungen im Umkreis der Gesetzmäßigkeiten natürlicher Zahlen". Für die bibliographischen Angaben siehe man den vorangehenden Beitrag.

PRINZIPIELLE GRENZEN DER SYMBOLISIERBARKEIT: DIE FINSLERSCHEN SÄTZE

Renatus Ziegler

Um den Stellenwert von Finslers Beitrag zur Bestimmung der Grenzen der Symbolisierbarkeit genauer ins Auge zu fassen, muß man auf Gödels einflußreiche Arbeit [1931] zurückkommen. Für den hier betrachteten Zusammenhang ist vor allem entscheidend, daß Gödel dort zum ersten Mal eine präzise Definition eines symbolischen Kalküls als Grundlage der Darstellung der Mathematik in symbolisierter Form gegeben hat (Prädikatenkalkül erster Stufe). Wir wollen drei zentrale Punkte dieser Arbeit hervorheben und diese mit drei wesentlichen Aspekten der Finslerschen Untersuchungen [1926] in Beziehung setzen.

(1) Gödel untersucht mit sprachlich-symbolischen Mitteln symbolische Kalküle. Er kommt dadurch nicht aus dem sprachlichen Bereich heraus, er bezieht sich nicht explizit auf prinzipiell Außersprachliches oder Gedankliches. Damit leistet seine Arbeit [1931] insbesondere einen Beitrag zur Abgrenzung verschiedener Sprachebenen *innerhalb* des sprachlich Ausdrückbaren, betrifft also *sprachinterne* Differenzierungen und nicht das Verhältnis von symbolischer Ausdrückbarkeit zu gedanklichen Inhalten.

(2) Mit Hilfe einer präzisen Bestimmung symbolischer Systeme konnte er weiter zeigen, daß wenn ein Satz oder ein Satzsystem überhaupt symbolisch ausdrückbar ist, daraus nicht auf dessen effektive Entscheidbarkeit bzw. Repräsentierbarkeit in einem geeignet festgelegten symbolischen Kalkül geschlossen werden kann (erster Unvollständigkeitssatz). Mit anderen Worten, es gibt keinen universellen symbolischen Kalkül, in welchem alles prinzipiell symbolisch ausdrückbar ist, das heißt es existieren zu jedem genügend umfassenden, mindestens die elementare Arithmetik enthaltenden symbolischen Kalkül nicht entscheidbare Sätze bzw. nicht repräsentierbare Satzsysteme.

(3) Im zweiten Unvollständigkeitssatz konnte Gödel zeigen, daß wenn ein Satzsystem symbolisch widerspruchsfrei ist, dann ist diese Tatsache nicht mit den

Mitteln des entsprechenden symbolischen Kalküls beweisbar (und damit unentscheidbar in diesem Kalkül).

Wir kommen zur Darstellung und Diskussion von Finslers Arbeit [1926]. Wir halten uns dabei nicht streng an die Terminologie Finslers. Inbesondere ersetzen wir seinen Ausdruck "formal" durch den in diesen Untersuchungen gebräuchlichen Ausdruck "symbolisch". "Formal" reservieren wir für die klassisch-philosophische Bedeutung dieses Ausdrucks im Sinne der formalen Logik, das heißt einer Logik der Denk*formen* im Gegensatz zu einer Logik der Denk*inhalte*. [Genauere Untersuchungen zu dieser Unterscheidung finden sich in dem genannten Manuskript.]

(1) Finsler geht es nicht, wie Gödel, um eine interne Feindifferenzierung symbolischer Systeme oder Kalküle; er muß deshalb seinen Untersuchungen auch keine scharfe Definition eines solchen Kalküls zugrundelegen, da es ihm um das Problem der symbolischen Darstellbarkeit und Beweisbarkeit überhaupt geht (siehe dazu auch R. Ziegler, "Introduction to Philosophical Part" in Booth/Ziegler [1996], S. 9–19). Seine Arbeit betrifft insbesondere die Grenze zwischen symbolischer Darstellung und formallogischer Darstellung mathematischer Gedankeninhalte.

