Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien und ihre Folgen; Bemerkungen zur Bewußtseinsgeschichte des 19. Jahrhunderts

Renatus Ziegler

1. Einleitung

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie gilt mit Recht als eine der einflußreichsten Errungenschaften des 19. Jahrhunderts. Die von ihr ausgehende Umgestaltung der Mathematik und schließlich der mathematischen Physik hatte tiefgehende Folgen für die Entwicklung des Weltbildes des Naturwissenschaftlers und Philosophen. Sogar die Künstler waren davon betroffen und inspiriert (siehe *Henderson*, 1983). Im vorliegenden Aufsatz möchte ich eine Facette aus diesem umfangreichen Komplex von sich ineinander verschlingenden und gegenseitig beeinflussenden Entwicklungsströmungen herausgreifen, die bewußtseinsgeschichtlich besonders aufschlußreich ist. Es handelt sich um die Bedeutung der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie für die Entwicklung des philosophischen Selbstverständnisses der mathematischen Methode in den Naturwissenschaften.

Gegen das Ende der Aufklärung hatten diejenigen Naturwissenschaftler die Oberhand gewonnen, die in der Mathematik das Vorbild aller Wissenschaftlichkeit erblickten. Ihre Impulse flossen hauptsächlich in den Lehrbetrieb der École Polytechnique in Paris und andere sich an diesem Vorbild orientierenden höheren Schulen ein. Unter mathematischer Methode (sofern sie überhaupt in Betracht gezogen wurde) verstand man zunächst aber nicht allein die *Anwendung* mathematischer *Inhalte*, sondern durchaus auch ein allgemeines methodisches Prinzip naturwissenschaftlicher Erkenntnis, gemäß welchem sich die Gestalt einzelner Disziplinen der Naturwissenschaften an dem strengen Aufbau der Mathematik (insbesondere der euklidischen Geometrie) orientieren sollten. Aus verschiedenen Gründen setzt sich aber im Laufe des 19. Jahrhunderts die Auffassung durch, daß mit «mathematischer Methode» nur die Beschreibung empirischer Tatsachenzusammenhänge durch mathematische Inhalte (theoretische Modelle) gemeint sein kann, eine Auffassung, die zum bestimmenden Faktor der Weiterentwicklung der Naturwissenschaften werden sollte und bis heute entscheidend geblieben ist. In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, in welchem Maße und auf welche Weise die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie für diese Entwicklung verantwortlich ist. Das Durchschauen der Wurzeln dieses entscheidenden Bewußtseinsumschwunges um die Mitte des 19. Jahrhunderts eröffnet zugleich einen konkreten Einblick in die be-

wußtseinserziehende Kraft des mathematischen Denkens, das, wenn geeignet beherrscht und geführt, zu einer Überwindung der Einseitigkeiten der mathematischen Methode in den Naturwissenschaften und damit zu Perspektiven für ein erneuertes Selbstverständnis der mathematischen Physik sowie der mathematischen Organik führen kann.

2. *Euklids* Elemente *und die Folgen*

Ohne Euklid keine nichteuklidische Geometrie! Euklid hat als erster die Sonderstellung der nach ihm benannten Geometrie erkannt. Wir wissen zwar heute, daß Euklid in seinen *Elementen* (ca. 300 v. Chr.) im wesentlichen «nur» die Ergebnisse seiner Vorläufer und Zeitgenossen zusammenfaßte und in ein Lehrbuch schmolz, das sich als erfolgreichstes mathematisches Buch aller Zeiten erweisen sollte und in der Anzahl der Auflagen sowie der kulturellen und geographischen Verbreitung nur von der Bibel übertroffen wurde. Obwohl man natürlich als Mathematiker des 20. Jahrhunderts manches gegen Einzelheiten des euklidischen Systems einzuwenden hat, waren die *Elemente* doch für gut zweitausend Jahre *das* Vorbild an mathematischer Strenge und Klarheit. Was Euklid wahrhaft unsterblich macht, ist seine geradezu prophetische Klarsicht in der Auswahl der expliziten Voraussetzungen «seiner» Wissenschaft, der Geometrie. Er demonstriert (zumindest bis zu einem gewissen Grade), daß die Geometrie auf bestimmten unbeweisbaren, durch sich selbst einsichtigen Annahmen, von ihm Definitionen und Postulate (oder Axiome) genannt, beruht, von denen alles weitere durch reines logisches Schließen ableitbar ist. Natürlich ist Euklids Axiomensystem weder vollständig, unabhängig, noch frei von zirkulären Definitionen. Das sind aber Kleinigkeiten, wenn man berücksichtigt, daß es sich um den ersten derartigen im Detail ausgeführten Versuch handelt. Euklids Genius offenbart sich nun in der Tatsache, daß er eine geometrische Aussage als Postulat (oder Axiom) voranstellt, die weder einfach noch so ohne weiteres intuitiv selbstverständlich ist, wie man das sonst von den Postulaten erwartet (siehe *Bild 1*):

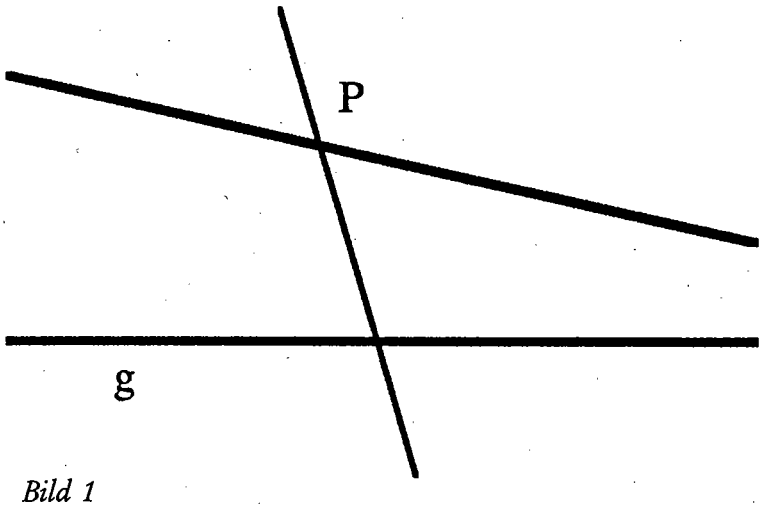

Bild 1

Postulat 5:
Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Kein Wunder, daß eine ganze Reihe von hervorragenden Mathematikern Euklids Annahme, daß diese komplizierte Aussage ein Postulat sein muß, nicht folgen konnten. Eine detaillierte Analyse der Struktur der *Elemente*, insbesondere des ersten Buches, macht verständlich, daß schon bei frühen Kommentatoren Zweifel aufkamen an der Ableitbarkeit (Beweisbarkeit) dieser Aussage aus den übrigen Postulaten und Sätzen. Das Problem erscheint zunächst klar und elementar zu sein, erweist sich aber im Laufe der Jahrhunderte als außerordentlich komplex und unnahbar (siehe etwa *Bonola/Liebmann*, 1908; *Mainzer*, 1980; *Pont*, 1986).

Euklid bezeichnet zwei in derselben Ebene liegende Geraden als *parallel*, wenn sie, nach beiden Seiten in das Unbegrenzte hin verlängert, auf keiner Seite zusammentreffen. Die Zweifler an Euklids System produzierten mannigfache Aussagen, die Euklids Postulat 5 äquivalent sind, unter anderem etwa die folgende, hier Parallelenaxiom PA(E) genannte (siehe *Bild 2*):

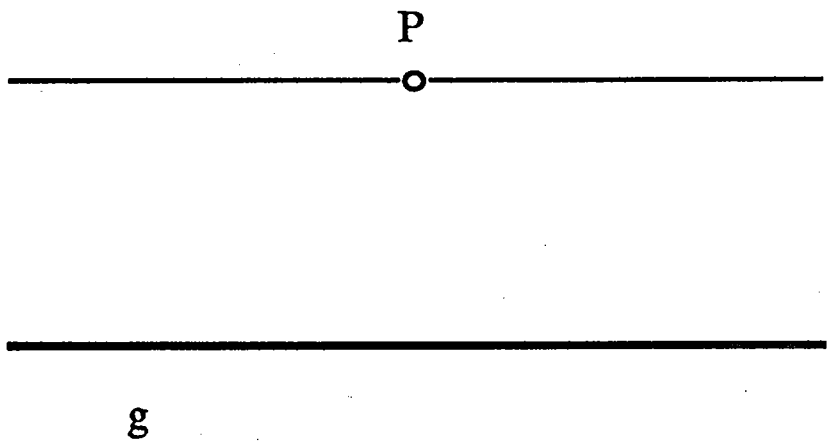

Bild 2 Parallelenaxiom PA(E):
Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es genau eine Parallele, die durch P hindurchgeht.

Nur wenige Geometer nach Euklid zweifelten an der Beweisbarkeit von PA(E), d. h. an der Annahme, daß PA(E) ein Satz und nicht ein Postulat sei. Die Frage war nur: wie läßt sich diese Annahme verifizieren? Die «erfolgreichsten» Versuche in dieser Richtung bestanden in der Konstruktion eines in sich zusammenhängenden Systems von geometrischen Sätzen, welches auf einer PA(E) widersprechenden Aussage beruht, sonst aber im Einklang mit allen übrigen Postulaten und von PA(E) unabhängigen Sätzen ist. Die entscheidende Idee dabei ist, aus diesem System einen Widerspruch zu den übrigen Postulaten (oder von PA(E) abhängigen Sätzen) abzuleiten. Die Entdeckung eines solchen Widerspruchs wäre ein untrügliches Zeichen für die Beweisbarkeit von PA(E) (Methode des indirekten Beweises).

Es kam keinem dieser teils außerordentlich genialen Zweifler ins Bewußtsein, daß es eine «Geometrie» geben könnte, in welcher PA(E) *nicht* gilt (d. h., daß PA(E) von den übrigen Postulaten logisch unabhängig sein könnte). Denn, was war Geometrie anderes als *die* Wissenschaft des Raumes? Und hier, im Bereiche der Sinnesanschauung, konnte

die Gültigkeit von PA(E) und daraus ableitbaren Sätze nicht in Zweifel gezogen werden. Man muß sich diese untrennbare Verbindung der klassischen Geometrie mit dem Erdenraum ganz klar machen, um die Bedeutung der folgenden Entwicklung voll zu verstehen. Bis weit ins 19. Jahrhundert hinein war Geometrie identisch mit der begrifflichen Beschreibung der empirischen Gegebenheiten des Erdenraumes. Sie war kein Modell, sie war die Sache selbst. Ihr streng logischer Charakter distanzierte sie zwar von anderen Wissenschaften, unterschied sie aber nicht prinzipiell von ihnen.

3. Die Entdeckung einer hypothetischen nichteuklidischen Geometrie

Anfang des 19. Jahrhunderts rangen sich Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Nicolai Ivanovič Lobačevskij (1792–1855) und János Bolyai (1802–1860) zur Einsicht durch, daß PA(E) *nicht* beweisbar sein *kann* (siehe *Bonola/Liebmann*, 1908; *Reichardt*, 1976; *Mainzer*, 1980). Was konnten sie als Begründungen anführen? Es gab damals weder irgendwelche empirische Evidenz zu Gunsten dieser Behauptung, noch ein mathematisches Feld, in welchem sich ein entsprechendes Beispiel (Modell) konstruieren ließe. Wie manche vor ihnen, so produzierten auch Gauss, Lobačevskij und Bolyai ein in sich widerspruchsfreies System von Sätzen (vor allem aus dem Gebiet der Trigonometrie), das in klarem Widerspruch zu PA(E) stand, aber mit allen anderen Axiomen und daraus ableitbaren Sätzen vollkommen harmonierte. Dagegen schlug dieses System jeder vernünftigen Vorstellung des Raumes ins Gesicht. Schon die grundlegende Annahme, die anstelle PA(E) vorausgesetzt wurde, scheint absurd (siehe *Bild 3*):

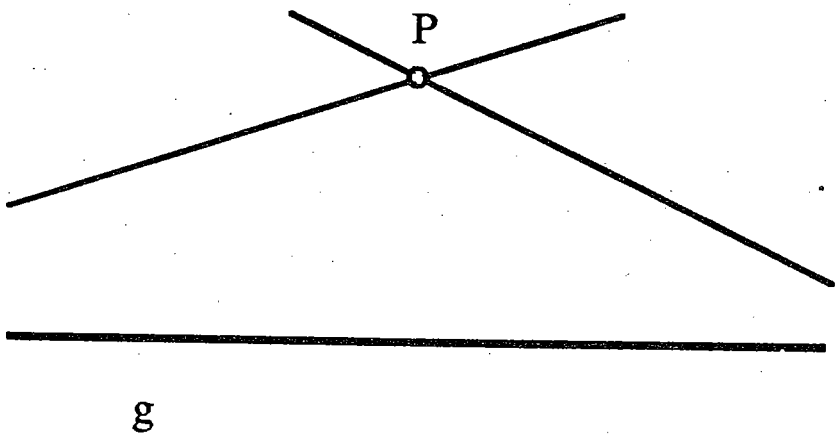

Bild 3 Parallelenaxiom PA (GLB):
Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es mehr als eine Parallele, die durch P hindurchgeht.

Wir wollen das von Gauss, Lobačevskij und Bolyai entworfene Gedankengebäude, in welchem PA(E) durch das Axiom PA(GLB) ersetzt wird, die *nichteuklische Geometrie GLB* nennen. Die Argumentation innerhalb des Begriffssystemes dieser Geometrie

ist notgedrungen rein begrifflich (axiomatisch) und muß ohne Zuhilfenahme einer konkreten Realisierung (Modell), also ohne konkrete Vorstellungen oder Skizzen durchgeführt werden. Denn letztere können zunächst nur der euklidischen Geometrie entnommen werden, und diese sollte ja gerade *nicht* vorausgesetzt werden. Figuren, falls überhaupt welche verwendet werden, können nur symbolischen Charakter (wie in *Bild 3*) und keine reale Bedeutung haben. Was in der Zahlentheorie und der Analysis seit dem 18. Jahrhundert zum Gemeingut der Mathematiker geworden war, die Loslösung mathematischer Begriffe von ihrem Bezuge zur Sinneswelt, d. h. die Erfassung ihrer Inhalte in Form reiner Gesetzmäßigkeiten, wird nun erstmals auf dem Gebiete der Geometrie realisiert. Bei der Geometrie ist der Schritt zum sinnlichkeitsfreien Denken deshalb so schwierig, weil ihre Inhalte, ganz anders als bei der Zahlentheorie, von Anfang an direkt auf die Sinneswelt bezogen sind, und das Anschaulich-Evidente vom begrifflich Folgerichtigen zunächst nicht klar genug unterschieden wird. Diese Unterscheidung läßt sich nur mit einer starken Bewußtseinsanstrengung leisten, die den Wahrnehmungsanteil der geometrischen Vorstellung zurückweist und den Begriffsanteil herausarbeitet. Das Aufstellen eines solchen vom empirischen Standpunkte aus absurden Systems, wie es die nichteuklidische Geometrie GLB darstellt, erfordert eine Gedankenarbeit intensivster Art. Welches Vertrauen in die Kraft des reinen Denkens steht aber erst hinter der Behauptung, daß dieses System, allein aufgrund seiner *logisch* widerspruchsfreien Struktur, ebenso wahr ist wie das durch jegliche *sinnliche* Erfahrung bestätigte System Euklids! Dieses Vertrauen war eine Folge des deutlich erlebten Wahrheitsgehaltes der Inhalte des reinen Denkens. Ich möchte deshalb diesen Moment als die *Geburtsstunde des reinen Denkens in der Geometrie* bezeichnen (siehe dazu auch *Unger*, 1940).

Nur einige Jahrzehnte früher hatte I. Kant (1724–1804) behauptet, daß der (euklidische) Raum angesehen werden muß als die *Bedingung* der Möglichkeit der Erscheinungen, und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung; er ist eine «... Vorstellung a priori, die notwendiger Weise äußeren Erscheinungen zum Grunde liegt. Auf diese Notwendigkeit a priori gründet sich die apodiktische Gewissheit aller geometrischen Grundsätze ...» (*Kant*, 1781, A24). Mit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie GLB gesellte sich aber neben den gewöhnlichen (euklidischen) Raum*begriff* ein zweiter, der nicht ohne weiteres mit den empirischen Gegebenheiten in Übereinstimmung gebracht werden konnte. Dadurch wurde das Problem der Bestimmung der spezifischen Gesetzmäßigkeit des äußerlichen Nebeneinanders der Gegenstände der Sinneswelt zu einem Erkenntnisproblem und der *euklidische* Raum konnte nicht mehr a priori als die Bedingung der Möglichkeit von Erscheinungen überhaupt angesehen werden.

4. Kopernikanische und nichteuklidische Wende: ein Vergleich

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie GLB und deren Folgen wurden immer wieder mit der kopernikanischen Wende verglichen. In der Tat, dieser Vergleich ist geistesgeschichtlich sehr aufschlußreich und soll deshalb etwas näher beleuchtet werden. Sowohl das kopernikanische System wie die nichteuklidische Geometrie GLB

beruhten auf keinerlei (in der damaligen Zeit greifbaren) empirischen Evidenz. Sie waren keine naturwissenschaftlichen Entdeckungen im gewöhnlichen Sinne, sondern kraftvolle Theorien, die ihre Gültigkeit allein aus ihrer logischen Klarheit, Deutlichkeit und Widerspruchslosigkeit ableiteten. Sie waren Symptome sich anbahnender Bewußtseinsevolutionen, nicht Folge irgendwelcher sinnlicher Beobachtungen oder Experimente.

Man mag einwenden, daß das kopernikanische System einfacher und überschaubarer ist als das ihm vorausgehende ptolemäische und zugleich die Berechnung von erheblich genaueren astronomischen Tafeln erlaubt. Faßt man aber Kopernikus' ursprüngliches System ins Auge, niedergelegt in seinem Hauptwerk *De revolutionibus orbium coelestium* (1543), so entdeckt man, daß die Details seines Systems zumindest so kompliziert und künstlich sind wie diejenigen in Ptolemäus' *Almagest* (ca. 150 n. Chr.). Dies beruht auf der Tatsache, daß auch er nur gleichförmige Kreisbewegungen zur Erzeugung der Planetenbahnen zuläßt und demzufolge sein System dem ptolemäischen kinematisch äquivalent ist. Deshalb sind auch die nach seinem System berechneten astronomischen Tafeln keineswegs verläßlicher als die auf dem traditionellen ptolemäischen System beruhenden. Erst mit den durch Kepler eingeführten elliptischen Planetenbahnen wird diese Situation entscheidend verbessert.

Das kopernikanische System hatte einen entscheidenden Vorteil gegenüber der nichteuklidischen Geometrie GLB: es stand zu keiner Sinneserfahrung im Widerspruch. Dieser Unterschied deutet auf die spezifische Differenz der der Entdeckung dieser Begriffssysteme zugrundeliegenden Bewußtseinsevolutionen im 15./16. resp. 19./20. Jahrhundert. In der Renaissance befreit sich das wissenschaftliche Bewußtsein von dem Dogma der Religion sowie der degenerierten scholastischen Philosophie, wendet sich der sinnlichen Erfahrung zu und wird dabei sich seines Selbstes sowie der erscheinenden Natur bewußt. Im 19./20. Jahrhundert überwindet das naturwissenschaftliche Bewußtsein das Dogma der Sinneserfahrung, wendet sich der Beobachtung des Denkens zu, um seinen Wesenskern und die wirkenden Gesetzmäßigkeiten in der Natur erfahren und erkennen zu lernen. Letztere Entwicklung ist heute noch keineswegs abgeschlossen, ja hat eigentlich noch kaum begonnen. Es ist deshalb nicht müßig und «nur» historisch relevant, wenn wir im Folgenden untersuchen, welche Rolle der Mathematik, und insbesondere der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie GLB in diesem «Abenteuer der Vernunft» zukommt.

5. Von der romantischen Naturphilosophie zur modernen naturwissenschaftlichen Methodik

Mit der genannten Befreiung des Bewußtseins aus den Schranken der sinnlichen Anschauung wird innerhalb der Geometrie ein Schritt vollzogen, der in der Philosophie bereits im deutschen Idealismus durch Johann Gottlieb Fichte (1762–1814), Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) und Friedrich Wilhelm Joseph Schelling (1775–1854) geleistet worden ist. So versucht etwa Hegel in seiner *Wissenschaft der Logik* (1831) ausgehend vom Sein die Grundkategorien der Gesetzeswelt mit Hilfe der dialektischen Selbstbestimmung des Begriffs abzuleiten, und so die zunächst impliziten Begriffsbestimmungen explizit zu machen. Dabei kann natürlich die Mathematik nur eine Nebenrolle spielen, wie Hegel in der Vorrede zur ersten Ausgabe seiner *Logik* deutlich macht:

«Die Philosophie, indem sie Wissenschaft sein soll, kann [...] hierzu ihre Methode nicht von einer untergeordneten Wissenschaft, wie die Mathematik ist, borgen, sowenig als es bei kategorischen Versicherungen innerer Anschauung bewenden lassen oder sich des Räsonnements aus Gründen der äußeren Reflexion bedienen. Sondern es kann nur die *Natur des Inhalts* sein, welche sich im wissenschaftlichen Erkennen *bewegt*, indem zugleich diese *eigene Reflexion* des Inhalts es ist, *welche seine Bestimmung* selbst erst setzt und *erzeugt.*» (*Hegel*, 1831, Vorrede zur ersten Ausgabe, S. 16)

Hegel ist sich vollkommen im Klaren, daß er mit den Mitteln der Philosophie nicht in die *wirkenden* Gesetzmäßigkeiten eindringen, sondern nur deren tote Form, wie sie im menschlichen Bewußtsein vermittels des reinen Denkens erscheint, darstellen kann. Andererseits macht er deutlich auf den erzieherischen Charakter der Philosophie für das reine Denken aufmerksam:

«Das System der Logik ist das Reich der Schatten, die Welt der einfachen Wesenheiten, von aller sinnlichen Konkretion befreit. Das Studium dieser Wissenschaft, der Aufenthalt und die Arbeit in diesem Schattenreich ist die absolute Bildung und Zucht des Bewußtseins. Es treibt darin ein von sinnlichen Anschauungen und Zwecken fernes Geschäft.» (*Hegel*, 1831, Vorrede zur zweiten Ausgabe, S. 55)

Die Logik ist der Ort, wo die ideelle Welt reiner Gesetzmäßigkeiten am reinsten zur Erscheinung kommt:

«Die Logik ist sonach als das System der reinen Vernunft, als das Reich des reinen Gedankens zu fassen. *Dieses Reich ist die Wahrheit, wie sie ohne Hülle an und für sich selbst ist.* Man kann sich deswegen ausdrücken, daß dieser Inhalt *die Darstellung Gottes* ist, *wie er in seinem ewigen Wesen vor der Erschaffung der Natur und eines endlichen Geistes ist.*» (*Hegel*, 1831, Vorrede zur zweiten Ausgabe, S. 44)

Es ist nur natürlich, daß Hegel seinen Gesichtspunkt auch in der philosophischen Behandlung der Naturwissenschaften geltend machen wollte. Es war keinesweg seine Absicht, die konkreten Resultate der zeitgenössischen Naturwissenschaft zu ignorieren und sich leeren Spekulationen darüber hinzugeben, wie die Natur sein *sollte*. Der Gegenstand der Naturphilosophie ist derselbe wie derjenige der Naturwissenschaft selbst:

«Indem die Naturphilosophie *begreifende* Betrachtung ist, hat sie dasselbe *Allgemeine*, aber *für sich* zum Gegenstand und betrachtet es in seiner *eigenen, immanenten Notwendigkeit* nach der Selbstbestimmung des Begriffs.

Von dem Verhältnis der Philosophie zum Empirischen ist in der allgemeinen Einleitung die Rede gewesen. Nicht nur muß die Philosophie mit der Naturerfahrung übereinstimmend sein, sondern die *Entstehung* und *Bildung* der philosophischen Wissenschaft hat die empirische Physik zur Voraussetzung und Bedingung. Ein anderes aber ist der Gang des Entstehens und die Vorarbeiten einer Wissenschaft, ein anderes die Wissenschaft selbst; in dieser können jene nicht mehr als Grundlage erscheinen, welche hier vielmehr die Notwendigkeit des Begriffs sein soll.» (*Hegel*, 1830, § 246, S. 15)

Die Naturphilosophie Hegels sowie anderer seinen Intentionen nahestehende philosophische Systeme waren aber nur von vorübergehendem Einfluß auf die Entwicklung

der sich am Anfang des 19. Jahrhunderts neu profilierenden Naturwissenschaften. Schon Ende des 18. Jahrhunderts machten sich Strömungen bemerkbar, die später die Oberhand gewinnen und damit die Weiterentwicklung der Naturwissenschaften maßgeblich beeinflussen sollten. Es handelt sich einerseits um den Neuhumanismus und andererseits um den Rationalismus der französischen Aufklärung und dessen Kulmination in der Revolution. Ein Forscher von universalem Format, Alexander von Humboldt (1769–1859), erwies sich als der entscheidende Architekt dieser Übergangsphase. Einerseits durch seine Herkunft und die Verbindung mit seinem Bruder Wilhelm (1767–1835) dem Neuhumanismus nahestehend und andererseits durch seine mannigfaltigen Reisen und vor allem seinen Aufenthalt in Paris von 1807–1827 den Idealen der Aufklärung zugetan, war er wie geschaffen zu einer Synthese dieser beiden zunächst mehr oder weniger unabhängig voneinander verlaufenden Strömungen. Vom Neuhumanismus übernahm er das Ideal der reinen Wissenschaft als Selbstzweck unter Vernachlässigung der Anwendungen und vom Rationalismus der französischen Aufklärung die analysierende, rationale und objektive Betrachtung der Natur. Humboldt erwies sich durch diese Synthese zweier kraftvoller geistiger Strömungen des 18. Jahrhunderts als geistiger Vater des Charakters der Naturwissenschaften im ausgehenden 19. Jahrhundert.