(2) Finsler zeigt anhand der Paradoxie (oder Antinomie) der endlichen Definierbarkeit, daß aus der Denkbarkeit eines mathematischen Inhaltes nicht auf dessen symbolische Darstellbarkeit geschlossen werden kann.

Wir gehen aus von einem nicht weiter beschränkten Bereich der Mathematik, der zumindest die elementare Arithmetik umfaßt (man denke etwa an die gesamte Analysis, inklusive der klassischen Mengenlehre). Dieser Bereich sei Modell eines symbolischen Prädikatenkalküls, dessen Stufigkeit endlich, ansonsten aber nicht weiter festgelegt sei. Eine feste Anordnung der Symbolmenge soll als die alphabetische Anordnung gelten. Es gibt dann außer Variablen über Elementen (natürliche Zahlen, reelle Zahlen, Mengen) auch Variablen von Variablen, Variablen von Variablen von Variablen etc., entsprechend werden Prädikatenvariablen und Variablen von Prädikatenvariablen eingeführt etc. Durch die syntaktischen Regeln des Prädikatenkalküls wird genau festgelegt, welche (endlichen) Zeichenreihen erlaubte Ausdrücke darstellen, und durch die Modellbeziehung wird die Bedeutung der jeweiligen Symbole und Formeln geregelt.

Die *Modellbeziehung* präzisiert, wann ein symbolischer Ausdruck φ bei einer Interpretation der Formeln durch konkrete Elemente (wie etwa Zahlen) und konkrete Prädikaten über diesen Gegenstände (wie Nachfolger, Addition, Multiplikation etc.) in eine *wahre* Aussage übergeht. Dies setzt natürlich die Kenntnis über die Wahrheit und Falschheit der Beziehungen der Gegenstände untereinander voraus. Diese

Einsicht ist nur mit mathematisch-inhaltlichen Überlegungen, also weder durch formallogische noch durch symbolisch-logische Mittel, erreichbar.

Sei φ ein beliebiger Ausdruck, das heißt eine symbolische Formel im Rahmen des gegebenen symbolischen Kalküls. Ist bei einer Interpretation von φ durch konkrete Elemente und Prädikate die entsprechende Aussage wahr, so sagt man, diese Interpretation sei ein *Modell* von φ. Man sagt auch: Diese Interpretation *erfüllt* φ oder φ *gilt* bei dieser Interpretation.

Ein mathematisches Objekt heiße *endlich definierbar*, wenn es einen endlichen Ausdruck (eine aus endlich vielen Zeichen des Kalküls bestehende Formel) gibt, die vermöge der Modellbeziehung erfüllbar ist.

Wir betrachten insbesondere *Dualfolgen*, das heißt aus den Zahlen 0 und 1 gebildete Folgen, einschließlich den nur aus Nullen und Einsen bestehenden Folgen. Zwei Folgen $\{d_k\}$ und $\{e_k\}$ sind genau dann gleich, wenn sie in *allen* Gliedern übereinstimmen: $\{d_k\} = \{e_k\}$ genau dann, wenn $d_k = e_k$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Eine Folge $\{d_k\}_n$ von Dualfolgen kann nicht alle Dualfolgen enthalten: Die Menge der Dualfolgen ist nicht abzählbar. Denn zu jeder Folge von Dualfolgen $\{d_k\}_n$ gibt es nach dem Cantorschen Diagonalverfahren eine *Antidiagonalfolge* $\{a_i\}$ mit $\{a_i\} \neq \{d_i\}_i$, das heißt $a_i = 1$ falls $\{d_i\}_i = 0$ und $a_i = 0$ falls $\{d_i\}_i = 1$.