In Paris lernte Alexander von Humboldt die dort in Hochblüte stehende Mathematik und die im Entstehen begriffene mathematische Physik kennen und schätzen. Das während der Revolution neu gestaltete höhere Unterrichtswesen erzielte in den Natur- und Ingenieurswissenschaften beachtliche und solide Erfolge, gerade auch wegen seiner konsequenten mathematischen Ausrichtung. Die Folgerungen, die Humboldt aus diesen Beobachtungen ziehen mußte, brachten ihn notgedrungen in einen gewissen Konflikt mit der in Deutschland blühenden idealistischen Naturphilosophie, da innerhalb dieser, wie oben angedeutet, der Mathematik nur eine recht untergeordnete Rolle zukam.

Alexander von Humboldts Übersiedlung von Paris nach Berlin im Jahre 1827 markiert den Beginn einer neuen Phase in der Reorganisation der gesamten Wissenschaften, insbesondere der Naturwissenschaften, in Preußen. Hatte er bereits Anfang der zwanziger Jahre seinen Einfluß auf die deutschen Verhältnisse geltend gemacht, konnte er ihn nun, nahe dem König und dem Ministerium stehend, voll zur Geltung bringen. «Er besaß [...] die seltene Gabe, auch ohne genaueres Verständnis die Bedeutung ihm ferner liegender Gebiete zu erkennen, ja er hat nicht selten, durch seine allgemeine Auffassungen und ein sicheres Gefühl für die Forderungen der Zeit geleitet, fruchtbare Anwendungen für ihm fremde Wissenschaften gegeben. Im Zusammenhang mit dieser Eigenschaft steht seine Fähigkeit, junge, vielversprechende Talente schon vor ihren eigentlichen Leistungen mit sicherem Instinkt zu erkennen. Da Humboldt zudem in Berlin eine außerordentliche gesellschaftliche Stellung genoß, die ihm durch seine Beziehungen zum Hofe und seine vielseitigen Verbindungen einen großen Einfluß verschaffte, so war er der geeignete Mann, um auf Jahre hinaus die Entwicklung der ihn interessierenden Wissenschaften in Preußen zu bestimmen. Er ist denn auch der eigentliche Urheber einer Erscheinung auf dem Gebiet der Mathematik und der Naturwissenschaften, die für die philologischen Fächer etwa 10 Jahre früher, nämlich 1810 mit der Gründung der Berliner Universität [durch seinen Bruder Wilhelm], beginnt, und die ich als «deutsche wissenschaftliche Renaissance» bezeichnen möchte.» (*Klein*, 1926, S. 17)

Welchen bedeutenden Einfluß A. von Humboldt auf das neue Selbstverständnis der Naturwissenschaften im allgemeinen gewann, läßt sich vielleicht am besten ablesen aus der Wende, welche durch seinen Vorsitz der 7. Versammlung der «Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte» 1828 in Berlin in dieser in der Folge einflußreichen Gesellschaft hervorgerufen wurde (siehe *Degen*, 1956). Ursprünglich im Anschluß an ihren Gründer, Lorenz Oken (1779–1851), den naturphilosophischen Ideen des deutschen Idealismus verpflichtet, veranlaßte Humboldt 1828 eine tiefgreifende Wandlung hin zum Geiste der modernen Naturwissenschaft. Durch die im Winter-Semester 1827/28 gehaltenen, schon damals berühmten *Kosmos*-Vorlesungen war das Feld abgesteckt: Abwendung von der in Deutschland weit verbreiteten idealistischen Naturphilosophie hin zu einer vorurteilslosen, methodisch und technisch vervollkommneten Naturbeschreibung. Obwohl von Alexander von Humboldt nicht in dieser Einseitigkeit konzipiert, bediente sich die Naturwissenschaft in der Folge immer mehr und ausschließlich mathematischer Begriffsinhalte zur exakten Beschreibung von Naturphänomenen. Nachdem das Vertrauen in die durch Hegel und andere zur Wissenschaft erhobene idealistische Philosophie verlorenging, vermeinte man nur noch mit Hilfe der im Mathematischen erlebbaren Klarheit eine gewisse Sicherheit im Bilden naturwissenschaftlicher Begriffe erreichen zu können. In diesem Bestreben konnte man sich zudem auf die Autorität von Kant stützen, der schon 1786 festhielt:

«Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel *eigentliche* Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin *Mathematik* anzutreffen ist.» (*Kant*, 1786, Vorrede, AVIII)

Bereits Johann Wolfgang Goethe (1749–1832) machte aber 1793 darauf aufmerksam, daß es nicht allein auf eine Mathematisierung der Naturwissenschaften ankomme als vielmehr auf ein Praktizieren der mathematischen *Methode*, d.h. die sorgfältige und lückenlose Zurückführung komplexer Erscheinungen auf einfache, nicht weiter reduzierbare Grundtatsachen, die er «Urphänomene» nannte:

«Diese Bedächtlichkeit, nur das Nächste ans Nächste zu reihen oder vielmehr das Nächste aus dem Nächsten zu folgern, haben wir von den Mathematikern zu lernen, und selbst da, wo wir uns keiner Rechnung bedienen, müssen wir immer so zu Werke gehen, als wenn wir dem strengsten Geometer Rechenschaft zu geben schuldig wären. Denn eigentlich ist es die mathematische Methode, welche wegen ihrer Bedächtlichkeit und Reinheit gleich jeden Sprung in der Assertion offenbart, und ihre Beweise sind eigentlich nur umständliche Ausführungen, daß dasjenige, was in Verbindung vorgebracht wird, schon in seinen einfachen Teilen und in seiner ganzen Folge dagewesen, in seinem ganzen Umfange übersehen und unter allen Bedingungen richtig und unumstößlich erfunden worden.» (*Goethe*, 1793, S. 19)

Die einseitige Bevorzugung mathematischer Begriffsinhalte zur Beschreibung und Analyse von Naturphänomenen beruht dementsprechend auf einer Verwechslung der (die wahre Sicherheit vermittelnden) mathematischen Methode *mit den* Inhalten *der Mathematik.* Diese Verwechslung ist kein historischer Unfall, sondern Ausdruck der Tatsache, daß die meisten Wissenschaftler der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts nur noch im Operieren mit mathematischen Begriffen eine gewisse Sicherheit im Denken erlebten. Die

Loslösung des geometrischen Denkens von der Sinnesanschauung als Folge der Integration des Begriffssystemes der nichteuklidischen Geometrie GLB in das Gesamtgebiet der Mathematik befreite nun das mathematische Denken endgültig von den Schranken der Sinnesanschauung und erhob es dadurch zur absoluten Reinheit und in sich selbst begründeten (relativen) Unfehlbarkeit. Dies konnte nicht ohne Folgen für die bereits im vollen Gange stehende Mathematisierung der Naturwissenschaften bleiben. Diese Entwicklung hatte aber auch tiefgreifende Bedeutung für die Entwicklung des Bewußtseins im allgemeinen, indem sie die bewußtseinserziehende Kraft des mathematischen Denkens deutlich ans Licht brachte. Dieser Entwicklung wollen wir uns nun zuwenden, müssen aber erst einige Einzelheiten aus der Mathematikgeschichte zusammenstellen.

6. Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie

Die ersten Arbeiten von Lobačevskij und Bolyai zur nichteuklidischen Geometrie wurden in den dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts publiziert. Die eigentliche Rezeptionsgeschichte beginnt aber nicht vor Ende der sechziger Jahre. Einige Gründe für diese verspätete Aufnahme und Verarbeitung wurden bereits weiter oben erwähnt. Die Ereignisse, welche diese Entwicklung in Gang brachten (siehe *Bonola/Liebmann*, 1908; *Reichardt*, 1976) werfen ein deutliches Licht auf die Hindernisse, die überwunden werden mußten.

Der Akzeptierung des Begriffssystems der nichteuklidischen Geometrie GLB stand zunächst die Identifizierung der euklidischen Geometrie mit der Wissenschaft des Raumes im Wege. Kant verlegte zudem die Gesetze der Geometrie in unseren Anschauungsapparat und folgerte daraus, daß die Geometrie eine apodiktische Wissenschaft sei, d.h. daß deren Gesetze unabhängig von unserer Erfahrung (a priori) gültig sind. Hermann von Helmholtz (1821–1894), einer der Gründerväter des Empirismus, äußerte als erster schwerwiegende Bedenken gegen die apriorische Gewissheit der (euklidischen) Geometrie. Er hielt dafür, daß der spezifische Charakter des Raumes eine Frage der Erfahrung und demnach empirischer Forschung zugänglich sei (siehe dazu *Jammer*, 1980). Sein Aufsatz *Über die Tatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1868) erschien etwa zur gleichen Zeit wie der berühmt gewordene Habilitationsvortrag Bernhard Riemanns (1826–1866) *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (gehalten 1854, posthum veröffentlicht 1867). Obwohl, mathematisch gesehen, die Ergebnisse Helmholtz' und Riemanns sehr verwandt sind, spiegeln bereits die Titel ihrer Arbeiten einen entscheidenden Unterschied wider: Helmholtz untersuchte die physiologischen und empirischen Grundlagen der Geometrie und deren Konsequenzen für die mathematische Struktur des Raumes, während Riemann über die Struktur des physikalischen Raumes spekulierte aufgrund rein mathematischer Kriterien.

Einen wichtigen Impuls von anderer Seite erhielt die Rezeptionsgeschichte der nichteuklidischen Geometrie GLB durch die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und dem Astronomen Hans Christian Schumacher (1780–1855) in den Jahren 1860–1863. Erst dadurch erfuhr die Öffentlichkeit Näheres von den umfangreichen, aber unveröffentlicht gebliebenen Untersuchungen Gauss' zum Parallelenproblem, in

welchem er schon einige Jahre früher zum selben Resultat wie Bolyai und Lobačevskij gekommen war (siehe *Reichardt*, 1976). Die Autorität des *Princeps Mathematicorum*, wie Gauss schon zu seinen Lebzeiten genannt wurde, tat das ihre, um die Verbreitung der Schriften der beiden bis dahin weithin unbekannten Geometer wesentlich zu fördern und ihre Übersetzungen ins Deutsche, Französische und Italienische zu beschleunigen.

Es ist eine interessante bewußtseinsgeschichtliche Tatsache, daß die «Wiederentdeckung» und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie GLB Ende der sechziger Jahre und Anfang der siebziger Jahre des 19. Jahrhunderts in enger personeller sowie inhaltlicher Verbindung mit der konsequenten Herausarbeitung des projektiven Raumes von mehr als drei Dimensionen vor sich ging (siehe *Ziegler*, 1985, S. 122ff.). Hermann Grassmann (1804–1877) legte in seiner *Ausdehnungslehre* (1844) die erste systematische Abhandlung zu einem geometrischen Kalkül für affine Räume beliebig vieler Dimensionen vor. Sie wurde aber von den etablierten Mathematikern kaum beachtet. Julius Plücker (1801–1868) gelang mit seiner 1846 angedeuteten und 1865–1868 ausgearbeiteten *Neuen Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (1868/69), d.h. der sogenannten Liniengeometrie, der erste konkrete Durchbruch in die vierte Dimension, wenn er auch selbst die Untersuchung beliebiger n-dimensionaler Räume noch als «metaphysisch» ablehnte. Arthur Cayley (1821–1895) dagegen scheute keineswegs davor zurück, bereits 1843 auf rein algebraische Weise n-dimensionale projektive Räume einzuführen, deren systematische Begründung er dann 1870 weiter ausführte.