Beispiele für endlich definierbare Dualfolgen:

$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$	$d_k = 1$ für alle $k \in \mathbf{N}$.
$\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$	$d_1 = 1, d_{2k} = 0, d_{2k+1} = 1$, für alle $k \in \mathbf{N}$.
$\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$	$d_k = 1$ für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $d_k = 0$ sonst.
$\{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$	$d_k = 1$ für k teilbar durch 5 und $d_k = 0$ sonst.

Die Gesamtheit aller *endlich definierbaren* Dualfolgen ist abzählbar. Dies ergibt sich aus der Abzählbarkeit endlicher Formeln. Eine Abzählung dieser Formeln kann etwa dadurch bewerkstelligt werden, daß man die Formeln erstens nach der Größe und zweitens nach der alphabetischen Reihenfolge der Symbole ordnet. Daraus ergibt sich vermöge derjenigen Formeln, die eine Dualfolge definieren, eine abzählbare Folge F von endlich definierbaren Dualfolgen.

Vom Gesichtspunkt der symbolisch darstellbaren mathematischen Inhalte sind damit *alle* Duafolgen erfaßt – ohne Ausnahme. Eine nicht dazugehörige und zugleich endlich definierbare Dualfolge kann es nicht geben.

Wir betrachten nun die zur oben bestimmten abzählbaren Folge F von endlich definierbaren Dualfolgen gehörige eindeutig bestimmte Antidiagonalfolge A. Aufgrund ihrer einfachen Definition *scheint* sie endlich definierbar zu sein, das heißt die sie definierende endliche Formel erfüllbar. Dies ist aber nicht der Fall, denn es gibt im Rahmen des symbolischen Kalküsl keine weiteren endlich definierbaren

Dualfolgen als diejenigen, die in der obigen Folge F vorkommen. Also ist die die Antidigonalfolge A definierende Formel nicht erfüllbar.

Falls die Folge endlich definierbarer Dualfolgen F nicht endlich definierbar ist, so kann die Antidiagonalfolge A sicher nicht endlich definierbar sein, da ihre Definition sich auf die Folge F stützt. Damit ist dann ohnehin klar, daß die Antidiagonalfolge nicht zu den im symbolischen Kalkül darstellbaren Objekten gehört. Das hier diskutierte Problem ergibt sich also nur, wenn man davon ausgeht, daß die Folge der endlich definierbaren Dualfolgen selbst endlich definierbar ist.

Die Paradoxie oder Antinomie der endlichen Definierbarkeit besteht darin, daß sich aus folgender Behauptung eine Antinomie ableiten läßt, das heißt scheinbar die Behauptung genau dann wahr ist, wenn sie falsch ist:

Behauptung: *Die Antidiagonalfolge A der Folge F der endlich definierbaren Dualfolgen ist nicht endlich definierbar.*

Die Ableitung der Antinomie geht nach dem gewohnten Schema. Annahme: A sei tatsächlich nicht endlich definierbar; dann ist die obige Behauptung wahr. Die Antidiagonalfolge ist aber gemäß ihrem Auftreten in dieser Behauptung endlich definiert, also ist A endlich definierbar, folglich ist die Behauptung falsch. – Ist umgekehrt A tatsächlich endlich definierbar, also obige Behauptung falsch, so ist jedoch A als Antidiagonalfolge sicher kein Element der Folge F, kann also nicht endlich definierbar sein, also ist die Behauptung wahr.

Diese Antinomie hat ihre Ursache in einer nicht sachgemäß aus der Mathematik stammenden Forderung, nämlich der Forderung nach endlicher symbolischer Definierbarkeit der Antidiagonalfolge, die zu einer im doppelten Sinne widersprüchlichen Situation führt und dadurch sich selbst aufhebt. Finsler weist noch darauf hin, daß die Paradoxie der endlichen Definierbarkeit im wesentlichen dieselbe Struktur hat wie die folgende Version der Lügner-Antinomie, die sich einer Tafel bedient (siehe dazu die ausführliche Diskussion in meinem Buch *Selbstreflexion – Studien zur Selbstbeziehbarkeit im Denken und Erkennen*, Dornach: Verlag am Goetheanum 1995, Kapitel IV):

> 1, 2, 3
>
> Die kleinste natürliche Zahl,
> die nicht auf dieser Tafel angegeben ist.

Läßt man die Forderung der endlichen Definierbarkeit fallen, das heißt schränkt man seinen Blick *nicht* auf das endlich symbolisch Darstellbare ein, so wird sofort deutlich, daß die Definition der Antidiagonalfolge begrifflich sinnvoll ist: sie definiert eindeutig eine tatsächlich in der Folge F der Folge der endlich definierbaren Dualfolgen *nicht* vorkommende Folge. Damit ist ein ohne Schwierigkeiten denkbarer mathematischer Inhalt nachgewiesen, der sich prinzipiell *jeder* endlichen symbolischen Darstellbarkeit entzieht.

Bei dieser Überlegung ist entscheidend, daß zur Erfassung der Antidiagonalfolge einer Folge endlich definierbarer Dualfolgen eine eventuelle Erweiterung des symbolischen Symstems prinzipiell nicht weiter führt, da dann für das neue System dieselben Überlegungen angeführt werden könnten. Ebenso würde eine Erweiterung auf Formeln mit abzählbar vielen Zeichen nicht weiterhelfen, da das Cantorsche Diagonalargument auch darauf anwendbar ist. Deshalb rekurriert Finsler auch konsequenterweise nicht auf irgendeine Erweiterung des symbolischen Systems, sondern direkt auf das begriffliche Denken, wo solche Beschränkungen der Darstellbarkeit nicht bestehen. Daraus ergibt sich:

Erster Finslerscher Unvollständigkeitssatz *Für jeden symbolischen Kalkül, der zumindest die elementare Arithmetik umfaßt, gibt es einen mathematischen Gedankeninhalt, der nicht symbolisch darstellbar ist.*

Daraus folgt weiter: *Aus der Denkbarkeit eines mathematischen Begriffsinhaltes kann nicht auf dessen symbolische Darstellbarkeit geschlossen werden.*

(3) Finsler zeigt im weiteren, daß aus der symbolisch widerspruchsfreien Darstellbarkeit eines Satzes nicht auf die formallogische Widerspruchsfreiheit des begrifflichen Inhaltes geschlossen werden darf. Mit anderen Worten: Aus der symbolisch widerspruchsfreien Ausdrückbarkeit folgt nicht die begrifflich-inhaltliche Denkbarkeit. Finsler zeigt dies, indem er einen symbolisch nicht entscheidbaren und damit symbolisch widerspruchsfreien Satz konstruiert, der sich als begrifflich falsch, und damit als formallogisch widerspruchsvoll erweist.

Wir knüpfen an den weiter oben eingeführten symbolischen Kalkül an. Ein *symbolischer Beweis* eines Satzes φ (S-Beweis) bedient sich der im symbolischen Kalkül festgelegten Beweisregeln zur Ableitung von φ aus gegebenen Voraussetzungen. Ein Satz heißt *symbolisch nicht entscheidbar* (oder kurz nicht S-entscheidbar), wenn weder der Satz noch seine Negation S-beweisbar ist.

Ein Beweis, daß in einer bestimmten Dualfolge die Zahl 0 unendlich vorkommt bzw. nicht unendlich vorkommt, gründet sich auf die in der Analysis üblichen Axiome und Begriffe (Voraussetzungen) und leitet daraus das entsprechende Ergebnis mit Hilfe der Beweis- oder Ableitungsregeln ab.