Riemann ging in seinem Habilitationsvortrag sogar soweit, daß er sich ausschließlich auf die Diskussion des allgemeinen Falles eines n-dimensionalen Raumes beschränkte und keinerlei konkrete Beispiele erwähnte. Infolgedessen war sein Vortrag äußerst abstrakt und nahezu unverständlich. Der unmittelbare Einfluß auf die mathematischen Physiker, an welche er eigentlich gerichtet war, war deshalb sehr gering. Erst im 20. Jahrhundert, vor allem durch Albert Einstein (1879–1955), wurden seine Gedanken zur Struktur des physikalischen Raumes wieder aufgegriffen. Hingegen kann der Einfluß der Veröffentlichung von Riemanns Habilitationsvortrags auf die Entwicklung der Mathematik kaum überschätzt werden. Mit dem allmählichen Bekanntwerden der nichteuklidischen Geometrie GLB wurde den Mathematikern bewußt, daß Riemann ein Forschungsprogramm skizziert hatte, das diese hypothetische Geometrie mit der ebenfalls hypothetischen n-dimensionalen Geometrie sowie mit der Gauss'schen Differentialgeometrie verschmolz und zu einer höheren Einheit verband und damit bisher ungeahnte Möglichkeiten mathematischer Forschung erschloß. Riemann deutete an, daß die nichteuklidische Geometrie GLB im Rahmen eines Spezialfalles seines Begriffs einer «unendlich ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit variabler Metrik» (und folglich variabler Krümmung) realisiert werden könne, nämlich innerhalb einer «Mannigfaltigkeit von konstanter *negativer* Krümmung». Riemann schloß weiter, daß es neben GLB noch eine andere Art hypothetischer Geometrie geben müsse, nämlich eine solche, die mit seinen «Mannigfaltigkeiten *positiver* konstanter Krümmung» zusammenhängt und für welche weder PA(E) noch das von Gauss, Lobačevskij und Bolyai zugrundegelegte Postulat PA(GLB) gilt. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß Riemann eine umfassende *analytische* Theorie hypothetischer Geometrien skizzierte im Gegensatz zum rein

axiomatischen (begrifflichen) Vorgehen der Entdecker der nichteuklidischen Geometrie GLB.

Kurz nach der Veröffentlichung von Riemanns Vortrag verifizierte der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami (1835–1900), daß auf Flächen konstanter negativer Krümmung (aufgefaßt als «zweidimensionale Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung» im Sinne Riemanns) tatsächlich die nichteuklidische Geometrie GLB mit den Mitteln der Gauss'schen Differentialgeometrie realisiert werden kann (siehe *Bonola/Liebmann,* 1908; *Mainzer*, 1980). D.h. die Geometrie *auf* einer solchen gekrümmten Fläche gehorcht genau den Gesetzen, die Gauss, Lobačevskij und Bolyai aufgrund rein axiomatischer Überlegungen gefunden hatten. Mit anderen Worten, Beltrami konstruierte das erste konkrete mathematische Modell der nichteuklidischen Geometrie GLB. Damit war ein entscheidender Schritt für die Anerkennung der nichteuklidischen Geometrie getan: sie war nun nicht mehr ein isoliertes Gebiet mathematisch-logischer Spekulation, sondern eingebunden in die aktuellsten mathematischen Forschungsergebnisse der Zeit, und damit aus dem Status eines spekulativen Begriffssystems in den Stand einer mathematischen Tatsache (Theorie) gehoben.

7. Nichteuklidische Geometrie und projektive Geometrie

Riemanns Ansatz zur Integrierung der hypothetischen nichteuklidischen Geometrie GLB in die zeitgenössische Mathematik befruchtete vor allem die Entwicklung auf analytischem Gebiet. Das traditionelle Gebiet geometrischer Forschung im 19. Jahrhundert, die projektive Geometrie, blieb davon zunächst völlig unberührt.

Wie die nichteuklidische Geometrie, so hat auch die projektive Geometrie ihre eigentliche Geburtsstunde am Anfang des 19. Jahrhunderts (siehe *Klein*, 1926; *Mainzer*, 1980). Es war insbesondere Jean-Victor Poncelet (1788–1867), der mit großer Genialität die Ideen seiner Vorgänger aufnahm und durch seine «neue Art geometrischer Anschauung» und sein «projektives Denken» (*Klein*, 1926, S. 80) der projektiven Geometrie zum Durchbruch verhalf. Der Plan eines *rein synthetischen* Aufbaues der projektiven Geometrie findet sich erstmals bei Jacob Steiner (1796–1863). Man verdankt ihm das Prinzip der sukzessiven Erzeugung von Gebilden höheren Grades aus linearen Gebilden (den sogenannten geometrischen Grundgebilden wie Punktreihe, Strahlenbüschel usw.), wie etwa die Erzeugung der Punkte eines Kegelschnittes aus zwei projektiven Strahlenbüscheln. Konsequenz in der Durchführung eines einmal gefaßten Planes verband sich bei ihm mit einer glänzenden Darstellungsgabe. Einen gewissen Abschluß und Höhepunkt erreichte die synthetische projektive Geometrie durch die durchgreifend systematisch und konsequent dual aufgebauten Werke *Geometrie der Lage* (1847) und *Beiträge zur Geometrie der Lage* (1856–60) von Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867). Der eigentliche Begründer der *analytischen* projektiven Geometrie ist Julius Plücker (1801–1868). Er publizierte nicht nur ein paar Arbeiten oder *ein* Buch zu diesem Gegenstande, sondern sein ganzes mathematisches Lebenswerk war diesem Gebiet gewidmet und hat dementsprechend dessen Entwicklung wesentlich geprägt. Plücker war weniger interessiert an der Erzeugung neuer Resultate als an der Demon-

strierung neuer *Methoden:* er wollte einen Neuaufbau der analytischen Geometrie liefern. Man verdankt ihm unter anderem den konsequenten Gebrauch homogener Koordinaten, die analytische Fassung des Dualitätsprinzips, sowie das Prinzip der abgekürzten Notation.

In einer klassisch gewordenen algebraischen Arbeit aus dem Jahre 1859 stellte Arthur Cayley die charakteristischen Eigenschaften, welche die euklidische Geometrie von der projektiven unterscheiden, zusammen. Er ging von der seit Poncelet bekannten Tatsache aus, daß alle euklidischen Transformationen der Ebene, vom projektiven Standpunkt aus betrachtet, die unendlich ferne Gerade sowie ein auf ihr liegendes (konjugiert komplexes) Punktepaar in sich überführen (invariant lassen). Letzteres nannte er das «absolute» Punktepaar der euklidischen Geometrie. Cayley realisierte nun, daß es sich bei den euklidischen Transformationen um einen Spezialfall von viel allgemeineren Transformationen handelt, nämlich um projektive Transformationen, die einen Kegelschnitt invariant lassen, d.h. einen Kegelschnitt als «absolutes» Gebilde besitzen. Er konnte zeigen, daß sich auf der Grundlage eines solchen Systems von Transformationen, die einen Kegelschnitt invariant lassen, eine «projektiv metrische Geometrie» begründen ließ, die sich in mehreren Eigenschaften deutlich von der euklidischen Geometrie unterschied (siehe dazu und für das Folgende *Bonola/Liebmann*, 1908; *Klein*, 1926, 1928; *Mainzer*, 1980).

Es war dem mit dem neuesten Stand der geometrischen Forschung in allen ihren Aspekten bestens vertrauten, kaum 22-jährigen Felix Klein (1849–1925) vorbehalten, die Brücke von Cayleys «projektiver metrischer Geometrie» zur nichteuklidischen Geometrie GLB zu schlagen. Nimmt man als absolutes Gebilde einen reellen nichtausgearteten Kegelschnitt und betrachtet nur das Punktgebiet im «Innern», so läßt sich auf dieser Menge die hypothetische nichteuklidische Geometrie GLB realisieren, indem man die Punkte auf dem Kegelschnitt als «unendlich fern» interpretiert und die abstandstreuen Bewegungen dieser Geometrie mit denjenigen projektiven Transformationen identifiziert, die diesen Kegelschnitt invariant lassen. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf ihr liegenden Punkt P gehen dann genau zwei Parallelen u und v und unendlich viele nichtschneidende Geraden (*Bild 4*), d.h. PA(GLB) ist erfüllt. Es zeigt sich, daß bei geeigneter Definition der Länge einer Strecke AB vermittels des Logarithmus des (projektiven) Doppelverhältnisses der Punkte A, B, U, V alle Postulate der euklidischen Geometrie,

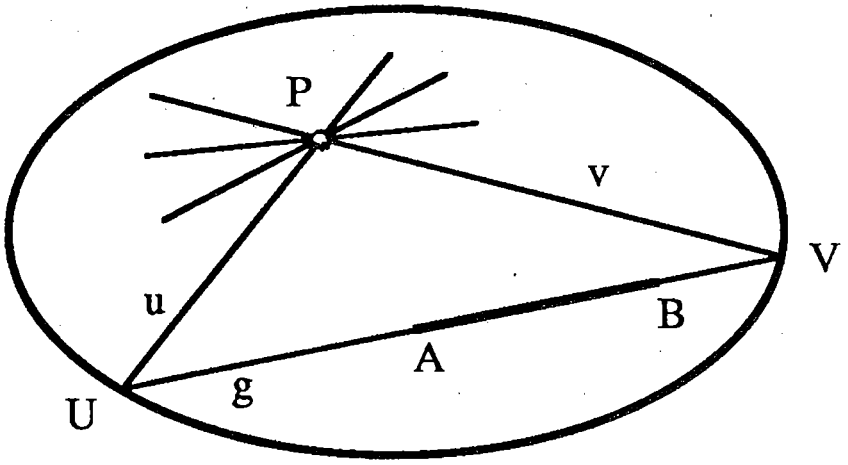

Bild 4

außer natürlich PA(E), erfüllt sind. Es handelt sich folglich um ein (projektives) Modell der nichteuklidischen Geometrie GLB. Klein nannte diese Geometrie «hyperbolisch» und diejenige, der ein imaginärer Kegelschnitt zugrunde liegt, «elliptisch».

Klein zeigte weiter, daß die «elliptische» Geometrie strukturgleich ist mit der von Riemann erstmals erwähnten Geometrie in einer, im vorliegenden Falle zweidimensionalen, Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung. Dies ist aber im wesentlichen die Geometrie auf einer Kugeloberfläche, d.h. die klassische sphärische Geometrie. Bezeichnet man Großkreise (größte Kreise) auf der Kugeloberfläche als «Geraden» und Paare von Diametralpunkten als «Punkte», dann gilt in der in dieser Weise zur elliptischen Geometrie modifizierten sphärischen Geometrie weder PA(E) noch PA(GLB). Anstelle dieser Parallelenaxiome tritt das Folgende (siehe *Bild 5*):

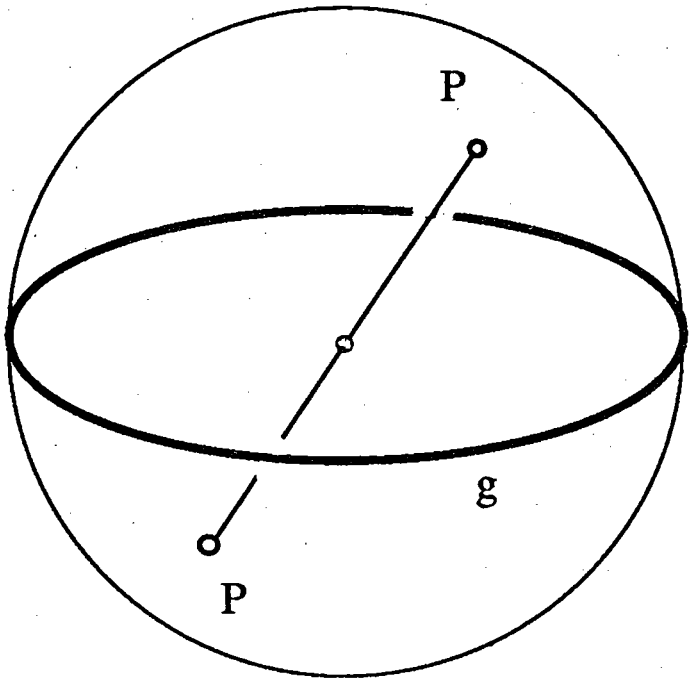

Bild 5 Parallelenaxiom PA(R):
Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es keine Parallele.

Mit anderen Worten, in der elliptischen Geometrie gibt es keine nichtschneidenden Geraden (da Paare von Großkreisen sich immer in genau einem diametralen Punktepaar schneiden). Diese Tatsache rückt die elliptische Geometrie näher zur projektiven Geometrie und deshalb gelten in ihr auch die neben PA(E) vorhandenen Axiome der euklidischen Geometrie nur teilweise (insbesondere nicht die euklidischen Anordnungsaxiome).