Wir betrachten nun alle Kombinationen von Symbolen des gegebenen Kalküls, die einen solchen Beweis darstellen. Zu jedem solchen Beweis gehört dann eine eindeutig bestimmte (endlich definierbare) Dualfolge. Umgekehrt kann es für ein und dieselbe Dualfolge mehrere solche Beweise geben, da gemäß der sogenannten Antezedensregel

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi}{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_m, \varphi}$$

beliebig, aber endlich viele zusätzliche Formeln $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots, \varphi_{n+m}$ in eine Ableitung der Form $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$ eingebaut werden können. Jedenfalls erhält man damit ohne Ausnahme *alle* S-Beweise über das endliche bzw. unendliche Vorkommen der Zahl 0 in Dualfolgen. (Man beachte, daß die so entstehende Folge von Dualfolgen eine Teilfolge der Folge der endlich definierbaren Dualfolgen ist.)

Diese Beweise können gemäß ihrer Länge und der alphabetischen Anordnung ihrer Elemente in eine abzählbare Folge gebracht werden. Die dazugehörige Dualfolgen werden dadurch ebenfalls in eine abzählbare Folge $\{b_k\}_n$ gebracht. Bildet man die endlich definierbare Antidiagonalfolge dieser Folge von Dualfolgen, so läßt sich folgende Behauptung aufstellen:

Behauptung: *In der Antidiagonalfolge der Folge von Dualfolgen, für die ein symbolischer Beweis existiert über das endliche oder unendliche Vorkommen der Zahl 0 kommt die Zahl 0 nicht unendlich oft vor.*

Diese Behauptung ist nicht S-beweisbar, da die zugehörige Dualfolge nicht der oben definierten Folge von Dualfolgen angehören kann (obwohl sie endlich definierbar ist). Die Behauptung ist demzufolge nicht S-entscheidbar und damit S-widerspruchsfrei.

Wir führen nun eine Überlegung an, wodurch eingesehen werden kann, daß obige Behauptung inhaltlich falsch, folglich bezüglich des betrachteten mathematischen Gedankenzusammenhangs formallogisch widerspruchsvoll ist. Man betrachte die Dualfolge $\{1, 1, 1, \ldots\}$, das heißt die Folge $\{d_k\}$ mit $d_k = 1$ für alle $k \in \mathbf{N}$.

Behauptung: In der Folge $\{d_k\}$ kommt die Zahl 0 nicht vor, das heißt es gibt kein $k \in \mathbf{N}$ mit $d_k = 0$.

Beweis: In der Folge $\{d_k\}$ gibt es kein $k \in \mathbf{N}$ mit $d_k = 0$.

Dieser Beweis läßt sich durch die Hinzunahme von Identitäten der Form $1 \equiv 1$, $2 \equiv 2$, etc. beliebig symbolisch-formal variieren:

Beweis: In der Folge $\{d_k\}$ ist $d_k = 1$ für alle $k \in \mathbf{N}$ und $m \equiv m$ für alle $m \in \mathbf{N}$.

Es gibt abzählbar unendlich viele solche jeweils verschiedene Beweise, wenn man m alle Werte in $\mathbf{N}$ annehmen läßt. Jedem solchen Beweis entspricht die Folge $\{1, 1, 1, \ldots\}$, also ergibt sich in der Antidiagonalfolge $\{b_k\}_k$ dieser Folge sicher unendlich oft eine Null.

Kann der soeben angeführte Beweis tatsächlich im symbolischen Kalkül repräsentiert werden? Wenn ja, so ergäbe sich ein Widerspruch, indem die symbolisch nicht entscheidbare Behauptung nun doch symbolisch repräsentiert würde. Dies ist aber nicht der Fall, denn der Beweis kann nicht symbolisch repräsentiert werden, da ihm eine zwar endlich definierbare, aber in der Folge *aller* Dualfolgen, für die es überhaupt einen S-Beweis über das endliche oder unendliche Vorkommen der Zahl 0 gibt, nicht enthaltene Dualfolge zugrundeliegt.