Kleins Idee der Einbettung der nichteuklidischen Geometrie GLB und der Riemannschen Geometrie in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung (Kugel) in die projektive Geometrie war zugleich die Keimzelle seines berühmt gewordenen *Erlanger Programms* (1872). Dieses Forschungsprogramm, wenn

auch von ganz anderem Inhalte, war von ähnlicher Reichweite und Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik wie dasjenige Riemanns. Klein benützte die erst seit kurzer Zeit ins mathematische Bewußtsein gerückte Idee der «Gruppe» als organisierendes Prinzip für eine umfassende Definition des Begriffes «Geometrie». Nach seiner Auffassung besteht die Aufgabe des Geometers darin, verschiedene Typen von Transformationsgruppen aufzustellen und dann für jeden Typus diejenigen Eigenschaften und Beziehungen herauszuarbeiten, die bei den Transformationen dieses Typus sich der Struktur (Gesetz) nach nicht ändern, d.h. invariant bleiben. Kurz gesagt, Geometrie ist die Invariantentheorie einer Transformationsgruppe. So spalten sich etwa die projektiven Transformationen, die einen Kegelschnitt invariant lassen, in verschiedene Typen, je nachdem dieser Kegelschnitt reell, oder imaginär, oder in zwei konjugiert komplexe Punkte oder zwei konjugiert komplexe Geraden ausgeartet ist. Die Gesamtheit der geometrischen Sätze, welchen diese Transformationen nichts anhaben können, machen dann beziehungsweise den Inhalt der «hyperbolischen», «elliptischen», «euklidischen», oder «polar-euklidischen» Geometrie aus. So bleibt etwa das obengenannte Axiom PA(GLB) der «hyperbolischen» Geometrie, das an die Stelle von PA(E) tritt, offenbar gültig, so oft wir auch die Ebene in sich transformieren, solange nur diese Transformationen Geraden in Geraden überführen und den absoluten Kegelschnitt invariant lassen. Ähnliches gilt für die Invarianz von PA(R) in der «elliptischen» Geometrie auf der Kugeloberfläche, wenn die abstandstreuen Transformationen mit den (euklidischen) Rotationen der Kugel identifiziert werden.

Kleins Ideen erwiesen sich als äußerst fruchtbar für die geometrische Forschung bis weit in das 20. Jahrhundert hinein. Sie waren der Triumph eines synthetischen Geistes ersten Ranges und verhalfen der Anerkennung der nichteuklidischen Geometrien zum Durchbruch, indem sie den Geometern den Ort anwiesen, wo und wie sie innerhalb der in ihrer Hochblüte stehenden projektiven Geometrie eine Realisierung des axiomatischen Systems von Gauss, Lobačevskij und Bolyai, sowie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, finden konnten.

Die Entdeckung und Weiterentwicklung der nichteuklidischen Geometrien und deren Modelle führten auf nicht mit unserem Anschauungsraum identische, aber exakt denkmögliche «nichteuklidische Räume». Wie bereits angedeutet, begannen dadurch sich auch die Schranken, die die Dreidimensionalität des Anschauungsraumes setzte, zu lösen: man nahm nun n-dimensionale Punkträume *formal* genau so ernst wie die schon bekannten «anschaulichen» Räume höherer Dimension, wie etwa den vierdimensionalen Linienraum. Hatte sich das Bewußtsein der Mathematiker einmal an *einer* Stelle vom euklidischen Anschauungsraum gelöst, so waren nun den Denk- und Verstehensmöglichkeiten kaum mehr Grenzen zu setzen.

Die bisher skizzierten Entwicklungen führten zu einer Bewußtseinsumwälzung, die in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts, ausgehend von der Mathematik, auf die ganze Kultur übergriff und in deren Konsequenzen wir noch heute darinnenstehen. *Eine* Veranlassung dazu bildete die nichteuklidische Geometrie. Etwas später kamen zwei weitere Entwicklungsströme hinzu, die für alles folgende entscheidend wurden: erstens die Begründung der Mengenlehre durch Georg Cantor (1845–1918), die Licht in die Abgründe des Begriffs der Unendlichkeit brachte und begriffliche Klarheit in mathema-

tische Bereiche trug, die sich der Anschauung vollkommen entziehen, zweitens die Entstehung der axiomatischen Methode, sowie drittens die Herausarbeitung der mathematischen Logik als eigene Disziplin der Grundlagenforschung.

Das Vertrauen in die innere Folgerichtigkeit der Mathematik und ihre schier unbegrenzten Möglichkeiten wuchs nun in ungeahntem Maße: die von den Fesseln der Anschauung frei gewordenen, in ihren inneren Bezügen klargelegten mathematischen Begriffe wurden endgültig zum Vorbild aller exakten naturwissenschaftlichen Bestrebungen überhaupt erhoben. Ganz im Sinne Kants glaubte man nur noch dort begriffliche Klarheit zu haben, wo Mathematik darinnen ist, d.h. wo mathematische Begriffe zur Analyse und Synthese von Prozessen und Gesetzmäßigkeiten verwendet wurden. Die Mathematik war nicht mehr nur *ein* Instrument naturwissenschaftlicher Erkenntnis, sondern stellte *das* Begriffsnetz dar, in welches die gesamte Mannigfaltigkeit der Natur letztlich eingefangen werden sollte. Die Mathematisierung der Naturwissenschaften trat damit in ihre entscheidende Phase.

Diese Entwicklungstendenz hatte zur Folge, daß auch die nichteuklidischen Geometrien auf ihr Potential zur Modellierung ausgewählter Bereiche der Natur untersucht wurden. Ein empirisch verifizierbarer Erfolg stellte sich aber zunächst nicht ein. Die rein theoretische Anwendung nichteuklidischer Begriffe auf die Mechanik des starren Körpers zeitigte aber Ergebnisse, die zu Kristallisationspunkten einer erweiterten Auffassung der mathematischen Physik geworden sind. Auf diese Entwicklungen soll u.a. in den verbleibenden Abschnitten eingegangen werden.

8. Anwendungen nichteuklidischer Geometrien auf die Mechanik

Es ist eine interessante historische Tatsache, daß die beiden Mathematiker, die für die Integration der nichteuklidischen Geometrie GLB in den Hauptstrom der Mathematik hauptsächlich verantwortlich waren, sogleich versuchten, Anwendungsgebiete dieser neuen Art von Geometrie in der mathematischen Physik zu finden. Auf die diesbezüglichen Andeutungen Riemanns haben wir bereits hingewiesen. Es ist aber bisher kaum ins mathematische, wie auch historische, Bewußtsein gedrungen, daß die nichteuklidische Geometrie in der Form, in der sie Cayley und Klein innerhalb der projektiven Geometrie realisierten, in detaillierter Weise auf eine klassische Disziplin der Physik angewendet wurde, nämlich auf die Mechanik des starren Körpers.

Zunächst verallgemeinerte Felix Klein die Ideen Cayleys auf dreidimensionale und höherdimensionale Räume und zeigte, daß es in jedem dieser Räume mehrere wesentlich verschiedene Typen von nichteuklidischen Geometrien gibt (siehe *Klein*, 1928). Durch seinen Lehrer Julius Plücker sowohl an Fragen der Liniengeometrie wie auch der Mechanik interessiert, widmete er sich der Einbettung dieser Gebiete in das System seines Erlanger Programms und der projektiven Geometrie.

Zunächst steht fest, daß der euklidische Raum eine (im Sinne Cayleys) ausgeartete projektive Maßbestimmung besitzt und demzufolge, im Vergleich mit einer allgemeinen projektiven metrischen Geometrie, eine deutliche Unsymmetrie aufweist. D.h. im Bereiche der euklidischen Geometrie ist das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie

nicht mehr universell gültig. Gemäß diesem Prinzip muß zu jeder aus Punkten [Ebenen] aufgebauten Figur eine ebensolche mit gleichartiger Struktur, nun aber aus Ebenen [Punkten] zusammengesetzt, existieren. Aber in der euklidischen Geometrie gibt es nur *eine* isolierte unendlich ferne Ebene, aber keinen *isolierten* unendlich fernen Punkt. Dies ist geradezu ein Charakteristikum der euklidischen Geometrie, denn ihr absolutes Gebilde (im Sinne Cayleys) besteht genau aus dieser unendlich fernen Ebene und einem in derselben liegenden imaginären Kegelschnitt. Dieses Gebilde ist aber nicht zu sich selbst polar, da einem Kegelschnitt ein Kegel dual entsprechen müßte, es in der euklidischen Geometrie aber keinen bei *allen* abstandstreuen Transformationen invarianten, d.h. absoluten, Kegel gibt. Allerdings gibt es einen solchen in der polar-euklidischen Geometrie; diese Geometrie besitzt dann aber keinen absolut invarianten Kegelschnitt. Nur durch eine Vereinigung dieser beiden Räume könnte diese Unsymmetrie beseitigt werden.

Diese Unsymmetrie des euklidischen Raumes kommt besonders deutlich zum Ausdruck in der Kinematik und Statik. So haben etwa Rotationen wohlbestimmte Achsen, Translationen nicht. Wie August Ferdinand Möbius (1790–1868) erstmals klar durchschaute, verhalten sich die Grundbegriffe der Statik formal analog wie die Grundbegriffe der infinitesimalen Kinematik. So kommt der Einzelkraft eine wohlbestimmte Achse zu, dem Drehmoment dagegen nicht. Dem Drehmoment kann nach Louis Poinsot (1777–1859) dagegen ein Kräftepaar zugeordnet werden, und entsprechend einer Translation ein Rotationspaar. Felix Klein vermutete nun, daß diese Unsymmetrien wegfallen, wenn man die euklidische Maßbestimmung durch eine im Sinne Cayleys nichtausgeartete ersetzt, d.h. den in der unendlich fernen Ebene liegenden Kegelschnitt durch eine nichtausgeartete Fläche zweiten Grades ersetzt. In einem derart metrisierten Raum müßten dann sowohl Rotationen wie Translationen wohlbestimmte Achsen haben. (Für Einzelheiten dieser Theorie und ihrer historischen Entwicklung, siehe *Ziegler*, 1985.)

Ein Schüler Felix Kleins, Ferdinand Lindemann (1852–1939), entwickelte in seiner Dissertation (1874) die Grundbegriffe der Statik und Kinematik im Rahmen nichtausgearteter projektiver Maßbestimmungen, d.h. innerhalb der projektiven Modelle der beiden oben genannten klassischen nichteuklidischen Geometrien, der hyperbolischen und elliptischen Geometrie. Wie in der euklidischen Statik hat man es dann, dem Gesetze nach, mit Kräften zu tun, die *nach* Geraden wirken (Translationskräfte genannt); an die Stelle des Drehmomentes tritt nun aber eine Kraft, die *um* eine Gerade wirkt (Rotationskraft genannt) und eine Angriffs*ebene* hat (dual entsprechend zum Angriffs*punkt* der Translationskraft). Jede Bewegung ist momentan eine Schraubenbewegung, die aber im Gegensatz zu euklidischen Bewegungen *zwei* wohlbestimmte Achsen hat. (Ein Schatten dieser Gesetzmäßigkeit läßt sich aber doch auch noch im Rahmen der euklidischen Geometrie aufspüren: die zur Schraubungsachse senkrechte unendlich ferne Gerade kann als zweite Achse der Schraubung interpretiert werden.) Jede solche Schraubenbewegung kann entweder in zwei Rotationen (wie im euklidischen Fall) oder in zwei Translationen mit wohlbestimmten Achsen aufgelöst werden. Dabei kann die eine Achse jeweils beliebig angenommen werden, wobei dann die andere eindeutig bestimmt ist. (Für eine ausführliche historisch-systematische Analyse der Lindemannschen Dissertation, sowie ihrer Vorgeschichte und Rezeption, siehe *Ziegler*, 1985.)

Lindemann legte großen Wert darauf, daß seinen Überlegungen kein Wirklichkeitsbezug zukommt und distanzierte sich damit von den bereits damals um sich greifenden metaphysischen Spekulationen um vierdimensionale und nichteuklidische Räume. Rotationskräfte, d.h. Drehkräfte mit ebenenhaftem Charakter, ließen sich tatsächlich im Rahmen der euklidischen Mechanik empirisch nicht feststellen. Es wiesen auch keine Experimente innerhalb des Gesamtgebietes der Naturwissenschaften direkt auf die Existenz solcher Kräfte hin. Trotzdem wurde aber die nichteuklidische Mechanik des starren Körpers eine gewisse Zeit weiterverfolgt und bis in viele Details ausgebaut. Ob es Wirklichkeitsbereiche gibt, für welche diese im euklidischen Raum nicht anwendbaren Begriffe eine Bedeutung haben, mußte zunächst offen gelassen werden. Es gehört zum Wesen der Mathematik, daß sie mit ihren Begriffen Gesetzesinhalte ergreifen kann, deren Erscheinungsdasein noch nicht entdeckt wurde, oder denen vielleicht überhaupt keine sinnlichen Erscheinungen zugeordnet werden können.

Es handelt sich auch bei der nichteuklidischen Mechanik um eine Gedankenschöpfung, die ihre Rechtfertigung nur durch ihre innere logische Konsistenz erhielt. Sie drückte zugleich das Bedürfnis der Mathematiker aus, die ihnen bisher vorgegebenen Grenzen zu sprengen, und in die Gesetzmäßigkeiten von Bereichen einzudringen, die kurz zuvor noch durch die Verabsolutierung der Sinnesanschauung verschlossen schienen. Dies war ein wichtiger Schritt zur Überwindung der Grenzen der Sinneserfahrung im Rahmen der mathematischen Physik und zugleich ein Keim einer erweiterten Auffassung derselben.

9. Von der Naturwissenschaft zur Geisteswissenschaft

Gegen Ende des 19. und den Beginn des 20. Jahrhunderts profilierten sich zwei geistige Strömungen, die sich schon seit der kopernikanischen Wende immer wieder bemerkbar machten, aber erst im 19. Jahrhundert deutlich zum Durchbruch und zur Vorherrschaft gelangten. Zum einen finden wir innerhalb der Entwicklungsgeschichte der Mathematik eine besonders im 19. Jahrhundert kraftvoll in die Erscheinung getretene Tendenz zu immer abstrakter und sinnlichkeitsfreieren Begriffsbildungen, deren Rechtfertigung nur in ihrem gegenseitigen gesetzmäßigen Zusammenhange liegt. Dadurch wurde die Mathematik zu einer Wissenschaft rein geistiger Inhalte. Auf der anderen Seite löste sich die Naturwissenschaft im 19. Jahrhundert endgültig von einer wie auch immer gearteten Einordnung des Naturgeschehens in einen Kosmos, dessen Substanz als wesentlich geistiger Natur angesehen wurde. Was den Naturwissenschaftler interessierte, war nur noch der formale Aspekt der Gesetze und nicht mehr deren Wirksamkeitsqualitäten. Die Form des anorganischen Naturerkennens wurde zur Form des Erkennens überhaupt erhoben. Die dort vorhandene Trennung von Begriff und Gegenstand (*Steiner*, 1886, S. 105) kam der vorherrschenden dualistischen Weltanschauung in idealer Weise entgegen. Zusätzlich verengte sich die Auffassung des Formalen auf das Mathematische, und die vorherrschende naturwissenschaftliche Methode wurde die mathematische Modellierung. Die «neue Geistigkeit» der Mathematik, d.h. ihre totale Abstraktheit, Allgemeinheit und Flexibilität machten sie zu einem scheinbar idealen

und universellen Instrument der Erkenntnis, dessen prinzipielle Beschränktheit nicht mehr wahrgenommen wurde. Statt daß man sich mit Hilfe der Mathematik das Wesen des Geistigen und dessen Verhältnis zur Sinnlichkeit wieder bewußt machte, wurde die Mathematik als bloßes Instrument zur Beherrschung der Natur verwendet.

Im Folgenden soll auf die Ideen Rudolf Steiners (1861–1925) zur Bedeutung der Mathematik für die Erziehung des übersinnlichen Bewußtseins sowie für die naturwissenschaftliche Methodik eingegangen werden. Die ausführlichen Zitate dienen dazu, nachzuweisen, daß Steiner mit aller nur wünschbaren Klarheit deutlich macht, worauf es ankommt.

Rudolf Steiner, an die Platonische Tradition sowie an Goethes Verhältnis zur Mathematik anknüpfend, stellt die Bedeutung der Mathematik für die Schulung des modernen Bewußtseins klar heraus:

Das «mathematische Anschauen» ist, wie Steiner ausführt, «ein Erziehungsmittel zum Leben in der sinnlichkeitsfreien Ideenwelt. Denn die mathematischen Gebilde schweben an der Grenze zwischen der sinnlichen und der rein geistigen Welt. [...] An dem mathematischen Gebilde kann ich auf sinnliche Art übersinnliche Tatsachen kennenlernen. [...] Die Idee muß rein geistig angeschaut werden, soll sie in ihrer wahren Wesenheit erkannt werden. Dazu kann man sich erziehen, wenn man im Mathematischen die Vorstufe dazu übt, wenn man sich klarmacht, was man eigentlich an einem mathematischen Gebilde gewinnt.» (*Steiner*, 1904, S. 8f.)

«Durch die Schulung im Geist des Mathematischen geht *einer* der Wege, die zur Läuterung von dem Leben in der Sinnlichkeit führen.» (*Steiner*, 1904, S. 18)

Die Schulung des Bewußtseins mit Hilfe der Mathematik kann unter zwei Aspekten betrachtet werden. Einerseits bereitet die Beschäftigung mit der Mathematik den Menschen vor, sich im Reiche *reiner* Gesetzmäßigkeiten zu bewegen ohne das Wach-Bewußtsein zu verlieren, sowie sich einen Begriff zu bilden, in welcher Weise reine Gesetze miteinander, so wie mit den Sinneserfahrungen verknüpft sind. Andererseits stärkt das regelmäßige Umgehen mit mathematischen Begriffen die *Denkkraft* und führt zur keimhaften Bildung eines übersinnlichen Organs. Wir wenden uns zunächst dem ersten Aspekt zu:

«Man denke den ‹Kreis›. Dabei denkt man nicht diesen oder jenen sinnlichen Kreis, den man vielleicht auf dem Papier entworfen hat, sondern jeden beliebigen Kreis, den man nur je zeichnen oder den man in der Natur antreffen kann. Und so ist es mit allen mathematischen Gebilden. Sie beziehen sich auf das Sinnliche. Aber sie sind durch kein Sinnliches erschöpft. Sie schweben über unzähligen, mannigfaltigen Gebilden. Wenn ich mathematisch denke, denke ich über das Sinnliche, aber ich denke zugleich nicht *im* Sinnlichen. Nicht der sinnliche Kreis lehrt mich die Gesetze des Kreises, sondern der ideelle Kreis, der nur in meinem Geiste lebt und von dem der sinnliche nur ein Bild ist. Dasselbe könnte mich eben jedes andere sinnliche Bild des Kreises lehren. Das ist das Wesentliche der mathematischen Anschauung, daß mich ein einzelnes sinnliches Gebilde über sich selbst hinausführt, daß es mir nur Gleichnis sein kann für eine umfassende geistige Tatsache.» (*Steiner*, 1904, S. 8f.)

«‹Lerne über das Wesen der Natur und des geistigen Daseins so frei von jeder sinnlichen Anschauung denken, wie der Mathematiker über den Kreis und seine Gesetze denkt, dann magst du ein Geheimschüler werden.› Das sollte wie mit goldenen Lettern vor jedem stehen, der wirklich Wahrheit sucht.» (*Steiner*, 1904, S. 10)

Und zusammenfassend:

«Ein Wissen, das in Gebieten erworben wird, wo die Krücke der Sinnesanschauung fehlen muß, kann ja am einfachsten verständlich werden da, wo sich der Mensch am allerleichtesten von solcher Anschauung frei macht. Und das ist innerhalb der Mathematik der Fall. Sie ist deshalb die am leichtesten zu überwindende Vorschule für *den* Okkultisten, der in lichter, heller Klarheit, und nicht in dunkel-gefühlsmäßiger Ekstase, oder in einem träumerischen Ahnen sich zu den höheren Welten erheben will. Der Okkultist und Mystiker lebt im Übersinnlichen in solcher lichtvollen Klarheit wie der Elementar-Geometer innerhalb seiner Gesetze von Dreiecken und Kreisen. Denn die wahre Mystik lebt im Lichte, nicht in der Finsternis.» (*Steiner*, 1904, S. 15f.)

Man beachte, daß Steiner die Mathematik nicht als die einzig mögliche und sinnvolle Vorschule zur Geisterkenntnis bezeichnet. Sie ist nur die am leichtesten zugängliche. Nach dem weiter oben gesagten dürfte es klar sein, daß das Studium der Hegelschen Logik eine ähnliche Wirkung hat.

Welche mathematischen Inhalte für diese Schulung verwendet werden, ist zunächst, prinzipiell gesehen, nicht von Bedeutung. Je weniger sich diese Inhalte allerdings auf die Sinneswelt beziehen, je leichter wird man sich von dieser lösen können. Und hier liegt ein wichtiger Aspekt der Beschäftigung mit der projektiven und der in ihr eingebetteten nichteuklidischen Geometrien. Es kommt aber noch ein weiterer Gesichtspunkt in Betracht. Wir lernen anhand der Beschäftigung mit diesen Geometrien nicht nur, uns überhaupt innerhalb reiner Gesetzmäßigkeiten zu bewegen, sondern müssen Begriffe denken, zu deren Spezialisierung in konkrete Vorstellungen wir uns erst erziehen müssen, da uns keine Sinneswahrnehmungen zugänglich sind, welche eine solche Spezialisierung herbeiführen können. Daher läutert dies nicht nur das Denken, sondern zugleich auch das zunächst ans Sinnliche gebundene Vorstellungsleben. Ersteres führt zur Fähigkeit des reinen Denkens, d. h. eines Denkens, das der Stütze der Sinnesanschauung nicht mehr bedarf, letzteres zur Fähigkeit zu sinnesunabhängigen und doch exakten Phantasieschöpfungen innerhalb des gewöhnlichen Vorstellungslebens. Die schöpferische Tätigkeit, mit der aus reinen mathematischen Begriffen konkrete Vorstellungen ohne Hilfe der Sinnesanschauung heraus individualisiert werden, hat ihre genaue Entsprechung in der schöpferischen moralischen Phantasie des sittlich produktiven freien Menschen, der die durch moralische Intuition erfaßte allgemeine Handlungsmaxime (Gesetz) zu einer konkreten Handlungsanweisung individualisiert (siehe *Steiner*, 1894, Kap. XII). Da die zu verwirklichende Handlung in der Zukunft liegt, kann die moralische Phantasie sich auf keine gegenwärtige oder vergangene Wahrnehmung stützen. Da die uns zugängliche sinnliche Welt euklidischen Charakter hat, können wir uns beim Individualisieren der Gesetze der projektiven oder nichteuklidischen Geometrie zu konkreten Vorstellungen auf keine gegenwärtig erfahrbaren Wahrnehmungen stützen. Die Erzeugung solcher Vorstellung in der inneren Anschauung kann ausschließlich durch die reine Gesetzlichkeit der Begriffe selbst geleitet werden (unter Zuhilfenahme gewisser Erinnerungsvorstellungen, die sozusagen das Baumaterial abgeben, aus welchem die Gesamtvorstellung aufgebaut wird).

In Anknüpfung an Goethe macht Steiner darauf aufmerksam, daß der Anwendung der Mathematik nur eine beschränkte Funktion im naturwissenschaftlichen Erkennt-

nisprozeß zukommt, im Gegensatz, oder vielmehr in Ergänzung, dazu aber die mathematische *Methode* von entscheidender Bedeutung ist. Um dies näher einzusehen, muß erst die Stellung der Mathematik zur Naturwissenschaft genauer charakterisiert werden. Die Tatsache, daß jedes Gesetz, insofern es in der Sinneswelt Erscheinungen hervorbringt, einen mathematischen Aspekt hat, macht die Mathematik zum scheinbar universellsten Erkenntnisinstrument der Naturwissenschaften überhaupt. In dieser Universalität liegt aber zugleich eine ihrer Schwächen, denn ihre Gesetze sind zu umfassend und inhaltsmager, um sich auf die individuelle Gesetzlichkeit irgendeines sinnlichen Gegenstandes der Erkenntnis spezialisieren zu lassen. Zudem umfaßt der mathematische Aspekt in keinem Falle die Sache selbst. Im Zusammenhang einer Diskussion des Goetheschen Verhältnisses zur Mathematik charakterisiert Steiner diese Sachlage mit den folgenden Worten:

«Gegenstand der Mathematik ist die Größe, das, was ein Mehr oder Weniger zuläßt. Die Größe ist aber nichts an sich selbst Bestehendes. Es gibt im weiten Umkreis menschlicher Erfahrung kein Ding, das *nur* Größe ist. Neben anderen Merkmalen hat jedes Ding auch solche, die durch Zahlen bestimmt sind. Da die Mathematik sich mit Größen beschäftigt, hat sie zu ihrem Gegenstande keine in sich vollendeten Erfahrungsobjekte, sondern nur alles das von ihnen, was sich messen oder zählen läßt. Sie sondert alles, was sich der letzten Operation unterwerfen läßt, von den Dingen ab. So erhält sie eine ganze Welt von Abstraktionen, innerhalb welcher sie dann arbeitet. Sie hat es nicht mit Dingen zu tun, sondern nur mit den Dingen, insofern sie Größen sind. Sie muß zugeben, daß sie da nur *eine* Seite des Wirklichen behandelt, und daß die letztere noch viele andere Seiten hat, über die sie keine Macht hat. Die mathematischen Urteile sind keine Urteile, die wirkliche Objekte voll umfassen, sondern sie haben nur innerhalb der ideellen Welt von Abstraktionen Gültigkeit, die wir selbst als *eine* Seite der Wirklichkeit von der letzteren begrifflich abgesondert haben. Die Mathematik abstrahiert die Größe und die Zahl von den Dingen, stellt die ganz ideellen Bezüge zwischen Größen und Zahlen her und schwebt so in einer reinen Gedankenwelt. Die Dinge der Wirklichkeit, insofern sie Größe und Zahl sind, erlauben dann die Anwendung der mathematischen Wahrheiten. Es ist also ein entschiedener Irrtum, zu glauben, daß man mit mathematischen Urteilen die Gesamtnatur erfassen könne. Die Natur ist eben nicht bloß Quantum; sie ist auch Quale, und die Mathematik hat es nur mit dem ersteren zu tun. Es müssen sich die mathematische Behandlung und die rein auf das Qualitative ausgehende in die Hände arbeiten; sie werden sich am Dinge, von dem sie jede *eine Seite* erfassen, begegnen.» (*Steiner*, 1883–1897, Kap. XII, S. 239f.)