Wird die Forderung der Symbolisierbarkeit an den Beweis fallengelassen, so ist er unproblematisch und schlüssig. Daraus ergibt sich zusammenfassend:

Zweiter Finslerscher Unvollständigkeitssatz *Für jeden symbolischen Kalkül, der zumindest die elementare Arithmetik umfaßt, gibt es ein symbolisch darstellbares Theorem, das symbolisch widerspruchsfrei, aber mathematisch-inhaltlich falsch und folglich relativ zum betrachteten Gedankenzusammenhang formallogisch widerspruchsvoll ist.*

Daraus folgt weiter: *Aus der symbolisch widerspruchsfreien Darstellbarkeit eines Theorems in einem symbolischen Kalkül kann nicht auf die formallogisch widerspruchsfreie Darstellbarkeit geschlossen werden.*

Entscheidend bei Finslers Argumentation ist die Tatsache, daß sie auf jede Art von wohlbestimmtem symbolischen Kalkül, der einen die elementare Arithmetik der natürlichen Zahlen umfassenden Teil der Mathematik als Modell besitzt, anwendbar sind. Damit betreffen sie jede Forderung und jeden Versuch einer auch teilweisen Symbolisierung der Mathematik und zeigen die Begrenztheit sowie – was die eigentlich mathematischen Inhalte und deren Denkbarkeit betrifft – Unnötigkeit, ja den das Denken irreführenden Charakter symbolischer Darstellungen.

ANSCHRIFT:

Renatus Ziegler, Terrassenstr. 5, CH 4144 Arlesheim

Mathematisch - Physikalisches Institut
Dr. G. Unger
Dorneckstr. 15 CH 4143 Dornach
Postcheck: Basel 40-21147-6
Stgt. 428 17-706

Druck J. Plüss
Dornach
Abonnement/Jahr
Fr. 40.-
DM 45.-

MATHEMATISCH - PHYSIKALISCHE KORRESPONDENZ

unter Berücksichtigung angrenzender Gebiete wie
Biophysik, Pädagogik, Kybernetik

Nr 183 – Ostern 1996

Liebe Freunde der Mathematisch-Physikalischen Korrespondenz,

der Inhalt dieser Nummer ergibt einen "zufälligen" Zusammenhang zwischen dem Werk von Georg Cantor und dem von Paul Finsler. Allerdings, Zufall ist nur, dass ich einen allgemeinverständlichen Bericht über Cantors Leistung in Bezug auf das *Überabzählbare* fertig hatte, als mir Renatus Ziegler seine "Materialien zu Paul Finsler" ankündigte. Von keineswegs zufälliger Bedeutung ist, dass der eigentliche Kern der Cantorschen Mengenlehre in Bezug auf das sogenannte *Aktualunendliche* gerade durch Finsler seine Berechtigung im Sinn einer wahren Widerspruchsfreiheit gewinnt. Dabei war Finsler der erste, der deutlich machte, dass es in formalen Denksystemen sehr wohl möglich ist, die Abwesenheit von Widersprüchen zu konstatieren und doch zugleich mit dem gesunden Menschenverstand ("metamathematisch") einzusehen, dass gewisse formal widerspruchsfreie Behauptungen falsch sind. Davon handelt der hier veröffentlichte Aufsatz von Renatus Ziegler. Vorangestellt ist eine (englische) Buchankündigung der in unserer Korrespondenz schon mehrfach erwähnten Veröffentlichung der englischen Übersetzung von grundlegenden Aufsätzen Finslers, und ein englischer Text, der sich auf bisher nicht publizierte Aufsätze von Kurt Gödel bezieht. *Ich betrachte es als ein bemerkenswertes Ereignis in der Geschichte der Mathematik dieses Jahrhunderts, wenn die Autoren zu folgendem Schluss kommen* (meine Übersetzung):

> Die wichtigsten und faszinierendsten [der Aufsätze] erscheinen nun im Druck: Der Gibbs-Vortrag und zwei von sechs Versionen des Essays, den Gödel für den Karnap-Band der Serie von Schilpp *The*