Zu dieser Definition des Gegenstandes der Mathematik möchte ich zwei Bemerkungen machen: Interpretiert man den Begriff «Größe» im Rahmen der Hegelschen *Logik*, wie die Steinerschen Formulierungen nahelegen, so umfaßt er weit mehr als man zunächst anzunehmen geneigt ist. Entscheidend ist hier vor allem Hegels Begriff des Maßes (qualitatives Quantum), innerhalb welchem Qualität und Quantität zu einer *unmittelbaren* Einheit verschmolzen werden. Damit drückt Hegel die Tatsache aus, daß eine bloße Veränderung des Quantums (bestimmte oder begrenzte Quantität) Indiz für eine Veränderung der Qualität sein kann. Andererseits darf «Zählen» und «Messen» nicht nur im alltäglichen (elementar-arithmetischen und euklidischen) Sinne interpretiert werden, da diese Tätigkeiten nur einen sehr untergeordneten Bereich des Mathematisierens umfassen – schon in der algebraischen Zahlentheorie und der projektiven Geome-

trie verläßt man dieses elementare Gebiet – sowie sich die im Hegelschen Sinne quantitativen Aspekte der Natur nicht auf das bloß Zählbare und Meßbare beschränken. Wir müssen es hier bei diesen Andeutungen belassen, wollen aber mit Nachdruck darauf hinweisen, daß es für ein Verständnis des Wesens der Mathematik sehr aufschlußreich ist, diesen Zusammenhängen im Detail nachzugehen.

Steiner bezeichnet es als eine Überschätzung der Mathematik, wenn man nur so weit strenge Erkenntnis zugeben wollte, als die Mathematik selbst reicht. Eine solche Überschätzung wird dem Wesen der Mathematik nicht gerecht, im Gegenteil:

«Gerade diejenigen, welche sich gegen diese Überschätzung der Mathematik selbst wenden, können erst wahre Schätzer der echten kristallklaren Forschung sein, die im *Geiste* der Mathematik auch da verfährt, wo Mathematik selbst aufhört. Denn die Mathematik in ihrer unmittelbaren Bedeutung hat es ja nur mit dem Quantitativen zu tun. Wo das Qualitative beginnt, da endet ihr Reich.

Es handelt sich aber darum, auch im Gebiete des Qualitativen in ihrem strengen Sinne zu forschen. Besonders scharf wandte sich in diesem Sinne *Goethe* gegen eine Überschätzung der Mathematik. Er wollte das Qualitative nicht gefesselt wissen durch eine rein mathematische Behandlungsart. Aber er wollte überall im Geiste des Mathematischen, nach dem Muster und Vorbild des Mathematischen denken.» (*Steiner*, 1904, S. 16f.)

«Aber man kann so mathematisch nur ausdrücken, was in Raum und Zeit sich auslebt, was *Ausdehnung* in diesem Sinne hat. Sobald man in die höheren Welten heraufsteigt, bei denen es sich nicht nur um Ausdehnung in diesem Sinne handelt, versagt auch die Mathematik in dieser ihrer unmittelbaren Gestalt. Aber es darf nicht versagen die *Art* der Anschauung, welche der Mathematik zugrunde liegt. Wir müssen die Fähigkeit gewinnen, über das Lebendige, über das Seelische und so weiter so frei, so unabhängig von dem einzelnen beobachtbaren Gebilde zu sprechen, wie wir über den Kreis unabhängig von dem einzelnen auf dem Papiere gezeichneten Kreis sprechen.» (*Steiner*, 1904, S. 11)

Wenn Steiner sagt, daß es die Mathematik in ihrer *unmittelbaren* Bedeutung nur mit dem Quantitativen zu tun hat, so läßt das, neben der Bedeutung der *Art* der ihr zugrunde liegenden Anschauung, die Möglichkeit offen, daß sie die Mittel enthält, gewisse Aspekte eines Qualitativen zu charakterisieren, solange man beachtet, daß man es auch in diesem Falle nur mit *einer* Seite der Sache zu tun hat, nämlich mit der Qualität, insofern sie in Raum und Zeit erscheint. Ein Beispiel dazu ist die weiter unten erwähnte mathematische Charakterisierung des von Steiner zur Beschreibung gewisser Phänomene der Welt der Bildekräfte eingeführten Begriffes eines «qualitativ gegensätzlichen Raumes», oder «Gegenraumes», wie er auch genannt wurde (*Steiner*, 1921a), mit Hilfe der projektiven Geometrie.

Wir wenden uns nun dem anderen weiter oben genannten Aspekt der Schulung des modernen Bewußtseins durch die Mathematik zu. Hat man einmal erkannt, daß konsequentes mathematisches Denken *reines* Denken ist, lassen sich darauf alle Erwägungen beziehen, die sich auf das reine Denken als Mittel zur Entwicklung und als Organ der übersinnlichen Anschauung beziehen (zu letzterem siehe etwa *Steiner*, 1922, Vortrag vom 10. April). Steiner weist auf diesen Zusammenhang deutlich hin:

«Dadurch, daß man mit der Mathematik in dem Gebiete des frei schaffenden Geistes lebt, ist dessen Wesenheit an ihr am deutlichsten in innerer Selbsterkenntnis einzusehen. Lenkt man die Anschauung von den Gebilden, die man in mathematischer Betätigung ausarbeitet, zurück auf diese Betätigung selbst, wird man sich dessen voll bewußt, was man tut, dann lebt man in einer Art frei schaffender Geistigkeit.

Man muß nur dann weiter die Beweglichkeit der Seele aufbringen, um dieselbe schöpferische Innentätigkeit, die man in der Mathematik entfaltet, auf andere Gebiete des inneren Erlebens auszudehnen. In dieser Beweglichkeit der Seele liegt die Kraft, zur imaginativen, inspirierten und intuitiven Erkenntnis aufzusteigen.» (*Steiner*, 1923, S. 151)

In einem öffentlichen Vortrag vor Akademikern über die «Stellung der Anthroposophie in den Wissenschaften» schildert Steiner einige die Mathematik betreffende Forschungsresultate der Geisteswissenschaft und faßt dann seine Ausführungen mit folgenden Bemerkungen zusammen:

«Das richtige Durchschauen der mathematischen Seelenverfassung führt uns direkt hinein in den Begriff des hellsichtigen Erfahrens, Erlebens. [...] Derjenige, der begreifen will den hellsichtigen Prozeß, muß ihn da aufsuchen, wo er am primitivsten vorhanden ist: im Gestalten des Mathematischen. [...] Und gelingt es uns, das Mathematisieren durch Übungen auszubilden, so werden wir nicht nur räumliche Verhältnisse in der Umwelt sehen, sondern wir lernen Geistwesen, bis zur geistigen Innerlichkeit vor uns sich offenbarende Geistwesen kennen [...], wenn wir in dieser Weise dasjenige, was wir im Mathematischen ausbilden, hinauftragen in höhere Gebiete.» (*Steiner*, 1922, Vortrag vom 8. April, S. 41)

Rudolf Steiner knüpfte aber nicht nur das Band zwischen Mathematik und anthroposophischer Geisteswissenschaft, sondern gab auch konkrete Hinweise zu einer geistgemäßen Durchdringung der Naturwissenschaften mit Hilfe ausgewählter mathematischer Begriffe und Methoden. Auf diese über viele Vorträge hin verstreuten Anregungen kann hier nicht im Einzelnen eingegangen werden. Eines muß jedoch auffallen, nämlich, daß Steiner wiederholt auf die Bedeutung der synthetischen projektiven Geometrie hingewiesen hat (siehe *Whicher*, 1970, Kap. IX). In einer öffentlichen Tagung für Akademiker macht er darauf aufmerksam, wie die Methode der *synthetischen* projektiven Geometrie zu der Methode der *analytischen* Geometrie in einem ähnlichen Verhältnis steht wie eine die Gesetze des Lebendigen, die Wirksamkeit ergreifende naturwissenschaftliche Methode zu einer bloß die toten Formen beschreibenden formal-mathematischen Methode.

«[... M]an muß sich klar sein, daß man niemals in das innerlich wesenhaft Differenzierte durch das Mathematische eindringen kann, wenn man dieses Mathematische in dem engen Sinne faßt, in dem es noch heute vielfach gefaßt wird.

Aber schon sehen wir auch innerhalb des Mathematischen eine Art Weg, der aus dem Mathematischen selber herausführt. Aus dem, was ich eben gesagt habe, können Sie entnehmen, daß dieser Weg, der aus dem Mathematischen herausführt, ähnlich sein müßte dem Weg, den wir durchlaufen, wenn wir mit dem ganz bildhaften Mathematischen, mit dem undurchkrafteten, unwirksam bildhaften Mathematischen, nun untertauchen in die durchkraftete und durchkraftende Natur. Da tauchen wir in etwas unter, was uns gewissermaßen mit unserer freien mathematisierenden Tätigkeit abfängt und die mathematischen Formeln in ein Geschehen einzwängt, das in

sich wirksam ist, das in sich etwas ist, von dem wir sagen müssen; wir kommen nicht vollständig heran mit dem Mathematischen; das Ding behauptet gegenüber der innerlichen Durchschaubarkeit des Mathematischen seine wesenhafte Selbständigkeit und sein wesenhaftes Innensein.

Dieser Weg, der da gegangen wird, wenn man einfach den Übergang sucht von der irrealen mathematischen Denkungsart zu der realen naturwissenschaftlichen Denkungsart, kann in einer gewissen Weise heute schon innerhalb des Mathematischen selber in einer gewissen Beziehung gefunden werden. Und wir sehen, wie er gefunden werden kann, wenn wir nicht äußerlich, sondern innerlich Versuche betrachten, welche das Denken gemacht hat beim Übergang von der bloß analytischen Geometrie zu der projektiven oder synthetischen Geometrie, wie sie die neuere Wissenschaft vorstellt.» (*Steiner*, 1921b, S. 68f.)

Man beachte, daß für Steiner die Denkungsart der synthetischen projektiven Geometrie «aus dem Mathematischen hinausführt». Dies wirft ein ganz neues Licht auf seine früher erwähnte Charakterisierung der Mathematik und ihre Impotenz gegenüber einer Erfahrung der Wirksamkeitsqualitäten der organischen Natur. Aus dem obigen Zitat geht klar hervor, daß die synthetische projektive Geometrie von ihm als ein Mittel zur Erfahrung (zumindest eines Teilbereiches) gerade dieser Wirksamkeiten betrachtet wird. Die synthetische projektive Geometrie wird als ein Beispiel angeführt, wo das Mathematische aus der formalen Enge hinaustritt und sich zu einem differenzierten Erkenntnisorgan ausbilden läßt, das einen anfänglichen Schritt zum imaginativen Erkennen bedeutet:

«Wenn man wirklich mit innerem Seelenanteil den Weg verfolgt, der da von der analytischen Geometrie in die synthetische Geometrie hineinführt, wenn man sieht, wie man da, ich möchte sagen, aufgefangen wird von etwas, was schon der Realität sich nähert, wie diese Realität im äußeren Naturdasein vorhanden ist, dann hat man dasselbe innere Erlebnis, genau dasselbe innere Erlebnis, das man hat, wenn man aufsteigt von dem gewöhnlichen Verstandesbegriff, von der gewöhnlichen Logik, zu dem Imaginativen. Man muß im imaginativen Erkennen nur weitergehen. Aber den Anfang hat man gegeben, wenn man anfängt, von der analytischen Geometrie zu der synthetischen überzugehen. Man merkt da das Abgefangenwerden von dem, was sich aus der Bestimmtheit durch die äußere Realität ergibt, nach der man das Resultat gefaßt hat, und man merkt das ebenso im imaginativen Erkennen.» (*Steiner*, 1921b, S. 80f.)

Bisher konnte der Eindruck entstehen, wie wenn die synthetische projektive Geometrie «nur» ein besonders geeignetes Übungsmittel zur Ausbildung der ersten übersinnlichen Erkenntnisstufe, der Imagination, darstellt. Dem ist aber nicht so; sie hat durchaus die Potenz, in das Wesenhaft-Wirksame des Naturgeschehens einzudringen:

«Und diese neuere synthetische Geometrie ist einmal der Weg, aus dem rein formal Mathematischen herauszukommen zu dem Problem, wo man das Empirische fassen muß [...] und zu zeigen, wie man das Mathematische in der Natur darinnen zu denken hat.» (*Steiner*, 1922, Fragenbeantwortung, S. 154)

Wie und für welche Bereiche das konkret zu geschehen hat, ist eine andere Frage. Als konkreter Hinweis in diese Forschungsrichtung kann folgende Bemerkung dienen, die Steiner in einer Fragenbeantwortung während eines Kurses für Akademiker in Den Haag im Jahre 1922 gemacht hat:

«Man hat es wirklich zu tun, solange man [...] die Wurzel der Pflanze ins Auge faßt, man hat es zu tun mit einer besonderen Ausbildung der Schwerkraft. Da steht man darinnen in der gewöhnlichen Raumes-Dimensionalität. Will man aber die Form der Blüte erklären, dann [...] muß man, statt den Koordinatenanfangspunkt zu nehmen, den unendlich fernen Raum nehmen, der ja nur die andere Form ist für den Punkt. Und dann kommt man dazu, statt hinauszugehen zentrifugal, zentripetal hineinzugehen. [...] Statt daß die Sache versprüht, drückt es von außen herein, und man bekommt dann jene Bewegungen, die gleitende oder schabende Bewegungen sind oder Druckbewegungen sind, bei denen man falschgehen würde, wenn man Koordinatenachsen vom Koordinaten-Mittelpunkt nehmen würde, wo man nämlich die unendliche Sphäre als Koordinaten-Mittelpunkt nehmen muß, und dann lauter nach dem Zentrum hingehende Koordinaten. Also man bekommt das auch qualitativ gegensätzliche Koordinaten-System, sobald man ins Ätherische kommt.» (*Steiner*, 1922, Fragenbeantwortung, S. 153)

George Adams (1894–1963) und Louis Locher (1906–1962) gelang es unabhängig voneinander, diesen und anderen Ausführungen Steiners zur Geometrie eines «qualitativ-gegensätzlichen Raumes» oder «Gegenraumes» (siehe etwa *Steiner*, 1921a, Vortrag vom 15. Januar; *Steiner*, 1922, Vortrag vom 9. April) eine mathematische Deutung innerhalb einer der projektiven metrischen, d.h. nichteuklidischen Geometrien zu geben (*Adams*, 1933; *Locher*, 1937, 1940). Und zwar handelt es sich um eine Geometrie, die zur euklidischen exakt dual ist und weiter oben als «polar-euklidische Geometrie» bezeichnet wurde (sie ist auch als «dual-euklidische» Geometrie bekannt). Erste Versuche zur konkreten und detaillierten Ausarbeitung von Anwendungen dieser Gedanken auf die Gesetzmäßigkeiten des Pflanzenwachstums und der Pflanzengestalt finden sich in *Adams/Whicher*, 1960 sowie *Edwards*, 1986.

Unter dem Gesichtspunkt der potentiellen Existenz eines dem euklidischen Raumes entgegengesetzten Raumes gewinnen die im 19. Jahrhundert durchgeführten rein mathematischen Untersuchungen zu den Grundbegriffen einer nichteuklidischen Mechanik eine ganz andere Tragweite. Läßt sich dadurch nicht ein Kräftebegriff gewinnen, der über das Wirken von «qualitativ gegensätzlichen», «peripherischen» oder «ätherischen» Kräften im mechanischen Bereich Aufschluß geben könnte? Diese Frage führte George Adams dazu, den Begriff der «peripherischen Universalkräfte» (im Gegensatz zu den punktuellen Zentralkräften der gewöhnlichen mathematischen Physik) einzuführen und diesen auf seine Bedeutung hin in der Mechanik genauer zu untersuchen (*Adams*, 1956–59). Dabei konnte er sich ganz auf die Vorarbeiten Kleins, Lindemanns und anderer stützen, da diese, was das rein Mathematische anbetrifft, alles Wesentliche schon zusammengetragen hatten (siehe *Ziegler*, 1985). Es ist hier nicht der Ort, auf diese Untersuchungen im Detail einzugehen. Es sei nur soviel erwähnt, daß sie sich als entscheidender Ausgangspunkt für weitreichende Neuinterpretierungen der mathematischen Physik im Lichte der projektiven metrischen Geometrie erwiesen haben (siehe *Gschwind*, 1977, 1979, 1985, 1986) und damit die Fruchtbarkeit der synthetischen projektiven Geometrie und der in sie eingebetteten nichteuklidischen Geometrien für ein erneuertes, der anthroposophischen Geisteswissenschaft gemäßes Verständnis der mathematischen Physik zumindest exemplarisch demonstrieren. Viele damit zusammenhängende Fragen harren selbstverständlich noch ihrer genauen Formulierung und Beantwortung, sowie einer exakten Bearbeitung in alle Details. Diese Forschungen be-

finden sich noch am Anfang, sowohl in philosophisch-geisteswissenschaftlicher, wie in mathematisch-naturwissenschaftlicher Hinsicht.

War die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie auch entscheidend daran beteiligt, der Vorherrschung der formal-mathematischen Methode in den Naturwissenschaften zum Durchbruch zu verhelfen, so scheint sie doch auch reale Aussichten auf eine gewisse Teilbereiche der kraftenden Naturgesetzlichkeit erfassende mathematische Physik und mathematischen Organik zu eröffnen. Es ist ein Hauptanliegen des vorliegenden Aufsatzes, auf diesen Doppelaspekt der Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie für die Entwicklung der naturwissenschaftlichen Methodik hinzuweisen.

10. Zusammenfassung

Die Anerkennung der Existenz einer nichteuklidischen Geometrie durch Gauss, Lobačevskij und Bolyai aufgrund rein axiomatischer (begrifflicher) Überlegungen am Anfang des 19. Jahrhunderts wird als Symptom des Vertrauens in den Wahrheitsgehalt des reinen Denkens gedeutet, das in anderer Weise auch im deutschen Idealismus zum Ausdruck gekommen ist. Kurze Zeit später erstreckt sich dieses Vertrauen nur noch auf mathematische Inhalte und macht dadurch die Mathematisierung der Naturwissenschaften und die Ablehnung der romantischen Naturphilosophie zu einer Notwendigkeit der Zeit. Die Integration der nichteuklidischen Geometrien in die Mathematik beginnend in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts war mitbeteiligt an der endgültigen Ablösung mathematischer, insbesondere geometrischer Begriffsbildungen, von der sinnlichen Anschauung. Die sich ihrer geistigen (abstrakten) Stärke bewußt werdende Mathematik beginnt nun den entscheidenden Eroberungszug durch alle Bereiche der Wissenschaften. Auf der anderen Seite eröffnet sich dadurch eine vorher nicht in demselben Maße dagewesene Möglichkeit zur Schulung des reinen Denkens und nichtsinnlichen Vorstellens mit Hilfe der Mathematik.

Rudolf Steiner veranlaßte ein erneuertes Verständnis der Mathematik als Vorschule der Geisterkenntnis sowie als methodisches Prinzip naturwissenschaftlicher Erkenntnis und warf dadurch ein deutliches Licht auf ihre Möglichkeiten und Grenzen. Die Kraft der Mathematik als Erzieherin des Bewußtseins liegt in ihrer methodischen Reinheit und Allgemeinheit, ihre Beschränktheit zur Erfassung sinnlicher Phänomene in der speziellen Form ihres Inhaltes. Gewisse ihrer Inhalte und methodischen Prinzipien weisen allerdings über sich selbst hinaus, so unter anderem die synthetische projektive Geometrie und die in sie eingebetteten nichteuklidischen Geometrien, und eröffnen damit Aussichten auf eine Mathematik kraftender Gesetzlichkeiten (mathematische Physik, mathematische Organik).

Die nichteuklidische (wie auch die synthetische projektive Geometrie) steht an der Wiege der sich von der Sinnesanschauung lösenden und zur vollen Abstraktheit läuternden Mathematik und der sich in der Folge auf die formalen mathematischen Methode beschränkenden Naturwissenschaften. Andererseits erweist sie sich zugleich als kraftvolles Instrument zur Erziehung des reinen Denkens sowie des sinnlichkeitsfreien Vorstellens und damit als ein Mittel zur Rückführung des Menschen in die kraftende Konkretheit der Natur und des Geistes.

Verdankung

Für Kommentare zu früheren Fassungen dieses Aufsatzes danke ich Peter Gschwind, Ludolf von Mackensen, Georg Maier, Thomas Meyer und Georg Unger.

Literatur

Adams, G. (1933): Von dem ätherischen Raume. Stuttgart 1981 (2. Auflage).
- (1956–59): Universalkräfte in der Mechanik. Mathematisch-Astronomische Sektion, Dornach 1973.
Adams, G. / Whicher, O. (1960): Die Pflanze in Raum und Gegenraum. Elemente einer neuen Morphologie. Stuttgart 1979 (2. Auflage).
Bonola, R. / Liebmann, H. (1908): Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Leipzig/Berlin.
Degen, H. (1956): Die Naturforscherversammlung zu Berlin im Jahre 1828 und ihre Bedeutung für die deutsche Geistesgeschichte. Naturwissenschaftliche Rundschau Bd. 9, S. 333–340.
Edwards, L (1986): Geometrie des Lebendigen. Vom Erleben gestaltbildender Naturkräfte. Stuttgart.
Goethe, J. W. (1793): Der Versuch als Mittler zwischen Objekt und Subjekt. Goethes Naturwissenschaftliche Schriften in Kürschners Deutscher Nationallitteratur, Bd. 2 (1887) = R. Steiner GA 1b, Dornach 1975.
Gschwind, P. (1977): Der lineare Komplex – eine überimaginäre Zahl. Dornach.
- (1979): Methodische Grundlagen zu einer projektiven Quantenphysik. Dornach.
- (1985): Zur Deutung mathematisch-physikalischer Strukturen. Math.-Phys. Korrespondenz Nr. 139, S. 18–25.
- (1986): Raum, Zeit, Geschwindigkeit. Dornach.
Hegel, G. W. F. (1830): Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse (Dritte Ausgabe). Theorie-Werkausgabe Bd. 9, Suhrkamp, Frankfurt 1970.
- (1831): Wissenschaft der Logik (Zweite Ausgabe). Theorie-Werkausgabe, Bd. 5, Suhrkamp, Frankfurt 1969.
Henderson, L. D. (1983): The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art. Princeton.
Jammer, M. (1980): Das Problem des Raumes. Darmstadt.
Kant, I. (1781): Kritik der reinen Vernunft.
- (1786): Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft.
Klein, F. (1926): Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Berlin.
- (1928): Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Berlin.
Locher, L. (1937): Urphänomene der Geometrie. Dornach 1980 (2. Auflage).
- (1940): Projektive Geometrie. Dornach 1980 (2. Auflage).
Mainzer, K. (1980): Geschichte der Geometrie. Mannheim/Wien/Zürich.
Pont, J.-C. (1986): L'Aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne: Précurseurs et attardés. Bern/Frankfurt/New York.
Reichardt, H. (1976): Gauss und die nichteuklidische Geometrie. Leipzig.

Steiner, R. (1883–97): [Einleitungen zu] Goethes naturwissenschaftlichen Schriften. GA 1, Dornach 1973.
– (1886): Grundlinien einer Erkenntnistheorie der Goetheschen Weltanschauung. GA 2, Dornach 1960.
– (1894): Die Philosophie der Freiheit. GA 4, Dornach 1978.
– (1904): Mathematik und Okkultismus. In: Philosophie und Anthroposophie. GA 55, Dornach 1965.
– (1921a): Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie. 15. Vortrag vom 15. Januar. GA 323, Dornach 1983.
– (1921b): Mathematik und anorganische Naturwissenschaften. Vortrag vom 5. April. In: Die befruchtende Wirkung der Anthroposophie auf die Fachwissenschaften. GA 76, Dornach 1977.
– (1922): Die Bedeutung der Anthroposophie im Geistesleben der Gegenwart. Dornach 1957.
– (1923): Goethe und die Mathematik. In: Der Goetheanumgedanke inmitten der Kulturkrisis der Gegenwart. GA 36, Dornach 1961.
Unger, G. (1940): Zur Charakteristik der wissenschaftlichen Methode: Nichteuklidische Geometrie. Das Goetheanum, Bd. 19, S. 43–45.
Whicher, O. (1970): Projektive Geometrie. Stuttgart.
Ziegler, R. (1985): Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert – eine historisch-systematische Untersuchung von Möbius und Plücker bis zu Klein und Lindemann. Stuttgart (Boethius, Bd. XIII).

Dr. Renatus Ziegler
Mathematisch-Physikalisches Institut
Goetheanum
Oberer Zielweg 34
CH-4143 Dornach